О.М. Афанасьєва
Я.С. Бродський
О.Л. Павлов
А.К. Сліпенко

МАТЕМАТИКА

11 клас

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2011

ББК 22.1я72
74.262.21
А94

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено.

Наукову експертизу проводив Інститут математики НАН України.
Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут педагогіки НАПН України.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України №235 від 16.03.2011 р.)

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
А94 Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 480 с.

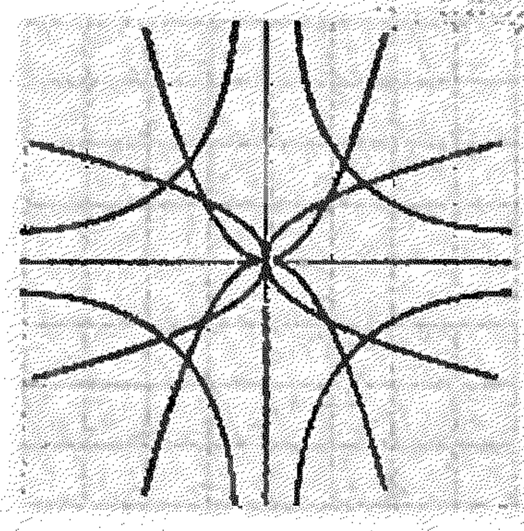
ISBN 978-966-10-1902-6

Пропонований підручник відповідає програмі з математики для 11-го класу рівня стандарту і передбачає готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

ББК 22.1я72
74.262.21

ISBN 978-966-10-1902-6



Історичний коментар

Питання, які традиційно належать до прикладних питань диференціального числення (побудова дотичних до кривих, знаходження максимумів і мінімумів) епізодично виникали ще у Евкліда, Архімеда та в інших давньогрецьких математиків і в подальші періоди.

Успіхи, яких досягли у XVII ст. наука, техніка, природознавство, не могли не вплинути на розвиток математики й, у свою чергу, математика суттєво сприяла науковому прогресу. Адже закони руху планет, відкриті Й. Кеплером (1571–1630) на початку цього століття, досліджувались математичними методами і формулювались мовою математики. Трохи пізніше Г. Галілей (1564–1642) математично сформулював закони падіння тіл. Ці й багато інших результатів у фізиці, створення П. Ферма (1601–1665) і Р. Декартом (1596–1650) координатного методу привели до введення «руху» в математику, виникнення математики змінних величин, одним із основних понять якої є похідна функції.

Можна назвати імена багатьох учених XVII ст. (П Ферма, Т. Барроу, Д. Валліс та ін.), праці яких підготували ґрунт для вирішального кроку, зробленого врешті І. Ньютоном (1643–1727) та Г. Лейбніцем (1646–1716), які узагальнили накопичені до цього часу окремі результати і факти, перетворивши їх у цілісну теорію диференціального числення.

І. Ньютон зробив свої відкриття у 60-70 рр. XVII ст., але оприлюднив їх значно пізніше. Тому пріоритет відкриття він поділив з Г. Лейбніцем, причому завдяки останньому основні ідеї нового числення набули широкого визнання і розповсюдження.

Розвиток диференціального числення привів до створення теорії функцій, одного з найважливіших розділів математики. У скарбницю цієї математичної дисципліни вагомий внесок внесли й українські вчені: М.П. Кравчук (1892–1942), С.Н. Бернштейн (1880–1968), Н.І. Ахієзер (1901–1980), М.Г. Крейн (1907–1989), В.К. Дзядик (1919–1998) і багато інших.

Система задач і вправ, наведених у підручнику, має три рівні складності: перший рівень складності позначено символом «°», другий не має позначень, третій позначено символом «*».

До загальної системи задач включено вправи на повторення, що мають сприяти готовності до опанування наступним матеріалом, збереженню вмінь і навичок, сформованих при вивченні попередніх розділів.

Кожний розділ завершується матеріалом для підготовки до тематичного оцінювання, який складається із запитань для самоконтролю (з відповідями) та зразка тематичної контрольної роботи. Для повторення і систематизації навчального матеріалу розділу наведено відповідні таблиці. Кожен із розділів завершується історичним коментарем.

Підручник містить вказівки і відповіді до задач, а також предметний покажчик.

Читання книги не є легкою справою. Деякі фрагменти доведень залишені для самостійного опрацювання. Не минайте їх!

Щиро бажаємо успіхів!

Колектив авторів

Позначення для орієнтування в навчальному матеріалі

Б, О — дві сходинки засвоєння навчального матеріалу

— зверніть увагу

□ — початок розв'язання задачі, доведення теореми

■ — кінець розв'язання задачі, доведення теореми

° — задачі першого рівня складності

* — задачі третього рівня складності

— контрольні запитання

— графічні вправи; задачі

— історичний коментар

— межі для різних типів задач

— вправи для повторення

— завдання для самоконтролю

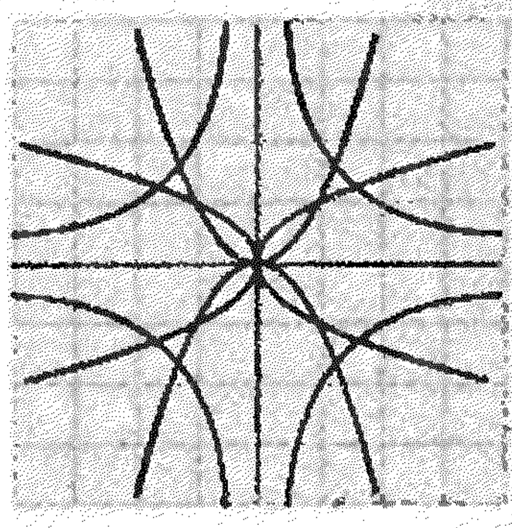
— тест для діагностики

Розділ 1.

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

Основним призначенням сучасної математики є моделювання явищ природи і суспільства, причому поняття функції належить до найважливіших засобів моделювання. Тому цілком природною і актуальною є проблема збагачення класів функцій. У цьому розділі ми ознайомимося з новими функціями, які будуть уведені за допомогою операції піднесення до степеня та операції, оберненої до неї. Властивості та графіки таких функцій вивчають за допомогою методів, які використовувались у курсі математики 10-го класу.

У природничих науках і техніці зустрічаються процеси, зростання або «згасання» яких відбувається швидше, ніж у будь-якої степеневої функції. Такі процеси описуються показниковими функціями. Для їхнього вивчення необхідно скористатися ще однією (окрім добування кореня) операцією, оберненою до піднесення до степеня. Вона називається логарифмуванням. Функції, що вводяться за допомогою цієї операції, тобто логарифмічні функції, також широко застосовуються для опису реальних процесів.



Готуємось до вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції»

Вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції» суттєво використовує матеріал теми «Функції, їхні властивості і графіки», яка вивчалась у 10 класі, і практично весь алгебраїчний матеріал з попередніх класів (обчислення, вирази та їхні перетворення, рівняння і нерівності, послідовності). Для підготовки до вивчення теми наведено найважливіший матеріал у вигляді таблиць.

Означення степеня з раціональними показниками

Таблиця 1

Степінь з натуральним показником	$n \in N, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$. $a^1 = a$.
Степінь з нульовим показником	$a^0 = 1,\ a \neq 0$.
Степінь з цілим від'ємним показником	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0,\ n \in N$.
Степінь з раціональним показником	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, n \in N, n > 1, m \in Z$.

Властивості степеня з раціональним показником

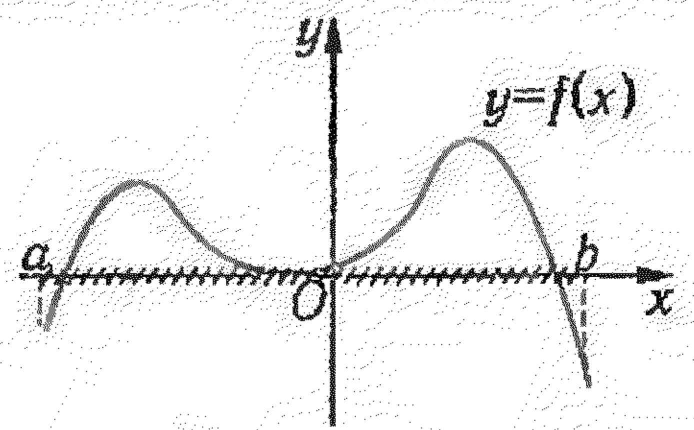
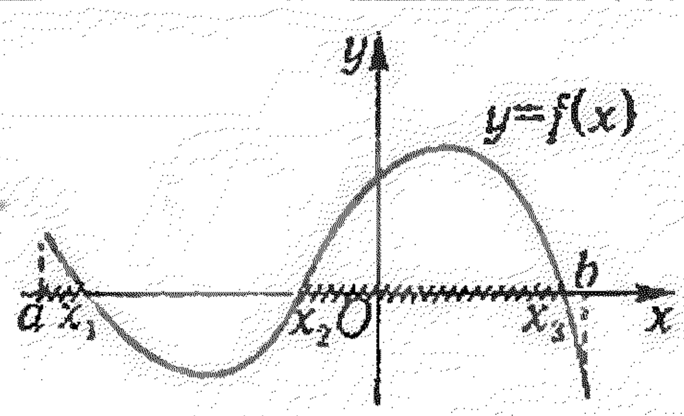
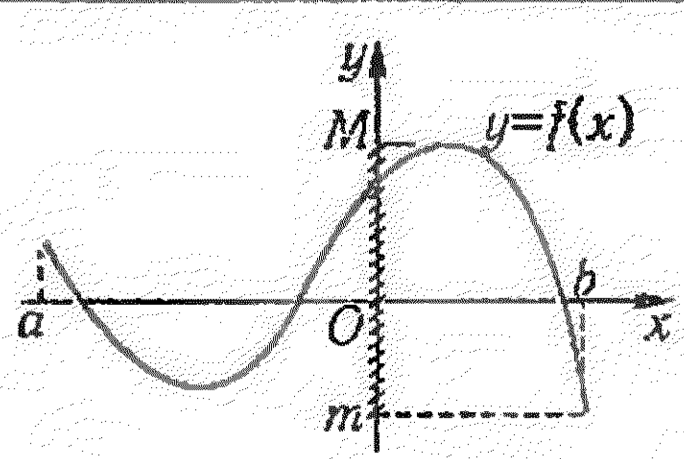
Таблиця 2

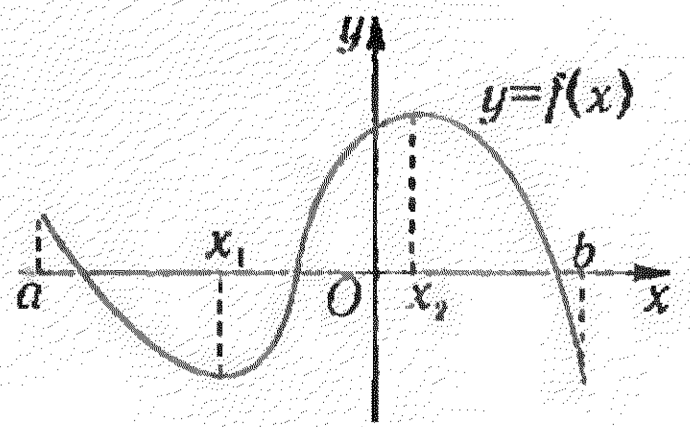
Добуток степенів з однаковими основами	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in Q$.
Частка від ділення степенів з однаковими основами	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in Q$.
Піднесення степеня до степеня	$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, x, y \in Q$.

Степінь добутку	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in Q$.
Степінь частки	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, x \in Q$.

Читання графіка функції

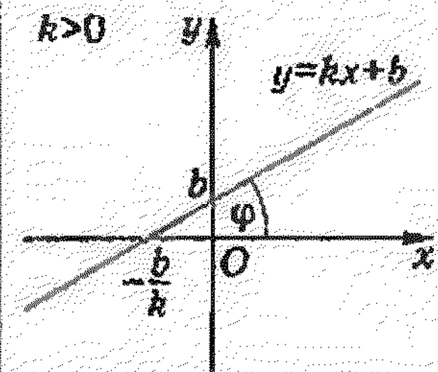
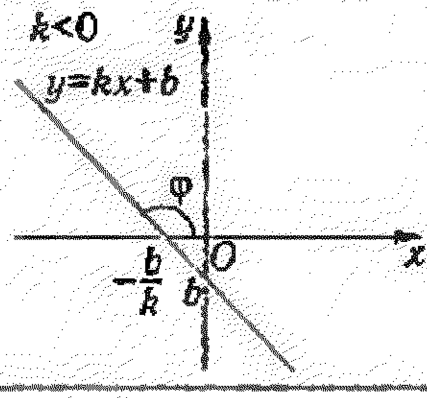
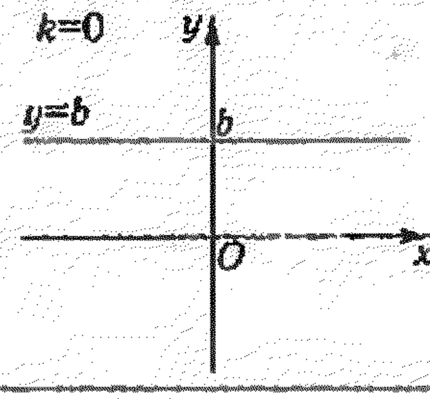
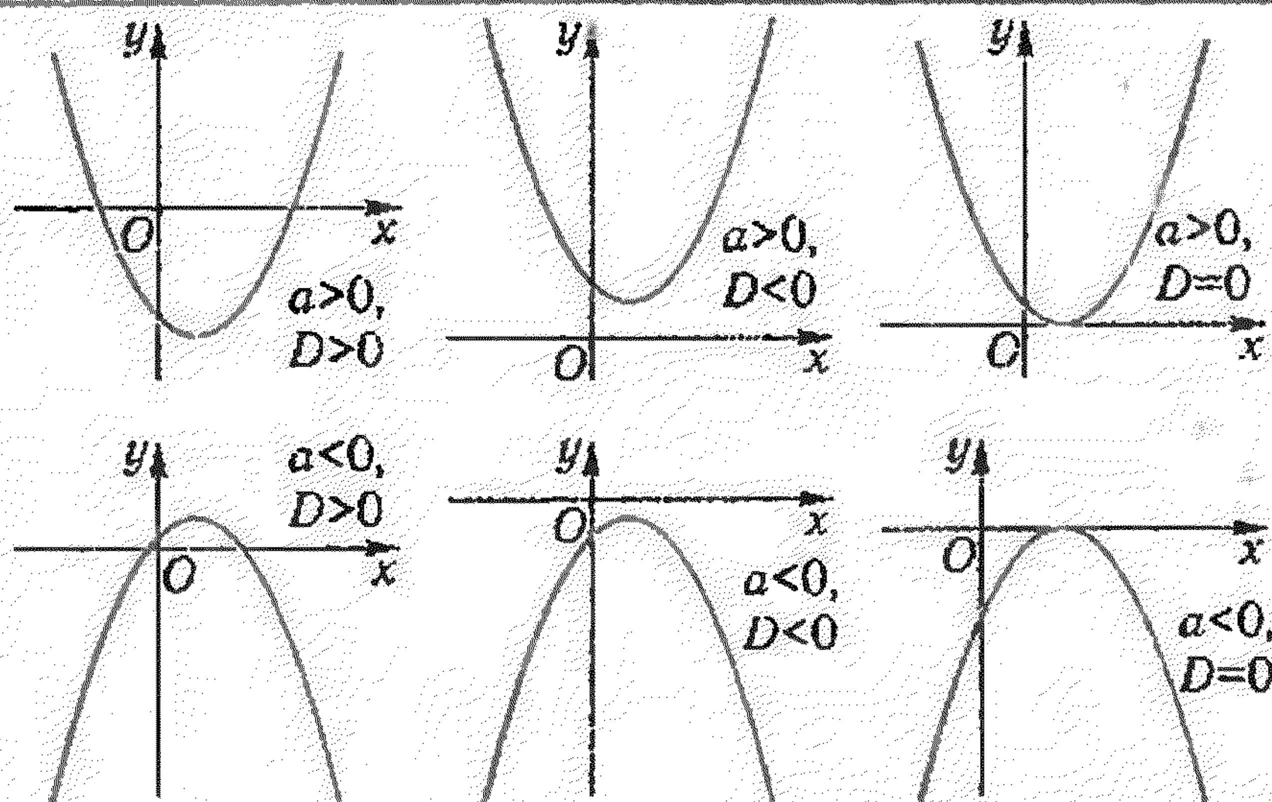
Таблиця 3

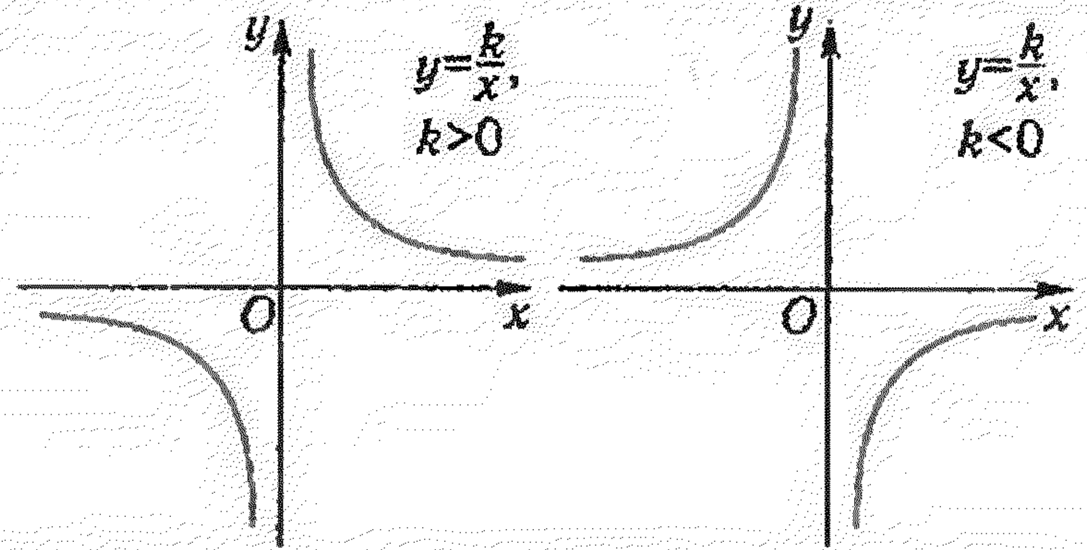
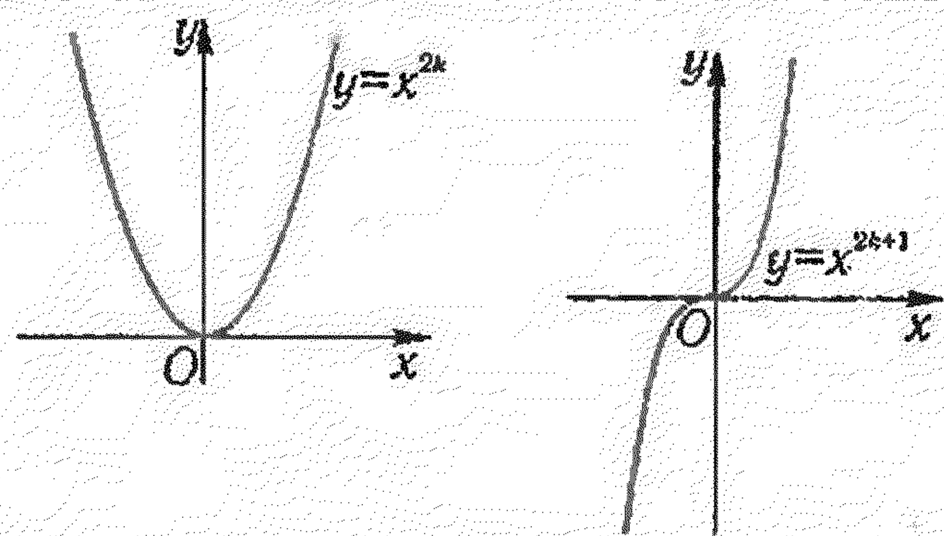
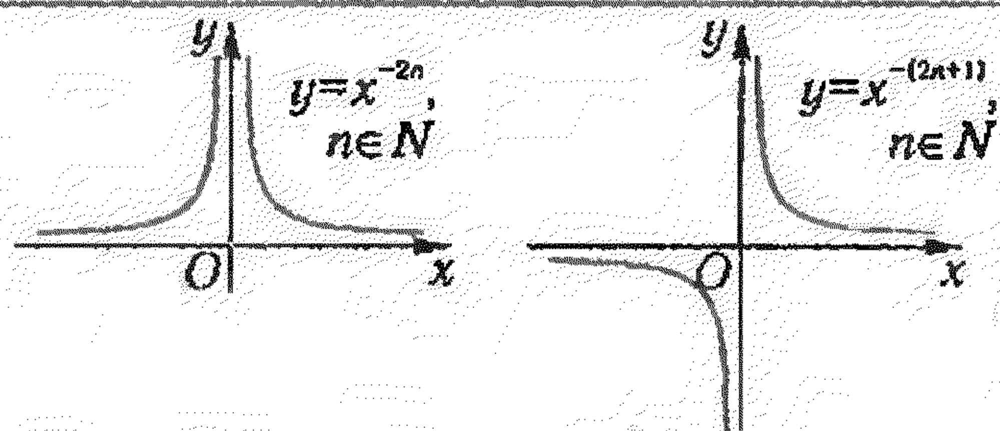
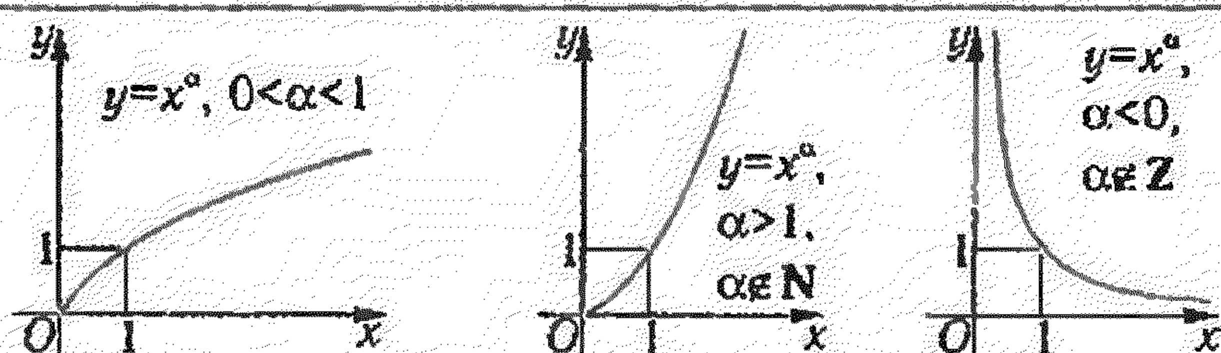
Область визначення функції	 $D(f) = [a; b]$
Нулі функції, проміжки знакосталості функції	 x_1, x_2, x_3 — нулі функції $f(x) > 0$ $x \in [a; x_1) \cup (x_2; x_3)$ $f(x) < 0$ $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; b]$
Найбільше, найменше значення, множина значень функції	 M — найбільше значення функції m — найменше значення функції $E(f) = [m; M]$

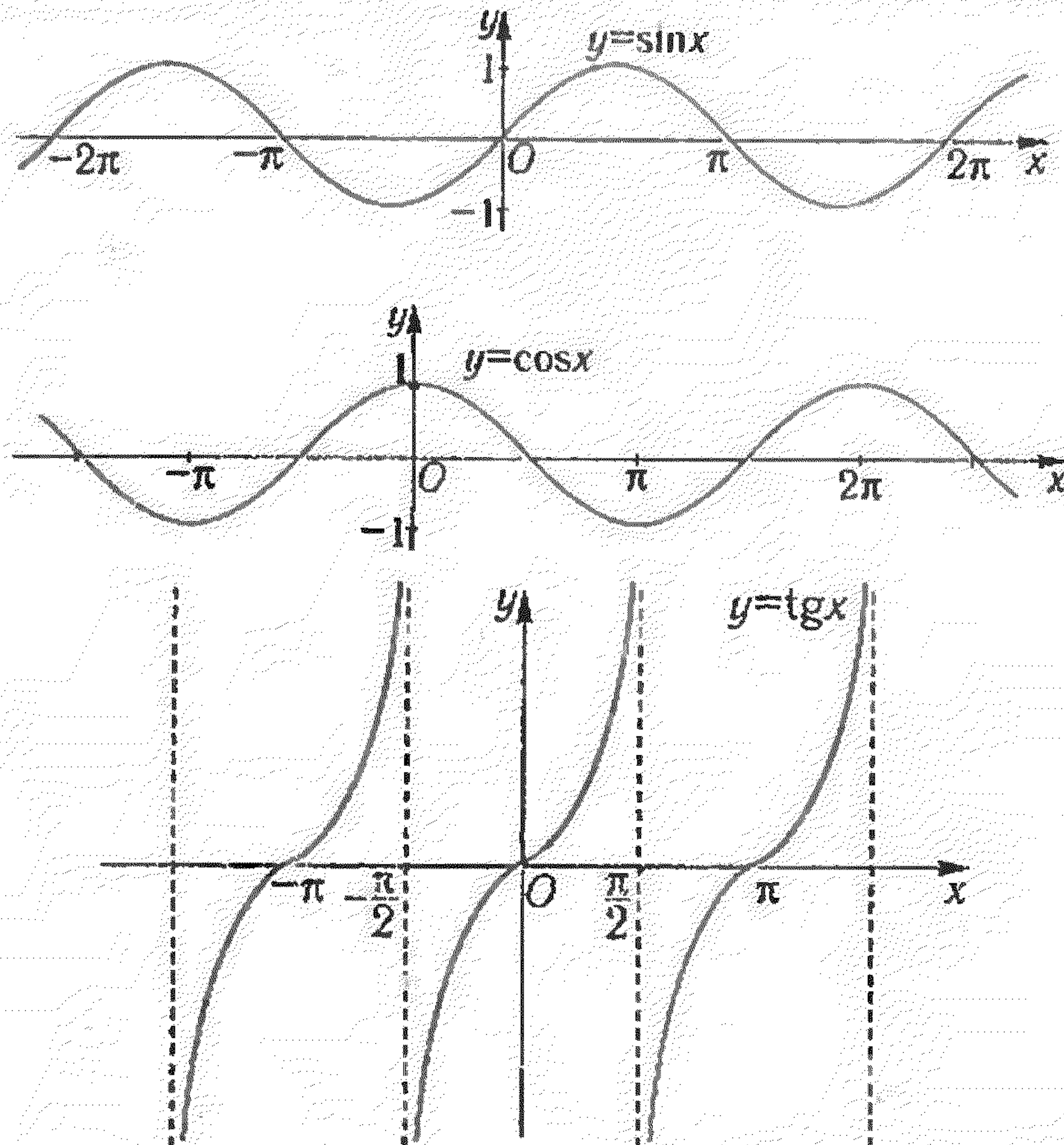
Проміжки монотонності функції	 $f(x)\nearrow x\in[x_1,x_2]$ $f(x)\searrow x\in[a,x_1], x\in[x_2,b]$

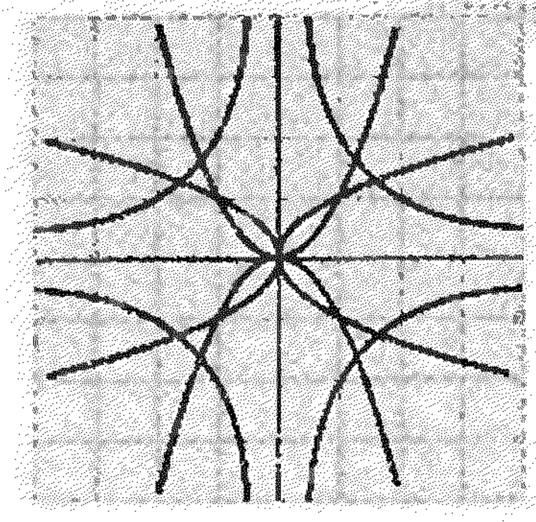
Основні класи функцій

Таблиця 4

Функції	Графіки
Лінійна функція	  
Квадратична функція $y=ax^2+bx+c$; $D=b^2-4ac$	

Функції	Графіки
Обернена пропорційність	
Степеневі функції з натуральними показниками	
Степеневі функції з цілими від'ємними показниками	
Степеневі функції з дробовими показниками	

Функції	Графіки
Тригонометричні функції	



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції»

1. Обчисліть: $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

А. $\frac{16}{9}$. Б. $-\frac{16}{9}$. В. $\frac{9}{16}$. Г. $-\frac{9}{16}$.

2. Подайте степінь $4^{-\frac{2}{3}}$ з дробовим показником у вигляді кореня.

А. $\sqrt[3]{4^{-2}}$. Б. $\sqrt[-2]{4^{3}}$. В. $\sqrt{4^{-3}}$. Г. $\sqrt[-3]{4^{2}}$.

3. Запишіть у вигляді степеня з раціональним показником вираз $\sqrt[4]{7^3}$.

А. $7^{\frac{4}{3}}$. Б. $7^{\frac{3}{4}}$. В. $\left(\frac{3}{4}\right)^7$. Г. $\left(\frac{4}{3}\right)^7$.

4. Який з наведених виразів не має змісту?

А. $7^{\frac{4}{3}}$. Б. $7^{-\frac{4}{3}}$. В. $(-7)^{\frac{4}{3}}$. Г. $(0)^{\frac{4}{3}}$.

5. Обчисліть значення виразу $\frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{2}$ при $x = 8$.

А. –7. Б. 7. В. 8. Г. –9.

6. Зобразіть у вигляді степеня $\left(x^{-1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

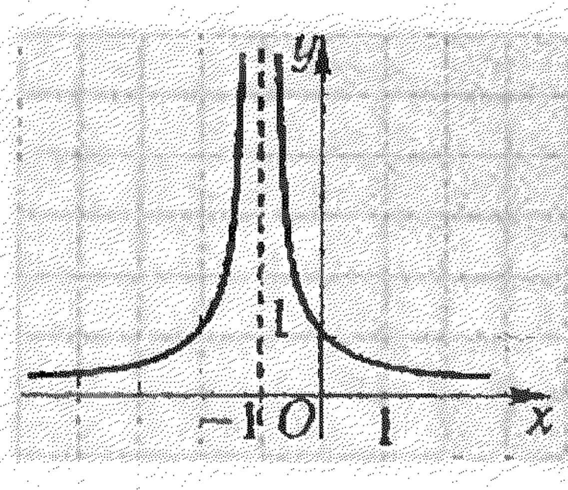
А. $x^{-\frac{1}{3}}$. Б. $x^{\frac{1}{3}}$. В. $x^{-\frac{19}{12}}$. Г. $x^{\frac{16}{3}}$.

7. Порівняйте без обчислювальних засобів числа $3^{-0,5}$ і 1.

А. $3^{-0,5} < 1$. Б. $3^{-0,5} > 1$. В. $3^{-0,5} = 1$.

Г. Порівняти неможливо.

8. На рисунку зображено графік функції $y=\frac{1}{(x+1)^2}$. Укажіть проміжок, на якому функція спадає.



А. $(-1; +\infty)$. **Б.** $(-\infty; -1)$.
В. $(-\infty; +\infty)$. **Г.** $(0; 1)$.

9. Знайдіть область визначення функції $y=\frac{\sqrt{2-x}}{x}$.

А. $(-\infty; 2]$. **Б.** $[2; +\infty)$. **В.** $(-\infty; 0)\cup(0; 2]$. **Г.** $(0; 2]$.

10. Через яку з наведених точок проходить графік функції $y=x^{\frac{2}{3}}$?

А. $(-8; 4)$. **Б.** $(4; 8)$. **В.** $\left(2\sqrt{2}; 2\right)$. **Г.** $\left(2; 2\sqrt{2}\right)$.

11. Знайдіть множину значень функції $y=1-\sqrt{x}$.

А. $[0; +\infty)$. **Б.** $[1; +\infty)$. **В.** $(-\infty; 0]$. **Г.** $(-\infty; 1]$.

12. Знайдіть параметр a, якщо відомо, що графік функції $y=\frac{a}{x^2}$ проходить через точку $A(-2; 0{,}5)$.

А. -2. **Б.** 2. **В.** $\frac{1}{2}$. **Г.** $-\frac{1}{2}$.

13. Як розміщені один відносно одного графіки функцій $y=f(x)$ і $y=f(-x)$?

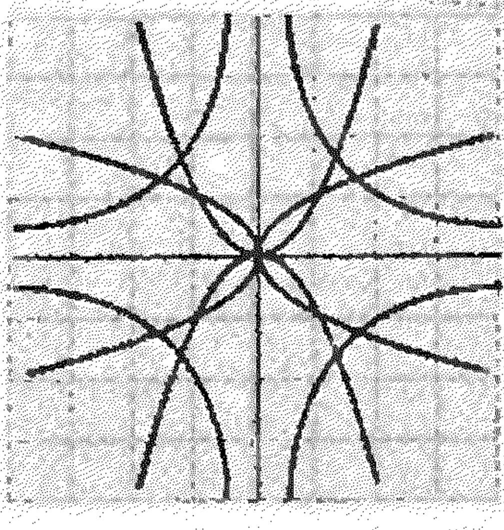
А. Симетрично відносно осі y.
Б. Симетрично відносно осі x.
В. Симетрично відносно початку координат.
Г. Визначити неможливо.

14. Бак ємністю 1000 л заповнено водою. З нього за добу витікає через отвір 0,1 його вмісту. Скільки води буде у баку через три доби?

А. 810 л. **Б.** 700 л. **В.** 729 л.
Г. Відповідь відрізняється від наведених.

15. Скільки коренів має рівняння $\frac{1}{1+x}=x^3$?

А. 0. **Б.** 1. **В.** 2. **Г.** 4.



§1. Показникова функція

У цьому параграфі розглядаються показникові функції, їхні властивості та графіки, застосування цих функцій для опису процесів і явищ навколишнього середовища.

1. Степінь із довільним дійсним показником

Раніше розглядалися степені з раціональними показниками. Однак у математиці та при її застосуваннях доцільно використовувати степені з довільними дійсними показниками.

Спробуємо визначити, що слід розуміти, наприклад, під виразом $(0,9)^{\sqrt{2}}$. Нехай $\{r_n\}$ — послідовність десяткових наближень числа $\sqrt{2}$ з недостачею ($r_1 = 1$; $r_2 = 1,4$; $r_3 = 1,41$; $r_4 = 1,414$; ...), а $\{s_n\}$ — послідовність десяткових наближень для $\sqrt{2}$ з надлишком ($s_1 = 2$; $s_2 = 1,5$; $s_3 = 1,42$; $s_4 = 1,415$; ...). Зрозуміло, що перша послідовність зростаюча, друга – спадна, причому $r_n < \sqrt{2} < s_n$ для будь-якого $n \in N$. Різниця $s_n - r_n$ може стати меншою від будь-якого додатного числа при достатньо великому значенні n. Обчислимо за допомогою калькулятора перші члени послідовностей $\left\{(0,9)^{r_n}\right\}$ і $\left\{(0,9)^{s_n}\right\}$ та модулі їхніх різниць. Результати обчислень подано в таблиці.

Таблиця 5

n	1	2	3	4	5	6
r_n	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421
$(0,9)^{r_n}$	0,9	0,8629	0,8619	0,8616	0,8616	0,8616

Таблиця 5 (продовження)

n	1	2	3	4	5	6
$\lvert 0{,}9^{s_n} - 0{,}9^{r_n} \rvert$	0,09	0,0091	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000
$(0{,}9)^{s_n}$	0,81	0,8538	0,8610	0,8615	0,8616	0,8616
s_n	2	1,5	1,42	1,415	1,4143	1,41422

Аналіз таблиці 5 дає змогу припустити, що послідовність $\left\{(0{,}9)^{r_n}\right\}$ спадає, а $\left\{(0{,}9)^{s_n}\right\}$ зростає. Модуль різниці $(0{,}9)^{s_n} - (0{,}9)^{r_n}$ зменшується при збільшенні n і наближається до нуля. Так, уже при $n = 3$ модуль різниці чисел $(0{,}9)^{r_n}$ і $(0{,}9)^{s_n}$ менший від 0,001. Природно припустити, що існує число, яке менше від усіх $(0{,}9)^{r_n}$ і більше від усіх $(0{,}9)^{s_n}$, $n \in N$. Це число і позначають через $(0{,}9)^{\sqrt{2}}$.

І взагалі степінь a^{α} з ірраціональним показником α визначається таким чином. Для числа α вибирається послідовність раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, яка задає наближення до α з будь-якою точністю. Будується послідовність степенів з раціональними показниками $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \ldots, a^{\alpha_n}, \ldots$. Ця послідовність наближається до деякого числа з будь-якою точністю. Це число і називається степенем a^{α}.

Приклад 1. Обчислити наближено: 1) $5^{\sqrt{3}}$; 2) 3^{π}.

□ 1) Оскільки $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, то $5^{\sqrt{3}} \approx 5^{1{,}73} \approx 16{,}2$.

2) Оскільки $\pi \approx 3{,}14$, то $3^{\pi} \approx 3^{3{,}14} \approx 31{,}5$. ■

Відповідь. 1) $\approx 16{,}2$; 2) $\approx 31{,}5$.

Звертаємо увагу на те, що степінь a^{α} визначено для *додатних* дійсних чисел a, оскільки для додатних a визначено степінь з раціональним показником.

Властивості степеня з раціональним показником (див. таблицю 2) повністю зберігаються і для степенів з ірраціональними показниками.

Приклад 2. Спростити вираз: 1) $a^{\sqrt{3}+2} : a^{\sqrt{3}-2}$; 2) $\left(a^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$.

□ 1) Згідно з властивістю частки степенів з однаковими основами, $a^{\sqrt{3}+2} : a^{\sqrt{3}-2} = a^{(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}-2)} = a^4$.

2) Застосовуючи правило піднесення степеня до степеня, матимемо: $\left(a^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2} = a^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = a^{3-4} = a^{-1}$. ■

Відповідь. 1) a^4; 2) a^{-1}.

Узагальнимо приклад, розглянутий на початку пункту. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ — послідовність десяткових наближень ірраціонального числа α з недостачею, а $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ — послідовність десяткових наближень цього числа α з надлишком.

Якщо $a > 1$, то під степенем a^α числа a з додатним ірраціональним показником α слід розуміти число, яке більше від усіх чисел $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, ..., a^{\alpha_n}, ...$ і менше від усіх чисел $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, ..., a^{\beta_n}, ...$, $n \in N$.

Якщо $0 < a < 1$, то під степенем a^α числа a з додатним ірраціональним показником α слід розуміти число, яке більше від усіх чисел $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, ..., a^{\beta_n}, ...$ і менше від усіх чисел $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, ..., a^{\alpha_n}, ...$, $n \in N$.

1^α, за означенням, дорівнює 1.

Якщо $a > 0$ і α — додатне ірраціональне число, то вважатимемо, що

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

Останнє означення є коректним, оскільки для всіх додатних a і α вираз a^α відмінний від нуля, точніше, $a^\alpha > 0$.

Розглянемо задачу, яку в XV ст. розв'язував французький математик Н. Шюке (бл. 1445 – бл. 1500).

Приклад 3. Резервуар має отвір, через який за кожну одиницю часу витікає $\frac{1}{10}$ частина тієї кількості води, що містилась на початку відліку цієї одиниці часу.

1) Яка частина води в резервуарі залишиться через 5 одиниць часу; через $7\frac{1}{3}$ одиниці часу?

2) За який час резервуар спорожніє наполовину?

☐ Будемо міркувати так. Якщо початкову кількість води прийняти за a одиниць об'єму, то через одну одиницю часу залишиться $\frac{9}{10}a$ одиниць об'єму води, через дві – $\frac{9}{10}a\cdot\frac{9}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^2a$, через три – $\left(\frac{9}{10}\right)^2a\cdot\frac{9}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^3a$ і т. д. Якщо вода витікає неперервно, то через t одиниць часу в резервуарі залишиться $\left(\frac{9}{10}\right)^ta$ одиниць об'єму води. Вираз $\left(\frac{9}{10}\right)^ta$ є математичною моделлю для об'єму води в резервуарі через t одиниць часу. Користуючись цією моделлю, неважко знайти відповіді на поставлені запитання.

1) Через 5 одиниць часу в резервуарі буде $\left(\frac{9}{10}\right)^5a$, або приблизно $0{,}590a$ одиниць об'єму, тобто приблизно 60% місткості резервуара. Через $7\frac{1}{3}$ одиниці часу в резервуарі буде $\left(\frac{9}{10}\right)^{7\frac{1}{3}}a=\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{22}{3}}a\approx0{,}462a$ одиниць об'єму води.

2) Потрібно знайти таке значення t, при якому $\left(\frac{9}{10}\right)^t=\frac{1}{2}$. Неважко довести, що при жодному натуральному і навіть раціональному t дана рівність виконуватися не може. Справді, якщо $t=n$, $n\in N$, і $\left(\frac{9}{10}\right)^n=\frac{1}{2}$, то $2\cdot9^n=10^n$. Остання рівність неможлива, оскільки права її частина ділиться на 5, а ліва не ділиться. Якщо t — додатне раціональне число і $t=\frac{m}{n}$, $m\in N$, $n\in N$, то $\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{2}$, $2\cdot9^{\frac{m}{n}}=10^{\frac{m}{n}}$, $2^n\cdot9^m=10^m$, тобто знову отримали таку саму суперечність. Із розв'язання завдання 1) випливає, що через 5 одиниць часу в резервуарі залишиться більше половини об'єму резервуару, а через $7\frac{1}{3}$ одиниці часу — менше половини. Із неперервності процесу витікання води випливає, що існує така мить часу, коли

рівність $\left(\frac{9}{10}\right)^{t}=\frac{1}{2}$ справджується, тобто це рівняння має розв'язок. Виникає питання: як знайти цей розв'язок. Відповідь на нього ми надамо далі. ■

✓ Контрольні запитання

1°. Які з наступних виразів мають зміст: $2^{\sqrt{3}}; 2^{-\sqrt{3}}; (-2)^{\sqrt{3}}; \sqrt{2}^{\sqrt{3}};$ $0^{\sqrt{3}}; 0^{-\sqrt{3}}; 1^{\sqrt{3}}; 1^{-\sqrt{3}}; 3^{\pi}; \pi^{\sqrt{3}}; \left(-\sqrt{3}\right)^{\pi}$?

2°. Чому дорівнює значення виразу: а) $1^{\sqrt{2}}$; б) 0^{π}; в) $1^{-\sqrt{2}}$; г) $0^{-\pi}$?

3. Нехай дано ірраціональне число 1,101101110... . Чи є правильним твердження про те, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,1011}>\left(\frac{1}{2}\right)^{1,102}$?

4. Яке з чисел є більшим:

а) $3^{1,73}$ чи $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $(\sqrt{3}=1,7320508...)$;

б) $2^{3,14}$ чи $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}$?

5. Який знак має різниця $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{3}}-1$?

2. Властивості і графік показникової функції

Б У 10-му класі послідовно вивчались степеневі функції $y=x^{r}$ з натуральними, цілими, раціональними показниками. Для цих функцій незалежною змінною є основа степеня, а показник степеня — стала величина. Широке застосування мають функції, в яких незалежною змінною є показник степеня, а основа степеня — стала величина. Такі функції називаються ***показниковими***.

Функцію, яку задано формулою $y=a^{x}$, $x\in R$, $a>0$, $a\neq 1$, називають показниковою.

Випадок $a=1$ приводить до вже відомої функції $y=1^{x}=1$.

Областю визначення показникової функції, за означенням, є множина всіх дійсних чисел.

Розглянемо, наприклад, функцію $y = 2^x$. Вона задана на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Складемо таблицю значень цієї функції для деяких значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

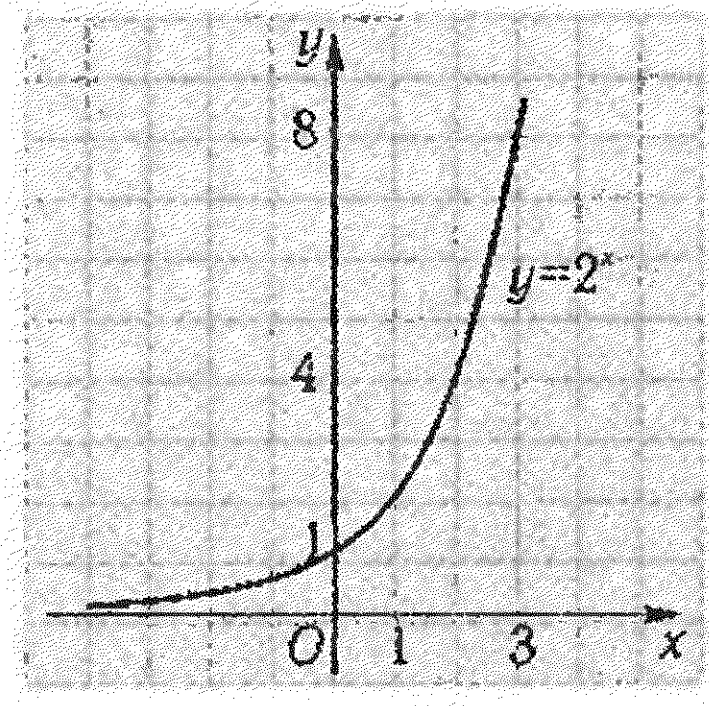


Рис. 1

Побудуємо точки із знайденими координатами $(x; y)$ на координатній площині і сполучимо їх лінією (рис. 1). Одержимо графік функції $y = 2^x$. Аналізуючи його і скориставшись властивостями степеня з дійсним показником, можна дійти висновку, що функція $y = 2^x$ має такі властивості: 1) вона набуває лише додатних значень; 2) не має нулів; 3) є зростаючою; 4) множиною її значень є проміжок $(0; +\infty)$; 5) її графік проходить через точку з координатами $(0; 1)$; 6) при $x > 0$ вона набуває значень, більших від 1, а при $x < 0$ — менших від 1.

Показникові функції $y = a^x$, при довільному $a > 1$, мають аналогічні властивості і графіки.

Розглянемо тепер функцію $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Її теж задано на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Складемо таблицю значень цієї функції для деяких значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ зображено на рис. 2. Аналізуючи графік цієї функції і знову таки спираючись на властивості степеня з дійсним показником, можна дійти висновку, що функція

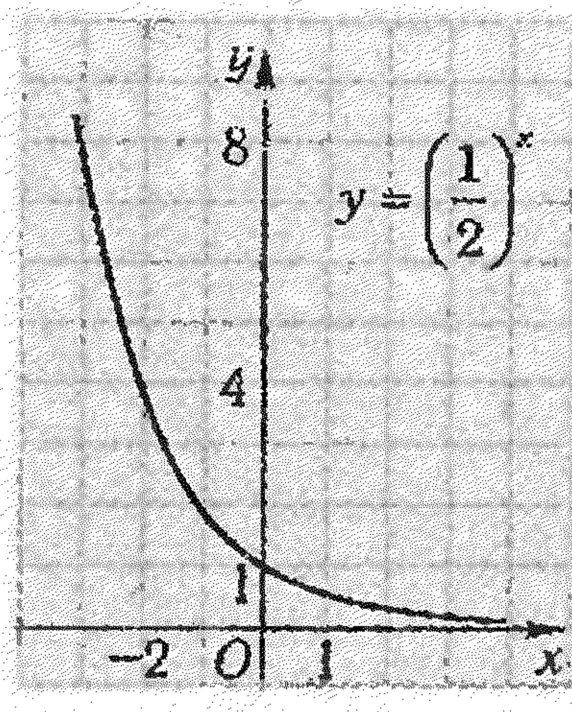


Рис. 2

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$: 1) набуває лише додатних значень; 2) не має нулів; 3) є спадною, 4) множиною її значень є проміжок $(0; +\infty)$; 5) має графік, який проходить через точку з координатами $(0;\ 1)$; 6) при $x > 0$ набуває значень, менших від 1, а при $x < 0$ — більших від 1.

Показникові функції $y=a^x, 0<a<1$, мають аналогічні властивості і графіки.

Приклад 4. Дано функцію $f(x) = 2^x - 2$.

1) Указати її область визначення і множину значень.

2) Чи проходить графік цієї функції через точку $A(3; 6)$?

3) Побудувати її графік.

4) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5) Скільки коренів має рівняння $f(x)=-x^2$?

□ 1) Функція $y = 2^x - 2$ визначена на всій координатній осі, тобто її областю визначення є множина $(-\infty;+\infty)$. Оскільки множиною значень функції $y = 2^x$ є проміжок $(0;+\infty)$, тобто $0 < 2^x < +\infty$, або $-2 < 2^x - 2 < +\infty$, то множиною значень даної функції є проміжок $(-2;+\infty)$.

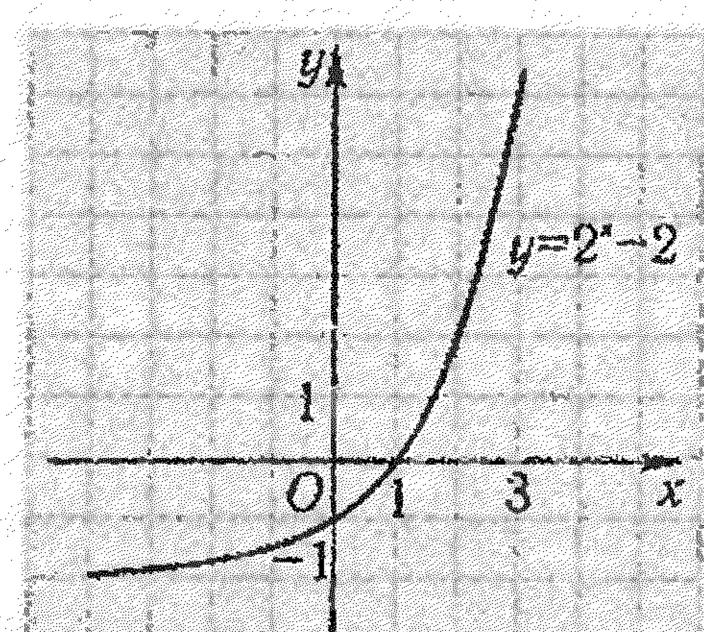


Рис. 3

2) Щоб перевірити, чи проходить графік функції через точку знайдемо значення функції в точці $x = 3$: Отже, графік функції не проходить через точку A.

3) Графік даної функції можна побудувати із графіка функції $y=2^x$ паралельним перенесенням останнього на 2 одиниці у від'ємному напрямі осі ординат (рис. 3).

4) Щоб знайти точку перетину графіка з віссю y, знайдемо значення функції при $x = 0$: $f(0)=2^0-2=1-2=-1$. Отже, графік функції перетинає вісь y у точці $(0;-1)$. Щоб знайти точку перетину графіка з віссю x, знайдемо, при яких значеннях x функція набуває

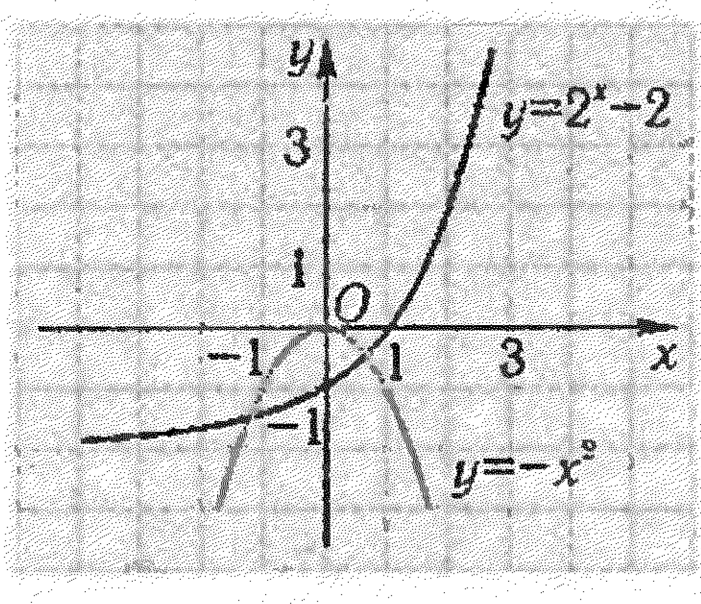
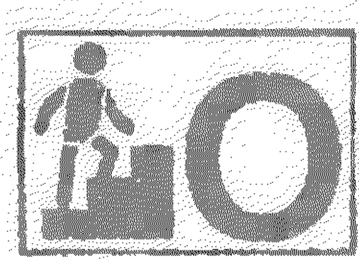


Рис. 4

значення 0: $0=2^x-2$, $2^x=2$, $x=1$. Отже, графік функції перетинає вісь x у точці $(1;0)$.

5) Для відповіді на запитання потрібно встановити, у скількох точках перетинаються графіки функцій $y = 2^x-2$ і $y=-x^2$. Парабола $y=-x^2$ перетинає графік даної функції у двох точках (рис. 4). Відтак рівняння має два корені. ■

Відповідь. 1) $(-\infty;+\infty)$; $(-2;+\infty)$; 2) не проходить; 4) $(1;0)$; 5) два корені.



Обґрунтуємо деякі властивості показникової функції, про які йшлося вище.

Властивість 1. Показникова функція $y=a^x$ набуває лише додатних значень.

□ Дана властивість випливає зі способу обчислення значень функції $y=a^x$. При раціональному $x=\frac{p}{q}>0$ значення $a^x=\sqrt[q]{a^p}$ є додатним згідно з означенням арифметичного кореня q-го степеня з додатного числа. При ірраціональному $x=\alpha>0$ справджується нерівність $a^\alpha > a^{r_n} > 0$, де r_n — деяке раціональне наближення α (з недостачею при $a>1$ і з надлишком при $0<a<1$). Якщо $x=\alpha<0$, то $a^\alpha=\frac{1}{a^{-\alpha}}>0$. ■

Властивість 2. Якщо $a>1$, то $a^x>1$ при $x>0$ і $0<a^x<1$ при $x<0$. Якщо $0<a<1$, то $a^x>1$ при $x<0$ і $0<a^x<1$ при $x>0$.

□ Доведемо перше твердження спочатку для натуральних x, потім для додатних раціональних x, для додатних ірраціональних x і, нарешті, для від'ємних дійсних значень x.

Якщо $x=n\in N$, то $a^x=a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ разів}}>1$, бо $a>1$.

Якщо $x=\frac{p}{q}$, $p\in N, q\in N$, то $a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}>1$, бо $a^p>1$.

Якщо $x = \alpha$ — додатне ірраціональне число, то $a^{\alpha} > a^{r_n} > 1$, де r_n — деяке раціональне наближення α з недостачею.

Якщо $x < 0$, то $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}} < 1$, бо, за доведеним, $a^{-x} > 1$.

При $0 < a < 1$ властивість доводиться аналогічно. ■

Властивість 3. Показникова функція монотонна: при $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає в області визначення, а при $0 < a < 1$ вона спадає.

□ Істинність цього твердження випливає з властивостей степеня і з властивості 2 показникової функції: якщо $a > 1$ і $x_1 < x_2$, то $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2} < 1$, бо $x_1 - x_2 < 0$, тобто $a^{x_1} < a^{x_2}$; якщо $0 < a < 1$ і $x_1 < x_2$, то $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2} > 1$, тобто $a^{x_1} > a^{x_2}$. ■

Дослідимо поведінку показникових функцій, коли значення аргументу за модулем стають як завгодно великими.

Розглянемо таблицю 6 наближених значень функції $y = 2^x$.

Таблиця 6

x	-100	-50	-10	-5	-1	1	5	10	50	100
2^x	$7{,}89 \cdot 10^{-31}$	$8{,}88 \cdot 10^{-16}$	$9{,}77 \cdot 10^{-4}$	$3{,}13 \cdot 10^{-2}$	$0{,}5$	2	32	1024	$1{,}13 \cdot 10^{15}$	$1{,}27 \cdot 10^{30}$

Аналіз цієї таблиці показує, що із зростанням x значення функції зростають дуже швидко. При від'ємних значеннях x, коли $|x|$ стає великим, значення функції наближаються до нуля. Ця властивість функції $y = 2^x$ добре ілюструється графіком цієї функції (див. рис. 1).

Те саме можна сказати про будь-яку показникову функцію $y = a^x$ з основою $a > 1$ (рис. 5).

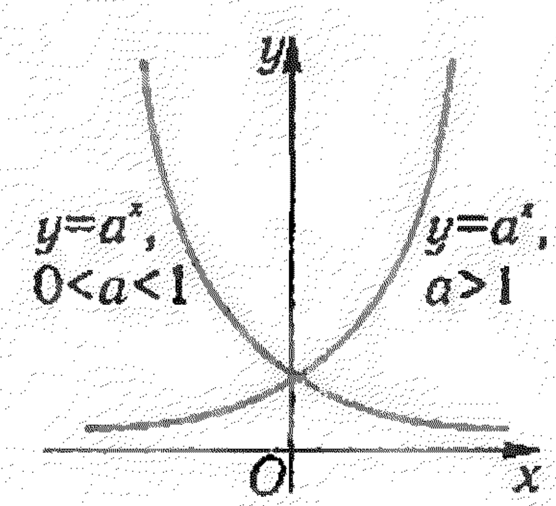


Рис. 5

Поведінку показникової функції $y = a^x$ з основою $0 < a < 1$ можна дослідити, якщо врахувати, що $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$. Оскільки $\dfrac{1}{a} > 1$, то із зростанням x значення функції наближаються до нуля. Ця властивість функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ добре ілюструється графіком цієї функції (див. рис. 2). При від'ємних значеннях x, коли $|x|$ стає достатньо великим, значення функції швидко зростають. Те саме можна сказати про будь-яку показникову функцію $y=a^x$ з основою $0<a<1$ (див. рис. 5).

Симетричність графіків функцій $y=2^x$ і $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ відносно осі y (див. рис. 1, 2) є наслідком рівності $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$. У загальному випадку для показникових функцій з основами a і $\frac{1}{a}$ має місце аналогічна властивість (див. рис. 5). Це дає можливість побудувати графік функції $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ за графіком функції $y=a^x$.

За допомогою показникових функцій описуються різні процеси і явища. Наприклад, процес розпаду радію можна описати за допомогою формули $m=m_0a^t$, де t — час, с; $m=m(t)$ — маса радію в момент часу t, г; $m_0=m(0)$ — початкова маса радію, г; a — деяке дійсне число. Залежність температури тіла T від часу t при охолодженні його в середовищі зі сталою температурою T_0 можна виразити за допомогою формули $T=T_0+(T_1-T_0)a^t$, де T_1 — початкова температура тіла. Формула складних відсотків $A_t=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ задає залежність суми A_t на рахунку вкладника банку, який нараховує за кожну одиницю часу $p\%$, від часу t. За допомогою подібних функцій описують розвиток біологічних популяцій, витрати підприємства, зростання кількості публікацій, обсягу інформації тощо.

В останніх прикладах залежність має вигляд $y=ba^{cx}$, $y=b-ca^x$, де x — аргумент, a, b, c — деякі дійсні числа. Такі функції зазвичай теж називають *показниковими*.

Приклад 5. Атмосферний тиск залежно від висоти місцевості над рівнем моря змінюється за законом $p = 1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 0{,}882^h$, де p — тиск, Па, h — висота, км.

1) Знайти атмосферний тиск на всіх рівнях — від рівня моря до рівня найвищої земної вершини – з інтервалом в 1 км.

2) На якій висоті знаходиться вершина гори, якщо атмосферний тиск на ній дорівнює $5{,}00 \cdot 10^4$ Па?

□ 1) Оскільки висота найвищої вершини на Землі не перевищує 9 км, то виконання завдання зводиться до обчислення значень даної функції при $h = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 9$.

Скориставшись калькулятором, складемо таблицю значень.

h, км	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p \cdot 10^{-4}$, Па	10,1	8,91	7,86	6,93	6,11	5,39	4,75	4,19	3,70	3,26

2) Друге завдання зводиться до розв'язування рівняння

$$1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 0{,}882^h = 5{,}00 \cdot 10^4, \text{ або } 0{,}882^h = 0{,}495.$$

Оскільки поки що у нашому розпорядженні немає методів для розв'язування подібних рівнянь, то спробуємо розв'язати його чисельно. Для цього скористаємося складеною таблицею. З неї видно, що шукана висота більша від 5 км і менша від 6 км. Якщо нас влаштовує точність в 0,5 км, то за відповідь можна взяти число 5,5. Для збільшення точності результату можна було б повторити процедуру, знайшовши значення функції в точках 5,1; 5,2; ...; 5,9. Зрозуміло, що нас не цікавить повна таблиця значень, а лише такі числа h_1 і h_2 із цієї послідовності, що 0,495 міститься між $0{,}882^{h_1}$ і $0{,}882^{h_2}$.

Число $\dfrac{h_1 + h_2}{2}$ є наближеним розв'язком рівняння з точністю, не меншою ніж 0,05, і т. д. На цьому шляху можна досягти необхідної точності результатів. ■

Відповідь. 2) $\approx 5{,}5$ км.

У прикладі 5 ми знову зустрілися з необхідністю розв'язування рівняння

$$a^x = b, \quad a > 0.$$

Існування його розв'язків не викликало сумнівів з «фізичних» міркувань. Неважко провести його повне дослідження залежно від параметрів a, b. При $b \le 0$ рівняння не має розв'язків. При

$b > 0$ існує єдиний розв'язок рівняння, що випливає з властивостей функції $y = a^x$. Зокрема, якщо $b = a^c$, то з монотонності функції $y = a^x$ випливає, що розв'язком даного рівняння є $x = c$. До рівнянь вигляду $a^x = a^c$ зводяться і деякі інші рівняння, де невідоме міститься у показнику степеня.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $4 \cdot 2^x = 1$.

□ Дане рівняння можна записати у вигляді $2^{x+2} = 2^0$. Звідси $x + 2 = 0$, або $x = -2$. ■

Відповідь. –2.

Подібні міркування проводять і при розв'язуванні нерівностей, які зводяться до найпростіших:

$$a^x > a^c \text{ або } a^x < a^c.$$

Оскільки показникові функції при $a > 1$ є зростаючими, а при $0 < a < 1$ — спадними, то нерівність $a^x > a^c$ при $a > 1$ рівносильна нерівності $x > c$, а при $0 < a < 1$ — нерівності $x < c$.

Аналогічно нерівність $a^x < a^c$ при $a > 1$ рівносильна нерівності $x < c$, а при $0 < a < 1$ — нерівності $x > c$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність: 1) $2^{3x} < 2^{x^2+2}$; 2) $0{,}5^{\frac{1}{x}} < 0{,}25$.

□ 1) Оскільки показникова функція $y = 2^t$ є зростаючою, то маємо рівносильну нерівність $3x < x^2 + 2$. Розв'язуючи квадратну нерівність $x^2 - 3x + 2 > 0$, дістанемо: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

2) Дана нерівність рівносильна нерівності $\frac{1}{x} > 2$, бо функція $y = 0{,}5^t$ є спадною і $0{,}25 = (0{,}5)^2$. Далі маємо: $\frac{1-2x}{x} > 0$, $(2x-1)x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$. ■

Відповідь. 1) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Контрольні запитання

1°. Які з наведених функцій є показниковими: а) $y=\frac{1}{2^x}$; б) $y=x^2$; в) $y=2x$; г) $y=(\sin 2)^x$; ґ) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$; д) $y=\left(1-\sqrt{3}\right)^x$; е) $y=\sqrt{x}$?

2°. Які з показникових функцій, наведених у запитанні 1, є зростаючими; спадними?

3. Чи може функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ набувати значень: а) $\sqrt{2}$; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) 1; ґ) 100 000; д) 0,00001?

4. Чи правильно, що графіки функцій $y=a^x$ і $y=b^x$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, мають тільки одну спільну точку?

5. Яке з чисел більше: 1) $2^{\frac{1}{2}}$ чи $2^{\frac{1}{3}}$; 2) $(0,5)^{\frac{1}{2}}$ чи $(0,5)^{\frac{1}{3}}$; 3) $3^{\sqrt{2}}$ чи $3^{1,5}$?

6. Який із графіків, зображених на рис. 6, є графіком функції: а) $y=2^x$; б) $y=3^x$?

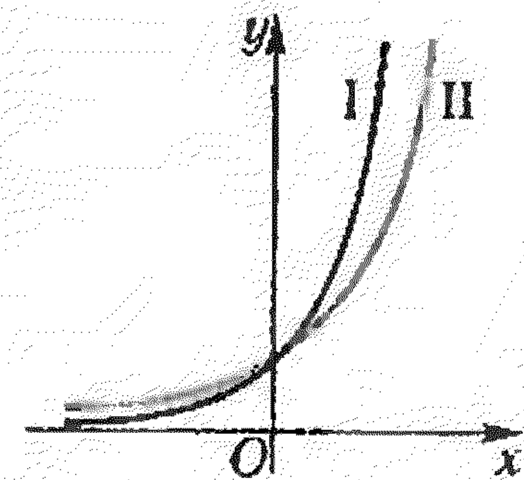


Рис. 6

7. Чи може функція $y=2^x-2$ набувати: а) від'ємних значень; б) значення $y=5$; в) значення $y=-2$?

8. Яка з функцій $y=-2^x$, $y=2^x-10$: а) зростаюча; б) спадна?

9*. При яких значеннях a показникова функція $y=(2a-1)^x$ спадає?

Задачі

1°. Обчисліть:

1) $27^{\sqrt[3]{3}}:3^{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\left(2^{\sqrt[6]{27}}\right)^{\sqrt[3]{9}}$; 3) $5^{1-2\sqrt{5}}\cdot 25^{1+\sqrt{5}}$.

2. Спростіть вираз:

1°) $x^{\sqrt{3}}\cdot x^{1-\sqrt{3}}$; 2°) $x^{\sqrt{5}-1}\cdot x^{\sqrt{5}+1}$;

3°) $y^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot y^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 4) $\left(y^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}:y^6$;

5) $m^{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{\sqrt{3}-1}$; 6) $n^{\sqrt{5}}\cdot n^{1,5}:\sqrt[4]{n^{4\sqrt{5}}}$;

7) $4^{3-2\sqrt{2}}\cdot 16^{\sqrt{2}}$; 8) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{\sqrt{3}}$; 9) $4^{1+\sqrt{5}}\cdot 2^{1-\sqrt{5}}\cdot 2^{-1-\sqrt{5}}$.

3. Послуговуючись калькулятором, обчисліть з точністю до 0,01: $2^{3,14}$ і $2^{3,15}$; $2^{3,141}$ і $2^{3,142}$.

4. Послуговуючись результатами, отриманими при розв'язуванні задачі 3, знайдіть значення 2^{π} з точністю до 0,01.

5°. Використавши графік функції $y = 2^x$ (див. рис. 1), знайдіть наближено:
1) значення функції в точках 1,5 і –1,5;
2) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює 0,4;
3) абсцису точки його перетину з прямою $y = 1,5$.

6. Користуючись графіком функції $y = 2^x$, побудуйте графіки функцій:

1°) $y = 2^{x-2}$; 2) $y = 2^{2-x}$; 3°) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$;

4°) $y = 2^{-x} - 1$; 5*) $y = 2^{|x|}$; 6*) $y = 2^{\sqrt{x^2}}$.

7. Знайдіть область визначення і множину значень функції:
1°) $y = 3^{2x} - 1$; 2) $y = 1^x$; 3*) $y = \sqrt{2^x - 1}$.

8. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на зазначеному проміжку:

1) $y = 3^{x-1}$, [2; 4]; 2) $y = 2^{-x}$, [–1; 2];

3*) $y = 3^{1-2x}$, [–1; 1]; 4*) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$, [–2; 2].

9. Дано функцію $y = 0,3 \cdot (1,5)^{2x-1} - 0,45$.
1°) За допомогою калькулятора складіть таблицю її значень на відрізку [–3; 3] з кроком 0,5.
2) Побудуйте її графік.
3) Знайдіть точки, в яких графік функції перетинає осі координат.
4) При яких значеннях аргументу x значення функції будуть відрізнятися від – 0,45 не більше, ніж на 0,2?

10°. Швидкість занурення тіла в рідину описується формулою $v = 2,5(1 - 2,7^{-1,5t})$, де v — швидкість, м/с; t — час, с.
1) Знайдіть швидкість тіла через 10 с і 20 с після початку занурення.
2) На скільки зміниться швидкість за перші 10 с занурення? За наступні 10 с?

11. При радіоактивному розпаді кількість речовини зменшується вдвічі за добу. Скільки речовини залишиться від 250 г через 1,5 доби? 3,5 доби? 100 діб?

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 2) $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 9$; 3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

13. Розв'яжіть нерівність:

1) $(0,5)^x > 1$; 2) $3^x < 9$; 3) $2^{3x} \ge \frac{1}{2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \le 3$.

14. Дано вираз $f(x) = \left(2^x + 2^{-2x}\right)^2 - \left(2^x - 2^{-2x}\right)^2$.

1°) Доведіть, що $f(x) = 2^{-x+2}$.

2°) Обчисліть $f(1{,}5)$, $f(1)$, $f(-1)$.

3°) В яких точках графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь y, вісь x, пряму $y = 2$?

4°) Знайдіть область визначення, множину значень функції $y = f(x)$, побудуйте її графік.

5) Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[-1; 2]$.

6) При яких значеннях x справджуються співвідношення: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $f(x) > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$?

7*) При яких значеннях a має розв'язки рівняння $f(x) = \frac{a-1}{2}$?

8*) Знайдіть множину значень функції $y = -3f\left(2x-1\right)$.

15. Дано вираз $f(x) = \left(3^x + 3^{-2x}\right)^2 - \left(3^x - 3^{-2x}\right)^2 - 3^{-x}$.

1°) Доведіть, що $f(x) = 3^{-x+1}$.

2°) Обчисліть $f(0{,}5)$, $f(2)$, $f(-2)$.

3°) В яких точках графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь y, вісь x, пряму $y = \frac{1}{3}$?

4°) Знайдіть область визначення, множину значень функції $y = f(x)$, побудуйте її графік.

5) Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[-2; 1]$.

6) При яких значеннях x справджуються співвідношення: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; $f(x) > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$?

7) При яких значеннях a має розв'язки рівняння $f(x) = \frac{a-1}{3}$?

8*) Знайдіть множину значень функції $y = -2f(-x+1)+1$.

Вправи для повторення

16°. Замініть дробом степінь з цілим від'ємним показником:

1) 5^{-3}; 2) 8^{-2}; 3) a^{-1}; 4) c^{-10};

5) $(mn)^{-4}$; 6) $(a-1)^{-6}$; 7) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$; 8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

17°. Замініть дріб степенем з цілим від'ємним показником:

1) $\frac{1}{5^3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{a^5}$; 4) $\frac{1}{b^4}$;

5) $\frac{1}{9}$; 6) 0,001; 7) 0,1; 8) 0,01.

18. Порівняйте числа:

1) 3^{-21} і $\left(\frac{1}{3}\right)^{-21}$; 2) 3^{-21} і 4^{-21}; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{21}$ і 3^{-21}.

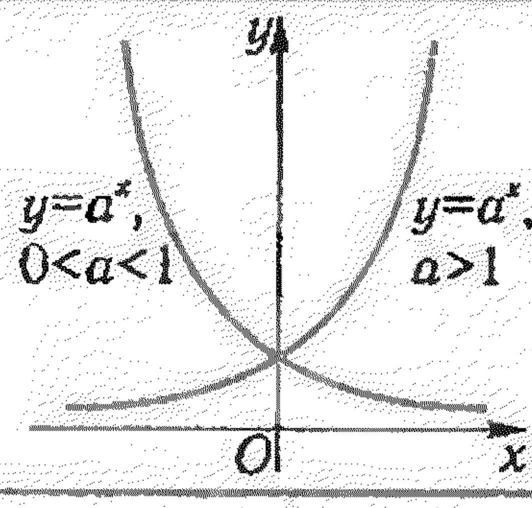
19°. Обчисліть:

1) $3^{-4} \cdot 3^{3}$; 2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-5} \cdot (1{,}25)^{4}$; 3) $\left(\sqrt{3}\right)^{-7} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{3}$;

4) $11^{0} \cdot 11^{-2}$; 5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$.

Підсумок

Основне поняття

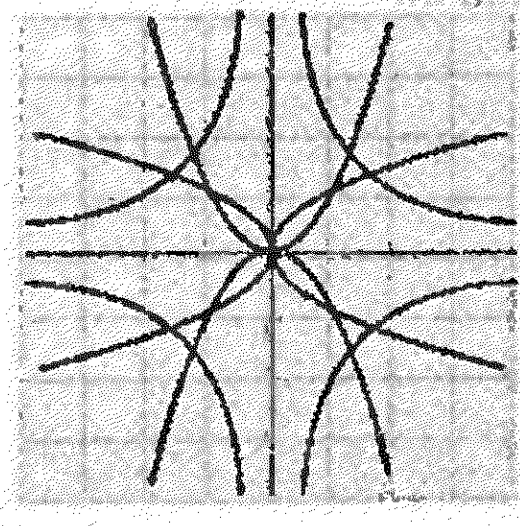
Означення	Геометрична інтерпретація
Функцію, яку задано формулою $y = a^x, x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, називають ***показниковою***.	

Властивості показникової функції

	$y = a^x$, $0 < a < 1$	$y = a^x$, $a > 1$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	
Парність	Ні парна, ні непарна	
Нулі	Нулів не має	
Монотонність	Спадає	Зростає
Множина значень	$(0; +\infty)$	
Неперервність	Неперервна в області визначення	
Найбільше і найменше значення	Не має	

Деякі застосування показникової функції

Процес	Формула, якою він описується
Процес розпаду радію	$m = m_0 a^t$
Зростання банківських вкладів	$A_t = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$



§2. Логарифми та їхнє застосування

У цьому параграфі розглядається нова операція, за допомогою якої знаходиться розв'язок рівняння $a^x = b$. Це значно розширює можливості у дослідженні процесів та явищ, що описуються показниковими функціями.

1. Логарифми та їхні властивості

Розглянемо задачу про знаходження показника степеня x за значеннями степеня $a^x = b$ і основи a, тобто рівняння $a^x = b$. У найпростіших випадках її розв'язати нескладно. Наприклад, якщо $5^x = \frac{1}{25}$, то $x = -2$; якщо $3^x = \sqrt{3}$, то $x = \frac{1}{2}$. У загальному випадку розв'язання зазначеної задачі потребує введення нового поняття.

Умови, за яких рівняння $a^x = b$ має розв'язок, випливають із властивостей показникової функції $y = a^x$. Множиною її значень при $a \neq 1$ є проміжок $(0;+\infty)$, і кожного свого значення функція набуває лише в одній точці, оскільки вона є монотонною функці-

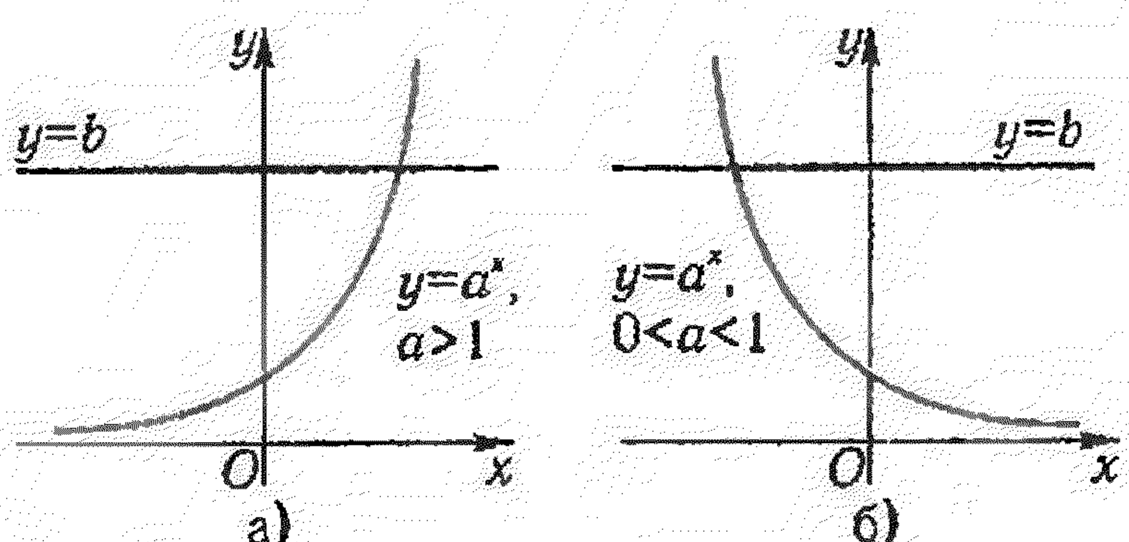


Рис. 7

єю (рис. 7). Тому при $b>0$ розв'язок рівняння $a^x=b$ існує, і він лише один. Ці міркування приводять до означення ***логарифма***.

Логарифмом числа $b>0$ за основою a, де $a>0$, $a\neq 1$, називається таке число c, що $a^c=b$.

Інакше кажучи, логарифм числа b за основою a — це показник c, до якого треба піднести a, щоб одержати b. Символічно це записують так: $c=\log_a b$ (читається: логарифм числа b за основою a).

Оскільки логарифм числа b за основою a — розв'язок рівняння $a^x=b$, то маємо рівність

$$a^{\log_a b}=b.$$

Її ще називають ***основною логарифмічною тотожністю.***

Зазначимо, що логарифми від'ємних чисел не існують, оскільки при від'ємних значеннях b рівняння $a^x=b$ розв'язків не має.

Логарифм *– від грецьких λογος (logos) – слово, вчення, розум, відношення і αριθμος (arithmos) – число, лічба, номер.*

Приклад 1. Знайти: 1) $\log_2 32$; 2) $\log_3 \frac{1}{9}$; 3) $\log_4 2$; 4) $\log_{10} 1$; 5) $5^{\log_5 23}$.

□ 1) За означенням логарифма, $\log_2 32$ – це таке число x, що $2^x=32$. Рівняння $2^x=32$ має єдиний розв'язок $x=5$, який легко знайти шляхом підбору ($2^5=32$). Тобто $\log_2 32=5$.

2) Аналогічно, $\log_3 \frac{1}{9}=-2$; оскільки $3^{-2}=\frac{1}{9}$.

3) $\log_4 2=\frac{1}{2}$, оскільки $4^{\frac{1}{2}}=2$.

4) $\log_{10} 1=0$, оскільки $10^0=1$.

5) За основною логарифмічною тотожністю, маємо: $5^{\log_5 23}=23$. ■

Відповідь. 1) 5; 2) – 2; 3) 0,5; 4) 0; 5) 23.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_3(5x-1)=2$.

□ За означенням логарифма, дане рівняння приводиться до вигляду: $5x-1=3^2$, або $5x=10$. Звідси $x=2$. ■

Відповідь. 2.

Численні застосування логарифмів ґрунтуються на їхніх властивостях, які випливають із означення логарифма і властивостей степенів із дійсними показниками.

Властивість 1. Логарифм 1 за основою a, де $a > 0$, $a \neq 1$, дорівнює 0:

$$\log_a 1 = 0.$$

Властивість 2. Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів співмножників:
якщо $b > 0$, $c > 0$, то $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Властивість 3. Логарифм частки при діленні додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника:

якщо $b > 0$, $c > 0$, то $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Властивість 4. Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи:
якщо $b > 0$, то $\log_a b^p = p\log_a b$.

Приклад 3. Обчислити: 1) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$; 3) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$; 4) $\log_2 8\sqrt{2}$; 5) $\log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{3}}$.

☐ 1) За властивістю логарифма добутку додатних чисел, маємо: $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12}(2 \cdot 72) = \log_{12} 144 = 2$, бо $12^2 = 144$.

2) За властивістю логарифма частки при діленні додатних чисел, маємо: $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2$.

3) За властивістю логарифма степеня додатного числа, маємо:

$$\log_{11} \sqrt[3]{121} = \log_{11} 11^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_{11} 11 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

4) За властивостями логарифма добутку додатних чисел і логарифма степеня, маємо: $\log_2 8\sqrt{2} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

5) За властивостями логарифма частки при діленні додатних чисел і логарифма степеня, маємо: $\log_3 \frac{27}{\sqrt[3]{3}} = \log_3 27 - \log_3 \sqrt[3]{3}$ $= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$. ■

Відповідь. 1) 2; 2) 2; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{2}$; 5) $\frac{8}{3}$.

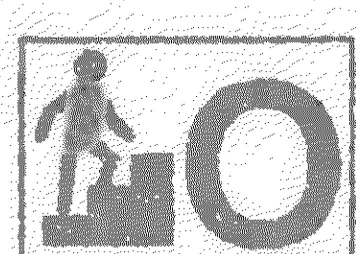
У математиці широкого застосування набули логарифми за основами 10 і 2.

Логарифми за основою 10 називають десятковими і позначають $\lg b$ (замість $\log_{10} b$). Їхнє введення пов'язане з широким застосуванням десяткової системи числення.

Логарифми за основою 2 використовують при обробці даних у різних галузях знань.

Широко вживаються також логарифми за основою, яка знаходиться між числами 2 і 3. Походження і значущість цієї основи ми пояснимо у наступних розділах. Це число є ірраціональним, наближено воно дорівнює 2,718. Його зазвичай позначають через *e*.

Логарифми за основою e називають натуральними і позначають через $\ln b$ (замість $\log_e b$). Їхнє поширення пов'язане з широким застосуванням показникової функції за основою *e*.



Властивості, наведені раніше, можна обґрунтувати, користуючись основною логарифмічною тотожністю і властивостями степенів з дійсними показниками. Доведемо, наприклад, властивість 2.

Доведення властивості 2:

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, якщо $b > 0$, $c > 0$.

□ Застосовуючи основну логарифмічну тотожність і властивості степеня, маємо:

$$a^{\log_a bc} = bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Рівність степенів числа a, $a \neq 0$, $a \neq 1$, приводить завдяки монотонності показникової функції $y = a^x$ до рівності показників. Таким чином, властивість доведено. ■

Більшість калькуляторів дають змогу знаходити значення десяткових і натуральних логарифмів. Якщо ж потрібно обчислити логарифм за іншою основою, то слід скористатися так званою формулою переходу до нової основи.

Властивість 5 (*формула переходу до іншої основи*). **Для довільних додатних a, b, c, $a \neq 1$, $c \neq 1$, справджується рівність:**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

□ Доведення подамо у вигляді ланцюжка рівностей:

$$\log_a b = \frac{\log_a b \log_c a}{\log_c a} = \frac{\log_c a^{\log_a b}}{\log_c a} = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \ \blacksquare$$

Наслідок. **Якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a \neq 1$, $b \neq 1$, то $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.**

Наведені вище властивості дають змогу спрощувати вирази і обчислення.

Приклад 4. Обчислити $\log_{81} 243$.

□ Оскільки $81 = 3^4$, $243 = 3^5$, то $\log_{81} 243 = \dfrac{\log_3 243}{\log_3 81} = \dfrac{5}{4}$. ■

Відповідь. $\dfrac{5}{4}$.

Іноді доводиться відтворювати число або вираз за його логарифмом. Таку операцію називають ***потенціюванням***, і вона ґрунтується на такому очевидному твердженні: якщо $\log_a x = \log_a y$, то $x = y$ (еквівалентно тому, що із $k = l$ випливає $a^k = a^l$).

Потенціювання *— від німецького potenzieren — підносити до степеня; в його основі лежить латинське potentia — здатність, сила.*

Використовувати властивості 1–5 під час перетворення виразів з логарифмами слід дуже обережно, обов'язково перевіряючи виконання умов, за яких вони справджуються. У супротивному випадку можна одержати неправильний результат. Наприклад, $\lg a^2 = 2\lg a$ лише при $a > 0$.

Приклад 5. Розв'язати наближено рівняння $(0,9)^x = 0,5$.

☐ Згідно з означенням логарифма, $x = \log_{0,9} 0,5$. Перейдемо до десяткових логарифмів, застосувавши властивість 5:

$$x = \log_{0,9} 0,5 = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,9}.$$

Скориставшись калькулятором, одержимо $x \approx 6,6$. ■

Відповідь. $\approx 6,6$.

Наведене у прикладі 5 рівняння виникло при розв'язуванні задачі про витікання води (§ 1, приклад 3). Тепер ми можемо дати відповідь на поставлене там запитання: потрібно близько 6,6 одиниць часу для того, щоб кількість води у резервуарі зменшилась удвічі.

✓ Контрольні запитання

1°. Чи має розв'язки рівняння: а) $3^x = 0,001$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1000$; в) $10^x = -1$; г) $5^x = 0$; ґ) $1^x = 2$; д) $(0,0003)^x = 1$?

2°. Як записати за допомогою степеня з основою 10 число: а) 10 000; б) 0,0001; в) 3; г) 0,3?

3. Чому дорівнює:

1°) $\log_2 16$; 2°) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3°) $\log_3 \frac{1}{3}$;

4°) $\log_a 1, a > 0, a \neq 1$; 5°) $\log_{\frac{1}{5}} 125$;

6°) $\log_5 \frac{1}{125}$; 7) $\log_a \frac{1}{a}, a > 0, a \neq 1$;

8) $\log_{\frac{1}{a}} a, a > 0, a \neq 1$?

4. Який знак має число: а) $\log_5 2$; б) $\ln 5$; в) $\ln 0,1$; г) $\log_{0,1} 2$?

5. Чому дорівнює значення виразу: а) $10^{\lg 2+1}$; б) $100^{-3\lg 2}$; в) $e^{2\ln e}$?

6. Як подати число 5 у вигляді степеня 10; e; 2?

7. Чи завжди правильною є рівність:

а) $\ln b^2 = 2\ln b$; б) $\log_2(bc) = \log_2 b + \log_2 c$;

в) $\lg b^4 = 2\lg b^2$; г) $\ln a^5 = 5\ln a$?

8. Яке з чисел більше:
   а) $\log_2 3$ чи $\log_2 6$; б) $\log_3 0{,}1$ чи $\log_3 0{,}6$;
   в) $\log_{0,2} 3$ чи $\log_{0,2} 2$; г) $\log_2 3$ чи $\log_3 2$?

2. Властивості та графік логарифмічної функції

Визначивши поняття логарифма числа за основою a, ми навчились зіставляти з кожним додатним числом x його логарифм $\log_a x$. Інакше кажучи, ми ввели функцію

$$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,$$

яку називають ***логарифмічною.***

Областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел.

Графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ проходить через точку з координатами (1; 0), бо $\log_a 1 = 0$. Ця точка симетрична точці з координатами (0; 1), через яку проходить графік довільної показникової функції $y = a^x$. Зазначені точки симетричні відносно прямої $y = x$. Виявляється, що графіки функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$ симетричні один одному відносно прямої $y = x$.

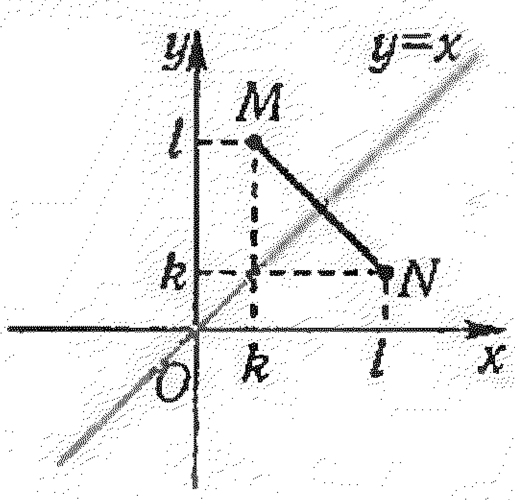


Рис. 8

Справді, якщо точка $M(k; l)$ належить графіку функції $y = a^x$, то $l = a^k$. Але тоді $k = \log_a l$ і точка $N(l; k)$ належить графіку функції $y = \log_a x$. Оскільки точки $M(k; l)$ і $N(l; k)$ симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 8), то симетричні і графіки показникової та логарифмічної функцій.

Ґрунтуючись на наведених міркуваннях, можна побудувати графік логарифмічної функції. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = \log_2 x$, побудуємо спочатку графік функції $y = 2^x$, а потім відобразимо його симетрично відносно прямої $y = x$ (рис. 9). Схожі графіки мають логарифмічні функції з основою, більшою від 1 (рис. 10).

Аналогічно будується графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (рис. 11). Схожі графіки мають логарифмічні функції з основою $0 < a < 1$ (рис. 12).

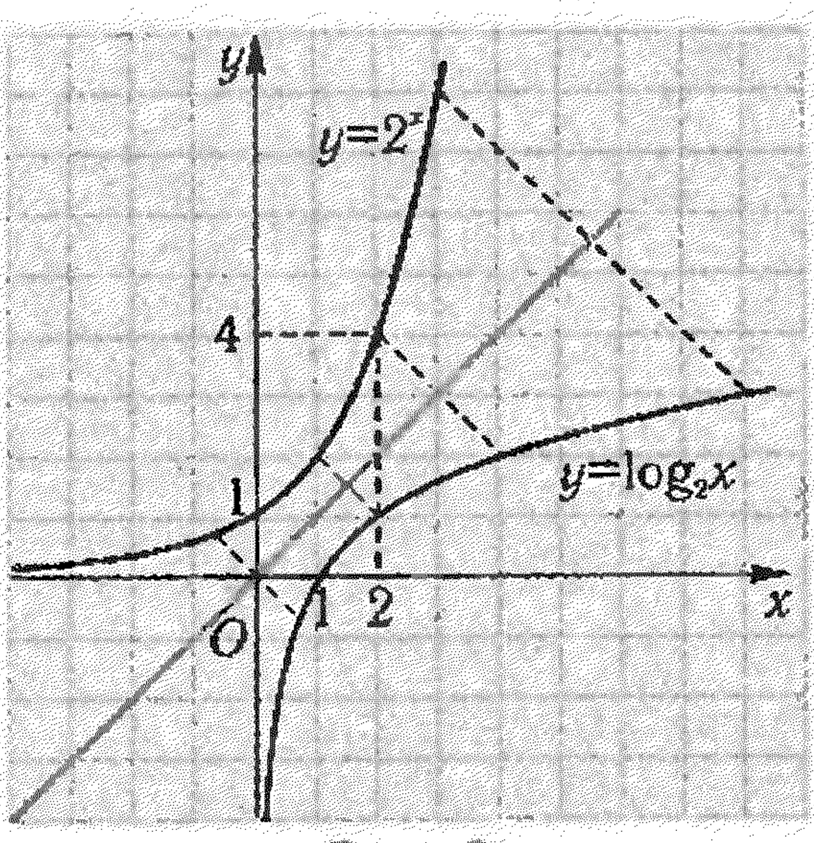


Рис. 9

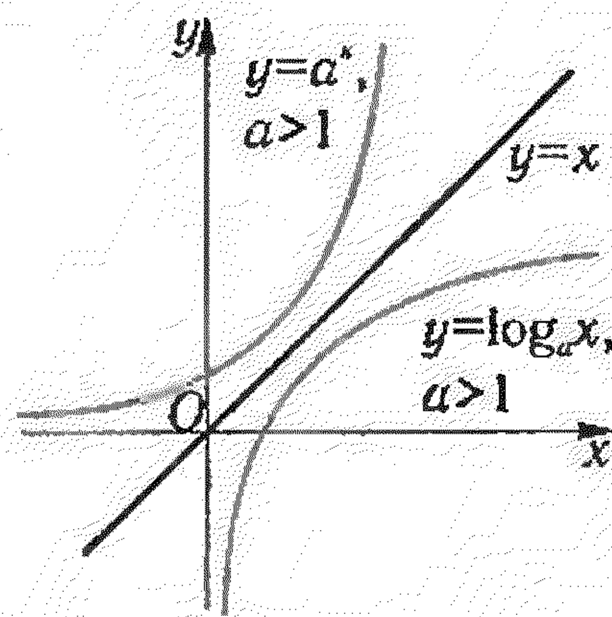


Рис. 10

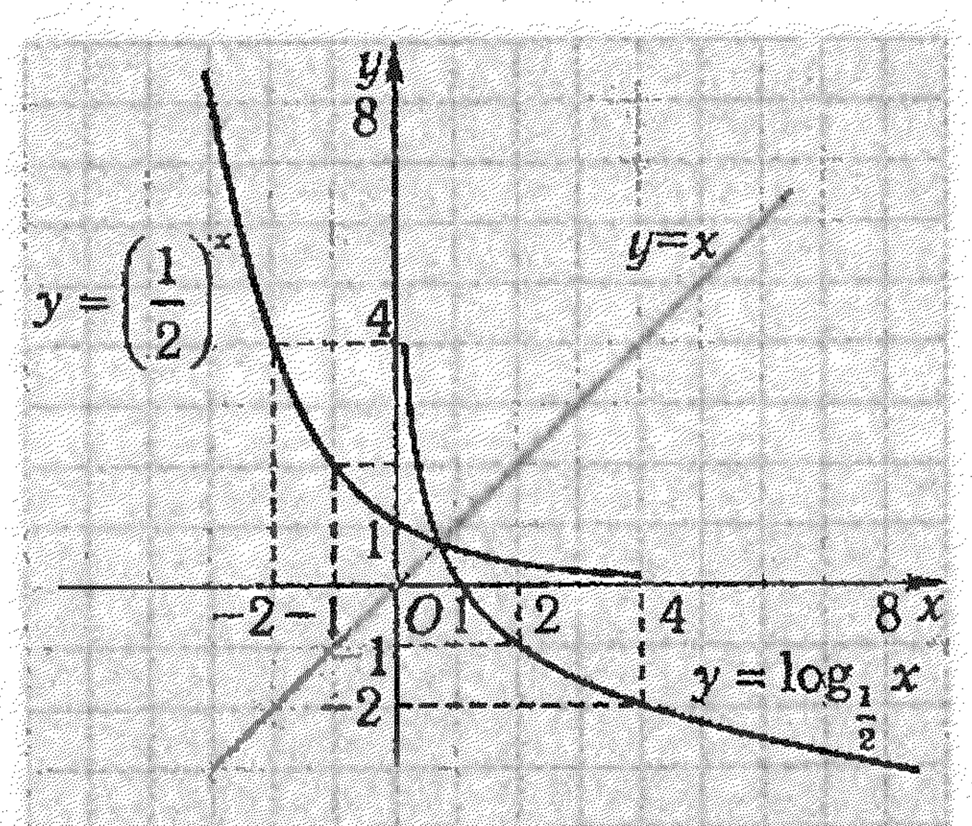


Рис. 11

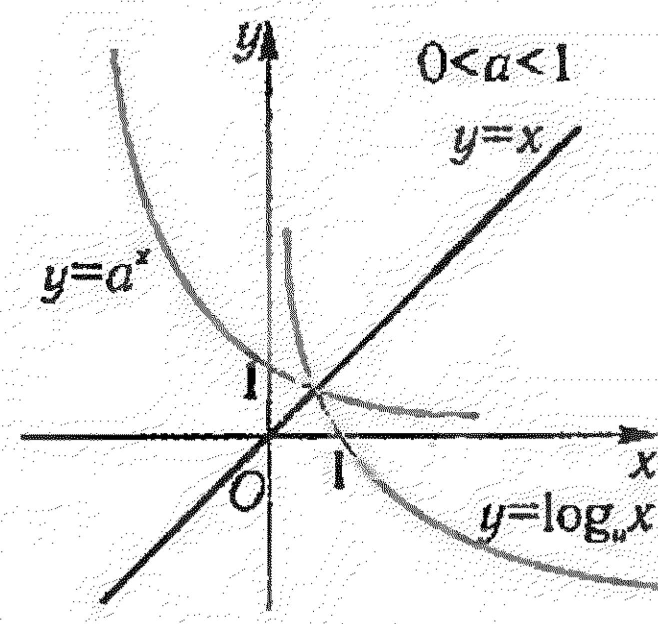


Рис. 12

Аналізуючи графіки логарифмічних функцій, можна дійти висновку, що множиною їхніх значень є множина всіх дійсних чисел, що при $a > 1$ функції зростаючі, а при $0 < a < 1$ — спадні. На рис. 13 зображено графіки логарифмічних функцій з різними основами, більшими від 1.

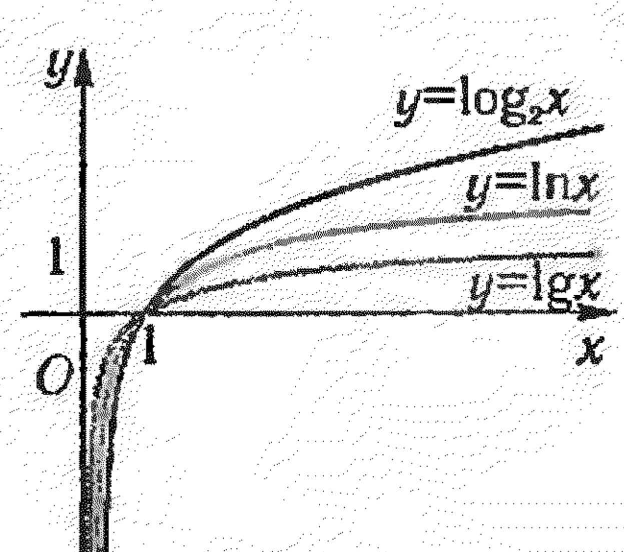


Рис. 13

Приклад 6. Дано функцію $y=\log_3(x+3)$.

1) Знайти її область визначення.

2) Знайти точки перетину з осями координат.

3) Побудувати її графік.

4) Чи проходить графік цієї функції через точку $A(3;1)$; $B\left(-\frac{8}{3};-1\right)$?

5) Скільки розв'язків має рівняння $\log_3(x+3)=x^2$?

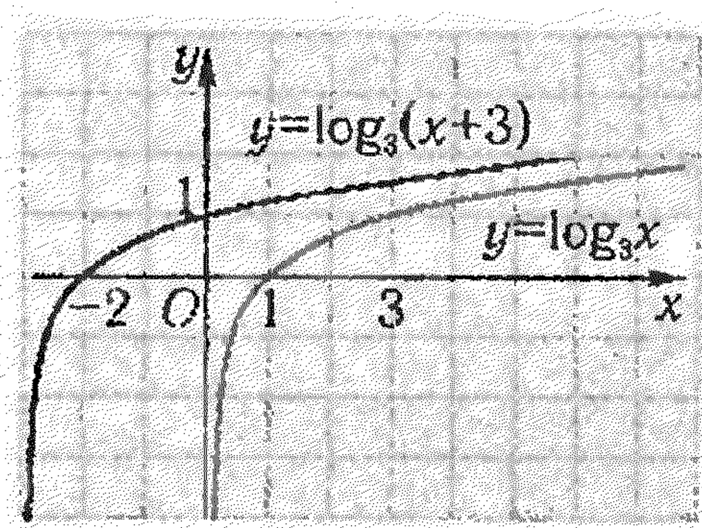


Рис. 14

☐ 1) Область визначення даної функції визначається нерівністю $x+3>0$. Звідси $x>-3$, тобто $D(y)=(-3;+\infty)$.

2) Щоб знайти точку перетину графіка з віссю y, знайдемо значення функції при $x=0$: $y(0)=\log_3(0+3)=1$. Отже, графік функції перетинає вісь y у точці з координатами $(0;1)$. Щоб знайти точку перетину графіка з віссю x, знайдемо, при яких значеннях x функція набуває значення 0: $\log_3(x+3)=0$; $x+3=3^0$; $x+3=1$; $x=-2$. Отже, графік функції перетинає вісь x у точці з координатами $(-2;0)$.

3) Графік функції можна побудувати із графіка функції $y=\log_3 x$ паралельним перенесенням останнього на 3 одиниці у від'ємному напрямі осі абсцис (рис. 14).

4) Щоб перевірити, чи проходить графік функції через точку $A(3;1)$, знайдемо значення функції в точці $x=3$: $y(3)=\log_3(3+3)=\log_3 6\neq 1$. Отже, графік функції не проходить через точку A. Аналогічно, $y\left(-\frac{8}{3}\right)=\log_3\left(-\frac{8}{3}+3\right)=\log_3\frac{1}{3}=-1$.

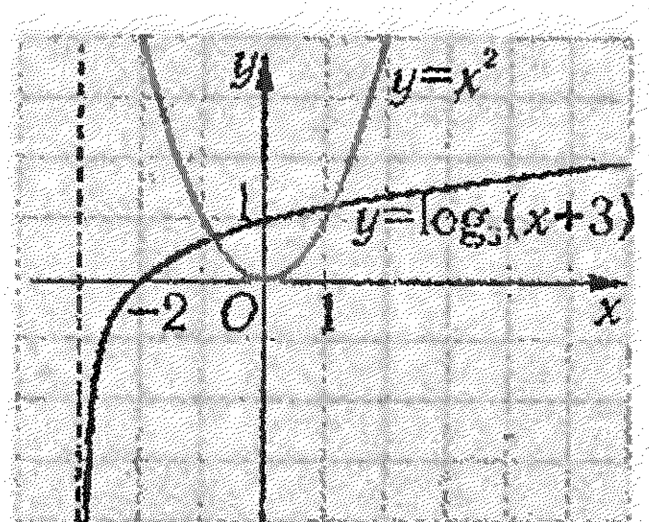


Рис. 15

Графік функції проходить через точку B.

5) Для відповіді на запитання потрібно встановити, у скількох точках перетинаються графіки функцій $y=\log_3(x+3)$ і $y=x^2$. Вони перетинаються у двох точках (рис. 15). Відтак рівняння має два корені. ■

Відповідь. 1) $(-3;+\infty)$; 2) $(0;1)$, $(-2;0)$; 4) через точку A не проходить, через точку B проходить; 5) два корені.

Обґрунтуємо властивості логарифмічної функції, наведені вище.

Властивість 1. Якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ набуває додатних значень при $x > 1$ і від'ємних при $0 < x < 1$.

Якщо $0 < a < 1$, то то функція $y = \log_a x$ набуває додатних значень при $0 < x < 1$ і від'ємних при $x > 1$.

□ Справді, нехай $a > 1$, $x > 1$. Рівність $y = \log_a x$ можна записати у вигляді: $x = a^y$. Із властивостей показникової функції (див. §1) випливає, що $y > 0$, тобто $\log_a x > 0$. Аналогічно доводяться інші сформульовані твердження. ■

Властивість 2. Логарифмічна функція є зростаючою, якщо $a > 1$, і спадною, якщо $0 < a < 1$.

□ Спочатку розглянемо випадок $a > 1$. Нехай $0 < x_1 < x_2$. Доведемо, що $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Згідно з властивістю 3 логарифмів, $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$. Оскільки $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$, то, на підставі властивості 1, $\log_a \frac{x_1}{x_2} < 0$, тобто $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Випадок $0 < a < 1$ розглядається аналогічно. Радимо це зробити самостійно. ■

Властивість 3. Множина значень функції $y = \log_a x$ збігається з множиною всіх дійсних чисел.

□ Потрібно довести, що будь-яке дійсне число y може бути логарифмом деякого числа x. Оскільки степінь a^y визначений при будь-якому y, то, поклавши $x = a^y$, одержимо: $\log_a a^y = y$, що і треба було довести. ■

Говорячи про застосування логарифмічних функцій, треба мати на увазі те, що потреба в них найчастіше виникає там, де використовують показникові функції. Наприклад, нехай залежність атмосферного тиску від висоти місцевості над рівнем моря описана за допомогою показникової функції, як в прикладі 5 § 1, тоді висота над рівнем моря визначається через атмосферний тиск за допомогою логарифмічної функції.

Крім того, за допомогою логарифмічних функцій моделюються деякі реальні процеси і явища: залежність швидкості ракети v від її маси m задається формулою $v = v_г \ln\frac{m_0}{m}$, де $v_г$ — швидкість газів, що вилітають, m_0 — стартова маса ракети; залежність коефіцієнта D звукоізоляції стін від тиску p звуку, що пройшов через стіну, задається формулою $D = A\lg\frac{p_0}{p}$, де p_0 — тиск звуку до поглинання, A — деяка стала.

Логарифмічна функція застосовується в сейсмології. Наприклад, магнітуда об'ємних хвиль (показник землетрусу) обчислюється за формулою $m_b = \lg\frac{A}{T} + Q(D,h)$, де A — амплітуда коливань землі (у мікрометрах), T — період хвилі (у секундах), і Q — поправка, яка залежить від відстані до епіцентра D і глибини осередку землетрусу h.

Контрольні запитання

1°. Чи перетинає графік функції $y = \log_a x$: а) вісь x; б) вісь y?

2°. Чи проходить графік функції $y = \log_{0,2} x$ через точку з координатами (5; 1)?

3°. При яких значеннях x графік функції $y = \log_{0,5} x$ проходить вище від осі абсцис?

4°. Який знак має число: а) $\log_{0,5}3$; б) $\log_{0,5}\frac{1}{3}$; в) $\log_5 3$?

5°. Що більше: 1 чи $\log_{0,5} 0,7$?

6°. Якою є область визначення функції: а) $y = \lg(x-1)$; б) $y = \lg(-x)$?

7. Як розміщені один відносно одного графіки функцій:

а) $y = \log_2 x$ і $y = 2^x$; б) $y = \log_2 x$ і $y = -\log_2 x$;

в) $y = \log_2 x$ і $y = \log_2(-x)$?

8. Чи збігаються графіки функцій:

а) $y = \frac{1}{x}$ і $y = 2^{\log_2 \frac{1}{x}}$; б) $y = \lg x^2$ і $y = 2\lg x$;

в) $y = \log_2 2^x$ і $y = x$?

9. При яких значеннях x має зміст вираз:

а) $\sqrt{x \cdot \ln 0{,}5}$; б) $\sqrt{1 - \log_2 x}$; в*) $\sqrt{\dfrac{x}{\ln x}}$?

10*. При яких значеннях a функція $y = \log_{3a+1} x$ спадає?

11. Графік якої функції одержимо, якщо графік функції $y = \log_{0,5} x$ перенесемо на дві одиниці паралельно у додатному напрямі осі x?

Задачі

20°. Обчисліть:

1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 1$; 3) $\log_2 \dfrac{1}{8}$; 4) $\log_2 \sqrt[3]{4}$;

5) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 6) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$; 7) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 8) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{27}$;

9) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; 10) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{\sqrt[3]{3}}{9}$.

21°. Заповніть порожні клітини таблиці.

$\log_a b$	–4	0			–5	–2	0,5	3		
a	2	3	5	$\dfrac{1}{3}$			9		0,1	e
b			0,04	27	$\dfrac{1}{32}$	81		8	100	$\dfrac{1}{e^2}$

22°. Знайдіть значення виразу:

1) $3^{\log_3 12}$; 2) $10^{\lg 3}$; 3) $e^{\ln 5}$;

4) $(0{,}2)^{\log_{\frac{1}{5}} 7}$; 5) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{0,25} 9}$.

23°. Обчисліть:

1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\log_{\frac{1}{2}} 5}$; 3) $5^{\frac{1}{2}\log_5 7}$; 4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0,25\log_{\frac{1}{3}} 16}$.

24. Обчисліть:

1) $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 5}$; 4) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\log_4 3}$.

25. Знайдіть x, якщо:

1) $\log_x 3 = 2$; 2) $\log_x 5 = \frac{1}{2}$; 3) $\log_{\sqrt{x}} 7 = 2$; 4) $\log_{\sqrt[3]{x}} 6 = 4$.

26°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_2 (5 - x) = 3$;

3) $\log_3 (x + 2) = 3$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -2$.

---

27. Знайдіть значення виразу:

1°) $\log_3 2{,}7 + \log_3 10$; 2°) $\lg 12 - \lg 1{,}2$; 3°) $\log_a a^5$;

4) $\log_{0,5}\left(\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{2}\right)$; 5) $\log_{0,5} \frac{12{,}5}{100}$; 6°) $\log_a \sqrt[4]{a^3}$.

28. Обчисліть:

1) $\frac{\lg 25}{\lg 5}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 3}$; 3) $\frac{\log_7 \frac{25}{4}}{\log_7 2{,}5}$;

4) $(\log_{\sqrt{2}} 5)(\log_5 2)$; 5) $\log_{\sqrt{3}} 2 + \log_3 2{,}25$.

29. Обчисліть за допомогою калькулятора з точністю до 0,001:

1°) $\lg 17$; 2°) $\lg 127$; 3°) $\ln 2{,}9$;

4°) $\ln 0{,}72$; 5) $\log_3 42$; 6) $\log_{0,25} 6{,}2$.

30. Знайдіть з точністю до 0,001 розв'язки рівняння:

1) $2^x = 5$; 2) $1{,}2^x = 4$; 3) $1 + e^{0,2x} = 5$;

4) $2^{3x-1} = 5$; 5) $4 \cdot 3^{\frac{2}{x}} = 1{,}3$; 6) $3^{x^2-2} = 2$.

31. Спростіть даний вираз і обчисліть з точністю до 0,001 за допомогою калькулятора його значення при $x = 1{,}21$:

1) $2\lg 100x^4 - 3\lg \frac{x}{10}$; 2) $\log_3 \sqrt{x} + \log_3 27x^2$;

3) $0{,}5\ln x^3 + 2\ln \frac{x}{e} - \ln(e^2 x)$.

32°. Дано вираз $f(x) = 3\lg 1000x^3 - 2\lg \frac{x}{100}$.

1) Доведіть, що $f(x) = 10 + 7\lg x$.

2) Обчисліть значення виразу при $x = 0{,}01$; $1{,}2$.

3) При якому значенні x справджується рівність $f(x) = 3$?

33. Швидкість занурення тіла в рідину описується за допомогою формули $v = 2{,}5(1 - 2{,}7^{-1{,}5t})$, де v — швидкість, м/с; t — час, с.
1) Через скільки секунд після початку занурення швидкість дорівнюватиме 2,2 м/с?
2) Через скільки секунд швидкість тіла становитиме 95% від максимальної?

34. Конструкція вакуум-насоса розрахована на відкачку за один хід поршня з камери 3% газу від тієї кількості, що була в камері перед цим ходом поршня. Скільки таких рухів треба зробити, щоб відкачати з камери 99% газу?

35. Кількість осіб біологічної популяції протягом кожної одиниці часу збільшується на 8 % по відношенню до попередньої одиниці часу. Через скільки одиниць часу чисельність популяції подвоїться?

36. Тиск повітря спадає із зростанням висоти (при сталій температурі) за законом $p = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$, де p_0 — тиск на рівні моря ($h = 0$), p — тиск на висоті h, H — деяка константа, яка залежить від висоти. Знайдіть формулу для обчислення висоти залежно від тиску.

37. Знайдіть область визначення функції $y = f(x)$:
1°) $f(x) = \log_3(x+3)$; 2°) $f(x) = \lg(x^2+1)$;
3°) $f(x) = \log_{0,3}(1-x^2)$; 4) $\lg\left(2^x - 1\right)$;
5) $f(x) = \sqrt{\log_{0,5} x}$; 6°) $f(x) = a^{\log_2 x}$;
7) $f(x) = \lg\lg x$.

38°. Визначте знак числа:
1) $\log_5 3$; 2) $\log_3 0{,}9$; 3) $\log_{0,7} 8$; 4) $\log_{0,3} 0{,}6$.

39. Порівняйте числа:
1) $\log_5 \frac{9}{10}$ і $\log_5 \frac{10}{11}$; 2) $\log_3 \sqrt{7}$ і $\log_3 2{,}6$;
3) $\log_{0,2} 4{,}21$ і $\log_{0,2} 4{,}19$; 4) $\log_{0,9} e$ і $\log_{0,9} \pi$.

40. Розмістіть числа a, b, c у порядку зростання:
1) $a = 2^{-0,5}$; $b = 2\cos\frac{\pi}{2}$; $c = \log_{0,1} 2$; 2) $a = \sqrt[10]{1{,}1}$; $b = \mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}$; $c = \log_2 5$.

41. Розв'яжіть нерівність:

1°) $\log_5 x > \log_5 3$; 2°) $\log_{\frac{1}{5}} x \le \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$; 3) $\log_3 x < \log_3 2$;

4) $\log_{16} x \ge \frac{1}{2}$; 5) $\log_9 x^2 > 1$; 6) $\log_{\frac{1}{9}} x^2 \ge 1$.

42. Знайдіть усі значення x, за яких збігаються графіки функцій:

1) $f(x) = 2^{\log_2 x}$ і $g(x) = x$; 2) $f(x) = 10^{\lg x^2}$ і $g(x) = x^2$;

3) $f(x) = \log_{x^2} 3$ і $g(x) = 0{,}5\log_{|x|} 3$;

4) $f(x) = \dfrac{\log_x 2}{\log_x 5}$ і $g(x) = \log_5 2$.

43. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на даному проміжку:

1) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $x \in [1; 4]$; 2) $f(x) = \log_3 x$, $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

44. Маючи графік функції $y = \log_3 x$, побудуйте графік функції:

1°) $y = 2\log_3 x$; 2°) $y = \log_3 x + 3$;

3°) $y = \log_3(x+3)$; 4) $y = -\frac{1}{2}\log_3(x+3)$;

5) $y = 1 + \log_3(-x)$.

45. Дано функцію $y = \log_2(x+1)$.

1°) Знайдіть її область визначення і множину значень.

2°) Знайдіть точки перетину графіка функції з осями координат.

3°) Побудуйте її графік.

4°) Чи проходить графік цієї функції через точку $A(3; 2)$; $B\left(-\frac{3}{4}; 2\right)$?

5) Скільки розв'язків має рівняння $\log_2(x+1) = x - 1$?

Вправи для повторення

46. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій:

1) $y = x + 2$ і $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = x^2 + 6$ і $y = 7x - 4$;

3) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ і $y = 2$.

47. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{1}{-3+2x}<0$; 2) $3x^2-2x-1\le 0$;

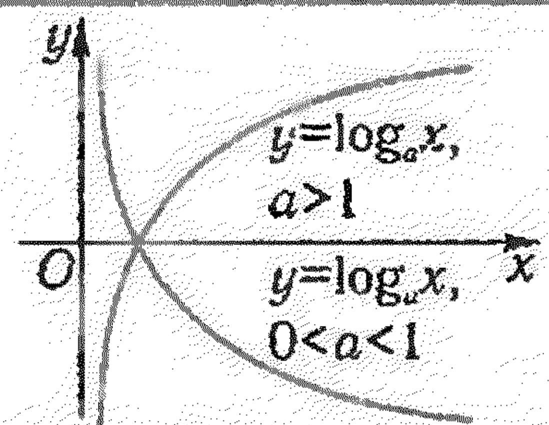
3) $\dfrac{x}{x+1}\le 3$; 4) $|1+2x|>1$.

48. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$; 3) $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$.

Підсумок

Основні поняття

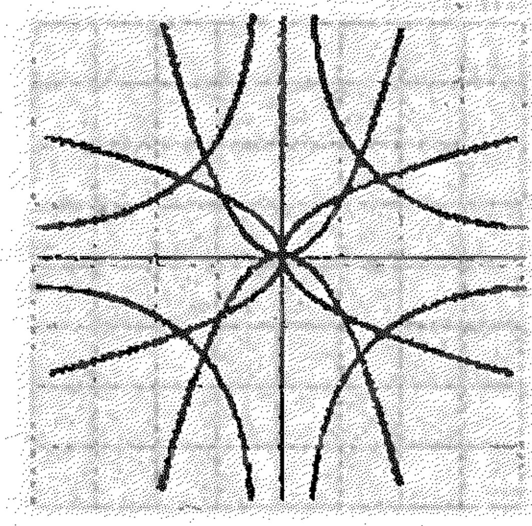
Означення	Символічний запис, геометрична інтерпретація	Застосування
Логарифмом числа $b>0$ за основою a, де $a>0$, $a\ne 1$, називається таке число c, що $a^c=b$.	$c=\log_a b$ $a^{\log_a b}=b.$	Для знаходження розв'язку рівняння $a^x=b$
Функція виду $y=\log_a x$, $a>0$, $a\ne 1$, називається ***логарифмічною.***		Дослідження показникової функції, моделювання реальних процесів

Властивості логарифмів

Логарифм добутку	$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$, $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a\ne 1$
Логарифм частки	$\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$, $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a\ne 1$
Логарифм степеня	$\log_a b^p=p\log_a b$, $p\in R,\ b>0,\ a>0,\ a\ne 1$
Формула переходу до іншої основи	$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a\ne 1,\ c\ne 1$

Властивості логарифмічної функції

	$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$	$y = \log_a x,\ a > 1$
Область визначення	$(0; +\infty)$	
Парність	Ні парна, ні непарна	
Нулі	$x = 1$	
Монотонність	Спадає	Зростає
Множина значень	$(-\infty; +\infty)$	
Неперервність	Неперервна в області визначення	
Найбільше і найменше значення	Не має	



§3. Розв'язання показникових і логарифмічних рівнянь, нерівностей та їхніх систем

У цьому параграфі розглядаються деякі способи розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь, нерівностей та їхніх систем.

1. Показникові рівняння та нерівності

Показникові рівняння та нерівності — це такі рівняння та нерівності, в яких невідома міститься у показнику степеня. Найпростіше показникове рівняння має вигляд $a^x = b$. Оскільки функція $y = a^x$ монотонна, то кожного свого значення вона набуває лише в одній точці.

Таким чином, рівняння $a^x = b$ при $b > 0$ має єдиний розв'язок, який, за означенням логарифма, дорівнює $x = \log_a b$, а при $b \le 0$ розв'язків не має.

Розглянемо рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$ і $a \ne 1$. Воно має ті самі розв'язки, що і рівняння $f(x) = g(x)$. Фактично цим твердженням ми користувалися, розв'язуючи найпростіші показникові рівняння. Воно випливає з монотонності показникової функції.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: 1) $3\cdot 9^x = 1$; 2) $3^{x^2-3x-1} = \dfrac{1}{27}$.

☐ 1) Запишемо рівняння у вигляді: $3\cdot 3^{2x} = 1$, $3^{1+2x} = 3^0$. Звідси $1+2x = 0$, $x = -0{,}5$.

2) Оскільки $\dfrac{1}{27} = 3^{-3}$, то дане рівняння можна записати у вигляді: $3^{x^2-3x-1} = 3^{-3}$. Це рівняння має ті самі розв'язки, що і рівняння $x^2 - 3x - 1 = -3$. Його коренями, а разом з тим і коренями даного рівняння, є: $x_1 = 1, x_2 = 2$. ■

Відповідь. 1) $-0{,}5$; 2) 1; 2.

Рівняння може містити декілька показникових функцій. Тоді їх доцільно виразити через одну. Зазвичай після цього рівняння перетворюється в алгебраїчне за допомогою відповідних замін.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$.

□ Аналізуючи дане рівняння, можна побачити, що ліву частину легко перетворити так, що вона міститиме лише одну функцію 3^x:

$$2\cdot 3^3\cdot 3^x+7\cdot 3^{-2}\cdot 3^x=493,\quad 54\cdot 3^x+\frac{7}{9}\cdot 3^x=493,\quad \left(54+\frac{7}{9}\right)\cdot 3^x=493,$$

$$\frac{493}{9}\cdot 3^x=493,\ 3^x=9,\ 3^x=3^2,\ x=2.\ ■$$

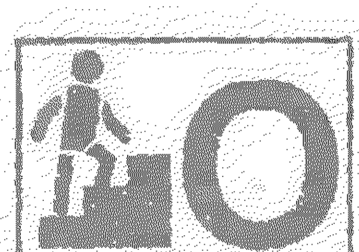
Відповідь. 2.

Розв'язування показникових нерівностей ґрунтується на використанні монотонності показникових функцій. Функції $y=a^x$ при $a>1$ зростають, а при $0<a<1$ — спадають. Відповідно до цього, нерівність $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ має ті самі розв'язки, що і нерівність $f(x)<g(x)$ при $a>1$ і $f(x)>g(x)$ при $0<a<1$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $(0{,}5)^{x-2}<(0{,}5)^{1-x}$.

□ Оскільки $0<0{,}5<1$, то дана нерівність має ті самі розв'язки, що і лінійна нерівність $x-2>1-x$, або $2x>3$, $x>1{,}5$. ■

Відповідь. $(1{,}5;+\infty)$.



Загальними методами розв'язання показникових рівнянь і нерівностей є:

— перехід від рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (нерівності $a^{f(x)}<a^{g(x)}$) до рівняння $f(x)=g(x)$ (нерівності $f(x)<g(x)$ при $a>1$ і $f(x)>g(x)$ при $0<a<1$);

— заміна змінної;

— розкладання на множники;

— логарифмування обох частин рівняння або нерівності;

— застосування властивостей функцій.

Проілюструємо кожен із цих методів прикладами.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $7^x=9^x$.

□ Оскільки $9^x\neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння на 9^x, одержимо: $\frac{7^x}{9^x}=1$, $\left(\frac{7}{9}\right)^x=\left(\frac{7}{9}\right)^0$, $x=0$. ■

Відповідь. 0.

Зверніть увагу на те, що умова $a > 0$ і $a \neq 1$ при переході від рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ до рівняння $f(x) = g(x)$ є суттєвою. Рівність $1^x = 1^3$ справджується при будь-якому x, а не тільки при $x = 3$, а рівність $(-1)^x = 1^6$ – при будь-якому парному x.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} - 0{,}01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3 < 0$.

□ Застосовуючи властивості степеня, цю нерівність можна подати у вигляді $(2 \cdot 5)^{x^2-3} - 10^{-2} \cdot 10^{3(x-1)} < 0$, або $10^{x^2-3} < 10^{3x-5}$. Оскільки $10 > 1$, то остання нерівність рівносильна нерівності $x^2 - 3 < 3x - 5$, розв'язком якої є інтервал $(1; 2)$. ■

Відповідь. $(1; 2)$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

□ Неважко помітити, що $4^x = (2^x)^2$, $9^x = (3^x)^2$, $6^x = 2^x \cdot 3^x$. Оскільки $9^x \neq 0$ при кожному $x \in R$, то, поділивши обидві частини рівняння на 9^x, дістанемо рівносильне рівняння $\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0$, або $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$. Після заміни $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ одержимо квадратне рівняння $y^2 + y - 2 = 0$. Коренями цього рівняння є $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Таким чином, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -2$ або $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$. Перше з цих рівнянь розв'язків не має, а друге має єдиний корінь $x = \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$. ■

Відповідь. 0.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$.

□ Позначимо $3^x = t$, тоді одержимо квадратну нерівність $t^2 - 4t + 3 < 0$. Вона справджується при $1 < t < 3$. Оскільки $3^x = t$, то $1 < 3^x < 3$, або $3^0 < 3^x < 3^1$, $0 < x < 1$. ■

Відповідь. $(0; 1)$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $2^{x^2-1} = 3^{4x}$.

□ Оскільки $3 = 2^{\log_2 3}$, то дане рівняння можна перетворити до вигляду $2^{x^2-1} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{4x}$. Це рівняння рівносильне рівнянню

$x^2-1=4x\log_2 3$. Його коренями, а разом з тим і коренями даного рівняння, є: $2\log_2 3\pm\sqrt{4\log_2^2 3+1}$.

Розглянуте рівняння можна розв'язати логарифмуванням обох його частин. Прологарифмувавши обидві частини рівняння $2^{x^2-1}=3^{4x}$ за основою 2, одержимо: $x^2-1=4x\log_2 3$. ■

Відповідь. $2\log_2 3\pm\sqrt{4\log_2^2 3+1}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{x}{2}-\frac{5}{9}$.

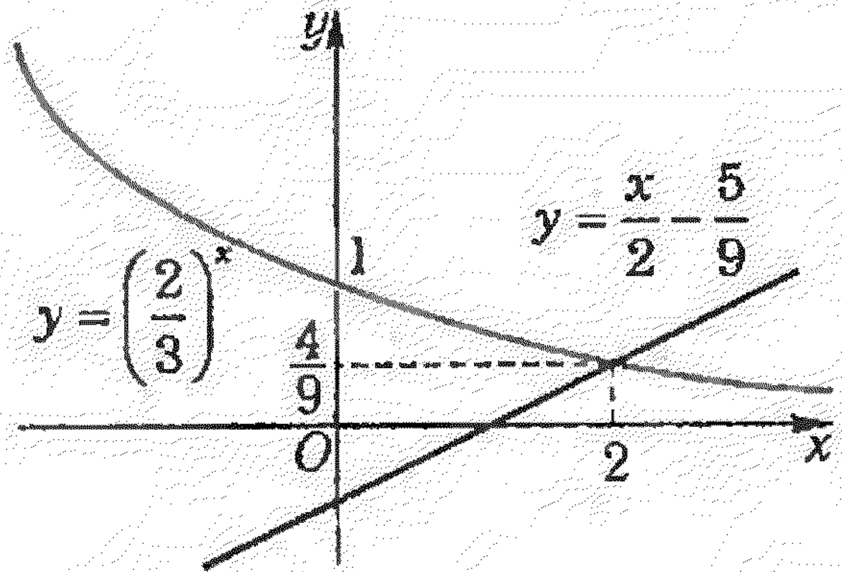


Рис. 16

□ Жодним із розглянутих у попередніх прикладах методів розв'язати це рівняння не вдається. Спробуємо знайти будь-який його розв'язок методом підбору. У даному випадку це зробити неважко: $x=2$, бо $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $\frac{2}{2}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$. Покажемо, що інших коренів рівняння не має. Функція $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ є спадною, а функція $y=\frac{x}{2}-\frac{5}{9}$ — зростаючою (рис. 16). Тому при $x>2$ значення першої функції менші від $\frac{4}{9}$, а другої — більші від $\frac{4}{9}$; при $x<2$, навпаки, значення першої функції більші від $\frac{4}{9}$, а другої — менші від $\frac{4}{9}$. Відтак графіки цих функцій не можуть мати точок перетину при $x\neq 2$. ■

Відповідь. 2.

Контрольні запитання

1°. Чи може рівняння $a^x=b$ мати два розв'язки?

2°. Які з наступних рівнянь не мають розв'язків: а) $5^x=-2$; б) $5^x=0$; в) $5^x=2$?

3. Скільки розв'язків має рівняння: а) $2^x=\frac{1}{x}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=-\frac{1}{x}$; в) $2^x=-x$?

4. За яких значень a рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 - a$ має корені?

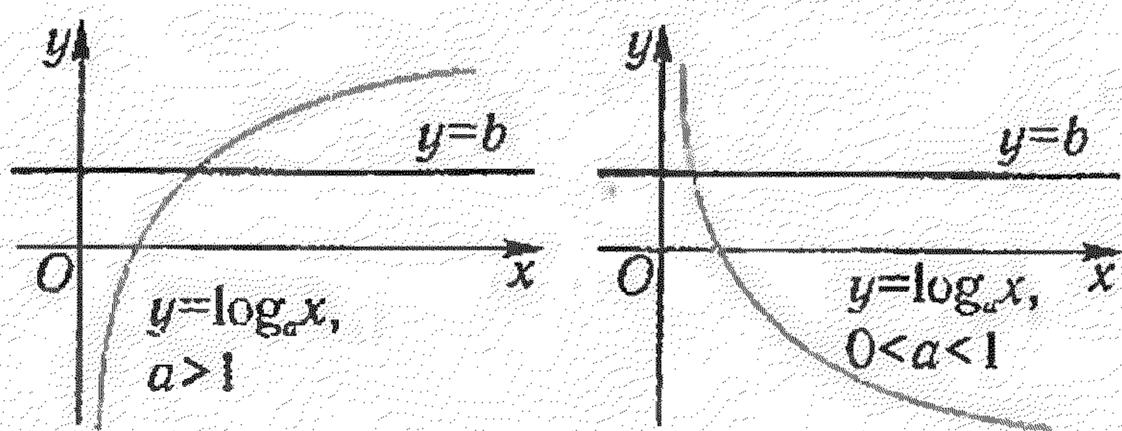
5. Яким є розв'язок нерівності: а) $2^x > 0$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$; в) $2^x > 1$; г) $2^x < 1$; ґ) $2^x > -1$?

6. Які цілі числа задовольняють нерівність: а) $\frac{1}{27} < 3^x < 3$; б) $\frac{1}{9} \le \left(\frac{1}{3}\right)^x \le 9$?

2. Логарифмічні рівняння та нерівності

Логарифмічні рівняння та нерівності — це такі рівняння та нерівності, в яких невідомі містяться під знаком логарифма. Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд $\log_a x = b$. Його розв'язки знайти неважко. Наприклад, рівняння $\log_3 x = 2$ задовольняє число $x = 3^2 = 9$, оскільки $\log_3 9 = 2$. Зрозуміло, що рівняння $\log_a x = b$ має розв'язок при будь-якому $b \in R$.

Оскільки функція $y = \log_a x$ монотонна, то кожного свого значення вона набуває лише в одній точці, тобто пряма $y = b$, $b \in R$, перетинає її графік лише в одній точці (рис. 17).



а) б)

Рис. 17

Таким чином, рівняння $\log_a x = b$ має єдиний розв'язок, який, згідно з означенням логарифма, дорівнює $x = a^b$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння:

1) $\log_5(2-x) = 2$; 2) $\log_3(x^2 - 3x + 11) = 2$.

☐ 1) За означенням логарифма, $5^2 = 2 - x$, звідки $x = -23$.

2) Дане рівняння, згідно з означенням логарифма, задовольняють ті значення x, для яких справджується рівність $x^2-3x+11=3^2$. Одержане квадратне рівняння має коренями числа $x_1=1$ і $x_2=2$, які є розв'язками даного рівняння. ■

Відповідь. 1) –23; 2) 1 і 2.

Розглянемо логарифмічне рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\log_2(x-2)=\log_2(x^2-x-17)$.

□ Якщо x_0 — корінь цього рівняння, то має місце числова рівність $\log_2(x_0-2)=\log_2\left(x_0^2-x_0-17\right)$, тому $x_0-2=x_0^2-x_0-17$ (остання рівність випливає з монотонності логарифмічної функції). Звідси: $x_0^2-2x_0-15=0$. Ця рівність є правильною, якщо $x_0=5$ або $x_0=-3$. Отже, припустивши, що число x_0 — корінь даного рівняння, ми показали, що воно може дорівнювати або 5, або –3. Перевіримо, чи є ці числа коренями початкового рівняння. Підставляючи послідовно у його ліву і праву частини число 5, одержимо: $\log_2(x-2)=\log_2(5-2)=\log_2 3$; $\log_2(x^2-x-17)=\log_2(25-5-17)=$ $=\log_2 3$, тобто $x=5$ — корінь даного рівняння. При $x=-3$ значення виразів $x-2$ і x^2-x-17 є від'ємними, обидві частини рівняння не мають змісту, тобто $x=-3$ не є коренем даного рівняння. ■

Відповідь. 5.

Розглянутий приклад показує, що

> **при переході від рівняння $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ до рівняння $f(x)=g(x)$ можуть з'явитись сторонні корені. Тому необхідно виконати перевірку.**

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на використанні монотонності логарифмічних функцій. Функції $y=\log_a x$ визначені при $x>0$ і при $a>1$ зростають, а при $0<a<1$ — спадають.

Приклад 12. Розв'язати нерівність: 1) $\log_3 x<-1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x\le -2$.

□ 1) Запишемо нерівність у вигляді $\log_3 x<\log_3 3^{-1}$, або $\log_3 x<\log_3\frac{1}{3}$. Функція $y=\log_3 x$ визначена при $x>0$ і зростає (основа логарифма більша від 1), тому нерівність справджується при $x > 0$ і $x < \frac{1}{3}$, тобто при $0 < x < \frac{1}{3}$.

2) Нерівність $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$ можна записати у вигляді $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, або $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9$. Функція $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ визначена при $x > 0$ і спадає (оскільки основа логарифма знаходиться між 0 і 1), тому нерівність справджується при $x > 0$ і $x \geq 9$, тобто при $x \geq 9$. ■

Відповідь. 1) $0 < x < \frac{1}{3}$; 2) $x \geq 9$.

Логарифмічні нерівності виду $\log_a f(x) \lessgtr \log_a g(x)$ можна розв'язувати за такою схемою:

1) записати умови, які визначають область визначення нерівності, тобто множину значень змінної, за яких мають зміст вирази, що входять до нерівності;
2) відкинути знаки логарифмів з урахуванням зростання чи спадання логарифмічної функції;
3) розв'язати одержану нерівність;
4) записати відповідь з урахуванням області визначення нерівності.

Приклад 13. Розв'язати нерівність $\lg(3x-4) < \lg(2x+1)$.

□ Діємо за наведеною схемою.

1) Логарифмічна функція $y = \lg x$ визначена при $x > 0$, тому нерівність має зміст при $3x - 4 > 0$ і $2x + 1 > 0$, або при $x > \frac{4}{3}$ і $x > -\frac{1}{2}$. Отже, її областю визначення є проміжок $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

2) Оскільки логарифмічна функція з основою 10 є зростаючою, то, відкинувши знаки логарифмів, одержимо: $3x - 4 < 2x + 1$.

3) Розв'яжемо одержану нерівність: $x < 5$.

4) З урахуванням області визначення, маємо: $\frac{4}{3} < x < 5$. ■

Відповідь. $\left(\frac{4}{3};5\right)$.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь застосовують:

— перехід від рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ до рівняння $f(x) = g(x)$;

— властивості логарифмів;

— заміну змінної;

— розкладання на множники;

— логарифмування;

— функціональні методи.

Проілюструємо ці методи на конкретних прикладах.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь часто доводиться виконувати перетворення, застосовуючи властивості логарифмів. При цьому може порушитись рівносильність рівнянь.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\lg(x+2)+\lg(x-2)=\lg 5$.

□ Згідно із властивістю логарифма добутку (див. § 2), маємо: $\lg((x-2)(x+2)) = \lg 5$. Звідси випливає, що $x^2 - 4 = 5$. Коренями цього рівняння є числа 3 і –3. Неважко перевірити, що обидва числа є коренями рівняння $\lg(x^2-4) = \lg 5$, але тільки число 3 є коренем початкового рівняння.

Сторонній корінь з'явився після виконання перетворення $\lg(x+2)+\lg(x-2)=\lg(x^2-4)$, в результаті якого одержали рівняння з ширшою областю визначення. Справді, вирази, які містяться у заданому рівнянні, мають зміст при $x \in (2; +\infty)$, а в одержаному рівнянні — при $x \in (-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$. Розширення області визначення рівняння привело до появи сторонніх коренів. ■

Відповідь. 3.

При розв'язанні даного рівняння ми переходили від суми логарифмів до логарифма добутку. При цьому переході, а також при переході від різниці логарифмів до логарифма частки, від добутку парного числа на логарифм деякого виразу до логарифма степеня можуть з'явитись сторонні корені і тому перевірка необхідна. Якщо ж переходити від логарифма добутку, частки або ж парного степеня до суми, різниці логарифмів або ж до добутку парного числа на логарифм, можна втратити корені.

Поширеним є спосіб зведення логарифмічних рівнянь до простіших (наприклад, алгебраїчних) уведенням нових невідомих.

Приклад 15. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$.

□ Позначивши $\log_2 x = y$, дістанемо квадратне рівняння $y^2 - 2y - 3 = 0$, яке має корені $y_1 = 3$, $y_2 = -1$. Розв'язування задачі звелося до двох найпростіших рівнянь $\log_2 x = 3$ і $\log_2 x = -1$, з яких знаходимо: $x_1 = 2^3 = 8$, $x_2 = 2^{-1} = 0{,}5$. ■

Відповідь. 8; 0,5.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $\sqrt{x}\,\lg(x-1) = 0$.

□ Ліва частина рівняння є добутком двох множників. Прирівняємо кожен з них до нуля і розв'яжемо одержані рівняння: $\sqrt{x} = 0$, $x = 0$; $\lg(x-1) = 0$, $x - 1 = 1$, $x = 2$. Легко помітити, що число $x = 0$ не є коренем початкового рівняння, бо при $x = 0$ вираз $\lg(x-1)$ не має змісту. Водночас число $x = 2$ є коренем даного рівняння. ■

Відповідь. 2.

Таким чином, при розв'язанні логарифмічного рівняння виду $f(x)\log_a g(x) = 0$ зведенням до рівнянь $f(x) = 0$ і $\log_a g(x) = 0$ необхідно перевірити, чи задовольняють їхні корені дане рівняння.

Якщо невідома під знаком логарифма стоїть у показнику степеня, то іноді варто прологарифмувати обидві частини рівності: адже рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне рівнянню $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ за умови, що $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Приклад 17. Розв'язати рівняння $7^{3\lg x} = 34{,}3x$.

□ Обидві частини рівняння набувають додатних значень: ліва частина як степінь деякого числа, права частина – на підставі того, що $x > 0$. Враховуючи, що $34{,}3 = \dfrac{343}{10} = \dfrac{7^3}{10}$, прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10: $3\lg x \cdot \lg 7 = 3\lg 7 - \lg 10 + \lg x$. Звідси: $\lg x(3\lg 7 - 1) = 3\lg 7 - 1$, $\lg x = 1$, $x = 10$. ■

Відповідь. 10.

Як і для показникових рівнянь, при розв'язуванні логарифмічних рівнянь корисно застосовувати властивості і графіки функцій, які входять до рівняння.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\log_2(x+2) = 4 - x$.

□ Жодним із розглянутих у попередніх прикладах методів розв'язати це рівняння не вдається. Спробуємо знайти будь-який його розв'язок методом підбору. У даному випадку це зробити не-

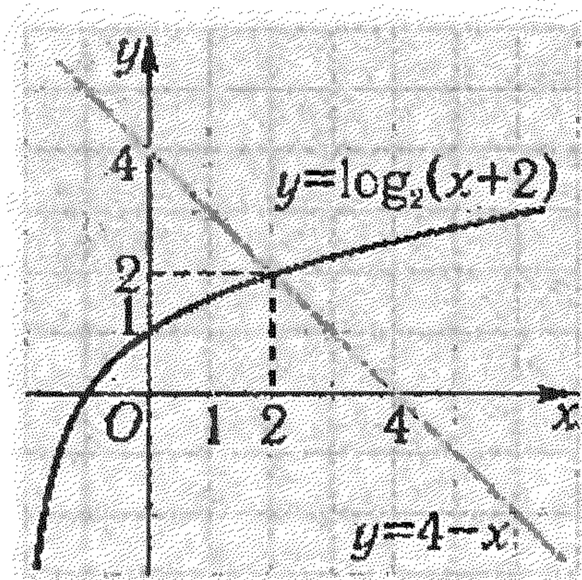


Рис. 18

важко: $x = 2$, бо $\log_2(2+2) = 2$, $4 - 2 = 2$. Покажемо, що інших коренів рівняння не має. Функція $y = \log_2(x+2)$ є зростаючою, а функція $y = 4 - x$ – спадною (рис. 18). Тому при $x > 2$ значення першої функції більші від 2, а другої — менші від 2; при $x < 2$, навпаки, значення першої функції менші від 2, а другої — більші від 2. Відтак графіки цих функцій не можуть мати точок перетину при $x \neq 2$. ■

Відповідь. 2.

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на використанні монотонності логарифмічних функцій і врахуванні області її визначення, тобто на наступній теоремі, яка випливає із властивостей логарифмічної функції.

Теорема. **Нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ при $a > 1$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ а при $0 < a < 1$ — системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$**

Приклад 19. Розв'язати нерівність:

1) $\log_2(1-4x) > \log_2(x^2+4)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > -3$.

□ 1) У даному випадку основа логарифма більша від 1, тому дана нерівність рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} 1-4x > x^2+4, \\ x^2+4 > 0 \end{cases}$ або нерівності $x^2+4x+3<0$, оскільки нерівність $x^2+4>0$ справджується при всіх значеннях x. Розв'язком нерівності $x^2+4x+3<0$ є проміжок, що міститься між коренями -3 і -1 рівняння $x^2+4x+3=0$. Отже, розв'язком даної нерівності є інтервал $(-3; -1)$.

2) Зобразимо -3 як $\log_{\frac{1}{3}} 27$, тоді дана нерівність набуває вигляду: $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Оскільки основа логарифма міститься між 0 і 1, то остання нерівність рівносильна подвійній нерівності

$0 < x - 2 < 27$. Розв'язуючи систему двох лінійних нерівностей $\begin{cases} x-2<27, \\ x-2>0, \end{cases}$ дістаємо $2 < x < 29$. ■

Відповідь. 1) $(-3; -1)$; 2) $2 < x < 29$.

Контрольні запитання

1°. Чи може рівняння $\log_a x = b$ не мати розв'язків?

2°. Чи може рівняння $\log_a x = b$ мати від'ємний розв'язок?

3°. Чи може рівняння $\log_a x = b$ мати два розв'язки?

4°. Яким є розв'язок рівняння: а) $\log_2 x = 0$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$; в) $\log_x 3 = 2$?

5. Скільки розв'язків має рівняння: а) $\log_2 x = \frac{1}{x}$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{x}$; в) $\log_2 x = -x$?

6. Чи правильно розв'язане рівняння $\log_2 x^2 = \log_2 9$ — $2\log_2 x = 2\log_2 3$, $x = 3$?

7. Яким є розв'язок нерівності: а) $\log_2 x < 0$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$; в) $\log_3 x < 1$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$?

8. Які цілі числа задовольняють нерівність: а) $2 < \log_2 x < 3$; б) $-2 \le \log_{\frac{1}{2}} x \le -1$?

9*. Чи має розв'язки рівняння: а) $\ln x - \ln(x+2) = 2$; б) $\lg(x-1) + \lg(1-x) = 0$?

Задачі

49. Розв'яжіть рівняння:

1°) $4^{x^2-3x-4} = 1$; 2°) $64^x = 4^{x^2+2}$; 3°) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3x-3} = \frac{1}{5}$;

4°) $4^{x^2-x+1} = 8^x$; 5) $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$; 6*) $4^{\sqrt{x-2}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

50. Розв'яжіть рівняння:

1°) $3^x = 2^x$; 2°) $5^{-2x} = 4^{-x}$;

3) $3^{-x+4} - 25\cdot 5^{2-x} = 0$; 4) $81\cdot 8^{x-3} - 9^{x-1} = 0$.

51. Розв'яжіть рівняння:

1°) $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$; 2°) $16^x - 4^x - 2 = 0$;

3) $3^x + 3^{1-x} = 4$; 4) $3^{2x+1} + 10\cdot 3^x + 3 = 0$;

5) $2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x - 3\cdot 4^x = 0$.

52°. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$; 2) $2^{3x}\cdot 3^x - 2^{3x-1}\cdot 3^{x+1} + 288 = 0$;

3) $9^{x+3} + 3^{2x+2} = \dfrac{82}{9}$.

---

53. Знайдіть найменший корінь рівняння:

1) $\left(9^{x^2-1} - 1\right)\cdot\sqrt{2x-1} = 0$; 2) $\left(4^{x+2} - 2^x\right)\cdot\sqrt{1+x} = 0$.

54. Знайдіть точки перетину з віссю абсцис графіка функції:

1) $y = 3^{x-1} - 6^x\cdot 2^{-x}\cdot 3^{x+1}$; 2) $y = 4^{\sin x\cdot\cos x} - \sqrt{2}$;

3) $y = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} - 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2}$.

55. Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = 3^{x-1}\cdot 2^{3x-7}$ і $y = 12^{9-x}$; 2) $y = 9^{x+1} + 9^{2x-1}$ і $y = 54\cdot 27^{x-1}$;

3) $y = 3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x$ і $y = 5\cdot 6^x$; 4) $y = 4^x$ і $y = 24 - 2^{x+1}$.

---

56. Розв'яжіть нерівність:

1°) $2^{3-6x} > 1$; 2°) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2x-1}{1-x}} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$; 3) $\sqrt[x+1]{3} > 9$;

4) $3^x > 2$; 5°) $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$.

57. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{2x+1} > 5^x + 4$; 2) $\dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x+3}+1}$;

3) $2^{2x+2} + 6^x - 2\cdot 3^{2x+2} > 0$; 4) $3^{x+1} - 5\cdot 2^x \le 2^{x+2} - 3^x$.

58. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7, \\ 2^{2x} + 3^{2y} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^x - 36y = 0, \\ 6^x - 25y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y. \end{cases}$

59. Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$.

1°) В яких точках графік функції $y = f(x)$ перетинається з осями координат?

2) Розв'яжіть рівняння $f(x) = -\frac{2}{9}$.

3) Розв'яжіть нерівність $f(x) < -\frac{2}{9}$.

4) Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{f(x)}$.

60. Культурі зі 100 бактерій надана можливість розмножуватись у сприятливих умовах за законом $N = N_0 e^{kt}$, де N — кількість бактерій у момент t, N_0 — кількість бактерій у початковий момент часу ($t = 0$), k — деяка константа. Через 12 год виявляється, що культура містить 500 бактерій. Скільки бактерій буде через 2 доби після початку досліду?

61. Закон радіоактивного розпаду речовини має вигляд $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, де m_0 — маса речовини у початковий момент $t = 0$, m — маса речовини в момент t, T — деяка константа, яку називають періодом напіврозпаду. Через час T після початкового моменту маса радіоактивної речовини зменшується вдвічі. Обчисліть період напіврозпаду речовини, якщо за рік її маса зменшилась удесятеро.

62. Розв'яжіть рівняння:

1°) $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2 + 3x + 1) = 0$; 2°) $\log_2(x - 7) = \log_2(4 - x)$;

3°) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$; 4°) $\log_2(x - 2) = \log_2(x^2 - x - 17)$;

5) $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$; 6) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$.

63°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$; 2) $\lg^2 x = 4 - 3\lg x$;

3) $6\log_x 2 - 6\log_4 x + 7 = 0$; 4) $\frac{1}{3 - \lg x} + \frac{1}{1 + \lg x} = 1$.

64. Розв'яжіть рівняння:

1°) $100^{\lg(x-20)} = 1000$; 2°) $5^{4\lg x} = 62{,}5x$;

3) $x^{\lg x + 2} = 1000$; 4*) $x^{\lg x^2 - 3} = 100$.

65*. Знайдіть найменший корінь рівняння:

1) $\left(x^{2\lg x} - 10x\right) \cdot \sqrt{3x-2} = 0$;

2) $\left(\log_2(9-2^x) - 3 + x\right) \cdot \sqrt{2x-3} = 0$.

66. Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x(1-\lg 5)$ і $y = \lg(4^x - 12)$;

2*) $y = \log_2 \sqrt{x^2+2x+1}$ і $y = 6 - \log_2(x+1)^2$;

3) $y = \lg(35 - x^3)$ і $y = 3\lg(5-x)$;

4) $y = 4 - \lg x$ і $y = 3\sqrt{\lg x}$.

67. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x = -x + 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$.

68. Розв'яжіть нерівність:

1°) $\log_5(3x-1) < 1$; 2°) $\log_2(x^2 - 2x) - 3 > 0$;

3) $\left(\log_2 x\right)^2 \le 4$; 4) $\dfrac{1}{\log_2(x-2)} \le \dfrac{1}{2}$.

69. Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg(x^2 - 3) > \lg(x+3)$; 2) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \le 0$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2+4x}{2x-3} < 1$; 4*) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)} < 1$.

70. Розв'яжіть систему рівнянь:

1°) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ x^{\lg y} = 1000; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = \dfrac{3}{2}, \\ \log_x 3 + \log_y 9 = 3. \end{cases}$

71. Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = \log_3^2 x + 3\log_3 x$.

1°) В яких точках графік функції $y = f(x)$ перетинається з осями координат?

2°) Розв'яжіть рівняння $f(x) = -2$.

3) Розв'яжіть нерівність $f(x) < -2$.

4*) Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{f(x)}$.

72. Швидкість v ракети в залежності від маси m змінюється за законом $v = v_г \ln\frac{m_0}{m}$ (формула Ціолковського), де $v_г$ — швидкість газів, що вилітають з ракети, m_0 — стартова маса ракети. Знайдіть залежність маси ракети від її швидкості.

73. Коефіцієнт звукоізоляції стін обчислюється за формулою $D = A\lg\frac{p_0}{p}$, де p_0 — тиск звуку до поглинання, p — тиск звуку, що пройшов через стіну, A — деяка стала. Виразіть через інші змінні тиск звуку після поглинання.

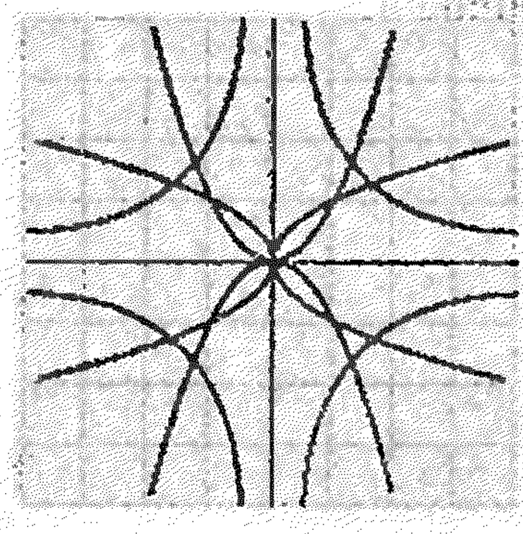
Підсумок

Показникові і логарифмічні рівняння

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Показникові і логарифмічні нерівності

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $0 < a < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) > g(x)$
$\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $a > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $0 < a < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Показникова та логарифмічна функції»

Завдання для самоконтролю

1°. Що більше — одиниця чи значення a^x при $x < 0$, якщо: а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$?

2°. Чи є зростаючою або спадною функція: а) $y = (0{,}41)^x$; б) $y = (2{,}36)^x$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; г) $y = (5)^{-x}$?

3°. В якому проміжку лежить при $x \in [-2; 1]$ значення функції: а) $y = 3^x$; б) $y = 3^{-x}$?

4. Який знак має корінь рівняння: а) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 3$; б) $(0{,}7)^x = 0{,}3$; в) $5^x = 4$; г) $3^x = \frac{1}{7}$?

5. При якому значенні a графік функції $y = a^x$ проходить через точку: а) $(1; 2)$; б) $(2; 9)$; в) $\left(2; \frac{4}{9}\right)$; г) $(-2; 4)$; ґ) $\left(-3; \frac{1}{27}\right)$?

6°. Між якими послідовними цілими числами міститься число: а) $\log_2 5$; б) $\log_3 8$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

7°. Чому дорівнює різниця $\lg(100a) - \lg\left(\frac{a}{100}\right)$?

8. Чи можна поділити обидві частини нерівності $2\lg\frac{1}{2} > 3\lg\frac{1}{2}$ на $\lg\frac{1}{2}$, не змінюючи знака нерівності?

9. Який знак має число: а) $\log_{\frac{1}{5}} 7$; б) $\log_{0,8} \frac{3}{4}$; в) $\log_{13} 12$; г) $1-\log_6 7$; ґ) $\log_4 5-1$; д) $\log_{\frac{8}{3}} 7-\log_{\frac{1}{3}} 7$?

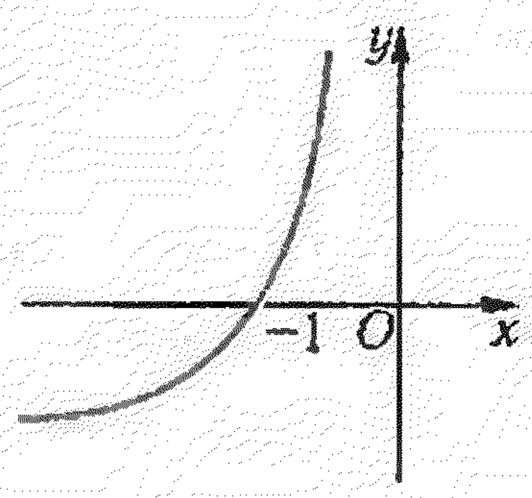
10. Через яку точку проходить графік будь-якої логарифмічної функції $y=\log_a x$?

11°. Зростаючою чи спадною є функція: а) $y=\log_2 x$; б) $y=\log_5 x$; в) $y=\log_{0,1} x$; г) $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$; ґ) $y=\lg x$; д) $y=\ln x$?

12. Яке число більше: а) $\log_2 5$ чи $\log_2 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ чи $\log_{\frac{1}{3}} 4$; в) $\log_5 \frac{1}{2}$ чи $\log_5 \frac{1}{3}$; г) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{4}{5}$ чи $\log_{\frac{1}{7}} \frac{5}{6}$?

13°. Чому дорівнюють найбільше і найменше значення функції $y=f(x)$ на вказаному проміжку: а) $f(x)=\lg x$, $[0,1; 10]$; б) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, $[1; 3]$?

14°. Графік якої з функцій $y=\log_3 \frac{1}{x}$, $y=(0,3)^x$, $y=-\log_{0,3} x$, $y=\log_{0,3}(-x)$ схематично зображено на рисунку?



15°. При яких значеннях x визначена функція: а) $y=\log_2(-x)$; б) $y=\log_2|x|$; в) $y=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$; г) $y=2^{\log_2 x}$?

16°. Чи має розв'язки рівняння: а) $3^x=-3$; б) $3^x=0$; в) $3^x=5$?

17. Скільки коренів має рівняння: а) $3^x=x^2$; б) $3^x=-3x^2$; в) $3^x=\frac{1}{x}$?

18. Чи має розв'язки нерівність: а) $3^x>-3$; б) $3^x\le 0$; в) $3^x>5$?

19. Скільки коренів має рівняння: а) $\log_2 x=x$; б) $\log_2 x=\frac{1}{x}$; в) $\log_2 x=2^x$?

Відповіді до завдань для самоконтролю

1. а) 1; б) a^x. **2.** а) Спадною; б) зростаючою; в) зростаючою; г) спадною. **3.** а) $\left[\frac{1}{9};3\right]$; б) $\left[\frac{1}{3};9\right]$. **4.** а) –; б) +; в) +; г) –. **5.** а) 2; б) 3; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; ґ) 3. **6.** а) 2 і 3; б) 1 і 2; в) –2 і –1; г) –4 і –3. **7.** 4. **8.** Ні. **9.** а) –; б) +; в) + г) –; ґ) +; д) +. **10.** (1; 0). **11.** а) Зростаючою; б) зростаючою; в) спадною; г) спадною; ґ) зростаючою; д) зростаючою. **12.** а) $\log_2 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 2$; в) $\log_5 \frac{1}{2}$; г) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{4}{5}$. **13.** а) 1 і –1; б) 0 і –1. **14.** $y = \log_{0,3}(-x)$. **15.** а) $x < 0$; б) $x \neq 0$; в) $x > 0$; г) $x > 0$. **16.** а) Ні; б) ні; в) так. **17.** а) Два; б) жодного; в) один. **18.** а) Так; б) ні; в) так. **19.** а) Жодного; б) один; в) жодного.

Зразок контрольної роботи № 1

1. Дано вираз $f(x) = \left(5^{2x} + 5^{-x}\right)^2 - \left(5^{2x} - 5^{-x}\right)^2 + 5^x$.

   1°) Доведіть, що $f(x) = 5^{x+1}$.

   2°) В яких точках графік функції $y = f(x)$ перетинає: а) вісь x; б) вісь y; в) пряму $x = 2$; г) пряму $y = -1$; ґ) пряму $y = 5$?

   3) Знайдіть: а°) область визначення функції $y = f(x)$; б) множину значень функції $y = f(x)$.

   4°) Побудуйте графік функції $y = f(x)$.

   5) Обчисліть $f(x_0)$, якщо: а°) $x_0 = -0,5$; б) $x_0 = \log_5 7$.

   6) Знайдіть значення x, при яких: а°) $f(x) = 0,2$; б) $f(x) < 0,2$.

   7) Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[-1; 2]$.

2. Закон зміни деякої величини з часом має вигляд $x = \frac{100}{3}\log_2(0,06t + 1)$, де t — час; x — числове значення величини.

   1) Знайдіть значення величини: а°) при $t = 0$; б) при $t = 10$.

   2) Через скільки одиниць часу після початку його відліку значення величини становитиме 120?

Логарифми та їхні властивості

Таблиця 7

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$$

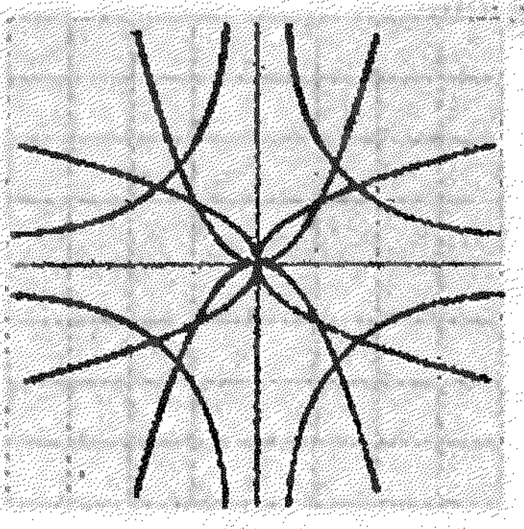
$$\log_a x^k = k \log_a x, \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}, a > 0, a \neq 1, x > 0, n \in N, n > 1, k \in R$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a > 0, a \neq 1, x > 0, b > 0, b \neq 1$$

Властивості показникової та логарифмічної функцій

Таблиця 8

Функція / Властивості	$y = a^x$, $a > 1$	$y = a^x$, $0 < a < 1$	$y = \log_a x$, $a > 1$	$y = \log_a x$, $0 < a < 1$
Область визначення	R	R	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Нулі	Немає нулів	Немає нулів	$x = 1$	$x = 1$
Парність і непарність	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
Проміжки знакосталості	$y > 0$ при $x \in R$	$y > 0$ при $x \in R$	$y > 0$ при $x > 1$; $y < 0$ при $0 < x < 1$	$y < 0$ при $x > 1$; $y > 0$ при $0 < x < 1$
Проміжки монотонності	$\nearrow$ при $x \in R$	$\searrow$ при $x \in R$	$\nearrow$ при $x \in (0; +\infty)$	$\searrow$ при $x \in (0; +\infty)$
Множина значень	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	R	R
Найбільше і найменше значення	Немає ні найбільшого, ні найменшого значень	Немає ні найбільшого, ні найменшого значень	Немає ні найбільшого, ні найменшого значень	Немає ні найбільшого, ні найменшого значень
Неперервність	Неперервна в області визначення	Неперервна в області визначення	Неперервна в області визначення	Неперервна в області визначення



Історичний коментар

До показникової функції $y = a^x$ привело розширення поняття степеня. Одними з перших показникові функції вивчали і застосовували німецький математик Г. Лейбніц (1646–1716), швейцарські математики І. Бернуллі (1667–1748) та Л. Ейлер (1707–1783). Останній установив зв'язок між показниковими і тригонометричними функціями. Показникові функції мають чудову властивість: швидкість їхнього зростання пропорційна значенню самих функцій. Необхідність їхнього вивчення виникла з дослідження різних законів природознавства, таких, як закони розмноження, біологічних популяцій, закони радіоактивного розпаду, закони руху в гальмуючому середовищі тощо.

Наприкінці XVI ст. нідерландський учений С. Стевін (1548–1620) опублікував таблицю для обчислення складних відсотків за формулою $A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, де a — початковий капітал, A — нарощений капітал після t років при p % річних. Це був приклад застосування показникової функції у банківській справі. Необхідність обчислення складних відсотків була викликана зростанням торговельно-фінансових операцій.

Логарифми виникли в XVII ст. для полегшення обчислень у працях шотландського математика Дж. Непера (1550–1617) і швейцарського математика І. Бюргі (1552–1632). Спочатку зусилля вчених були спрямовані на створення таблиць логарифмів, які протягом трьох сторіч були основними засобами складних розрахунків. Особливою популярністю користувалась реалізація таблиць логарифмів у вигляді компактної і зручної логарифмічної лінійки. У зв'язку з розвитком електронно-обчислювальної техніки необхідність у використанні логарифмічних таблиць відпала.

Таблиці Непера відіграли неабияку роль не тільки в астрономії, в прикладній математиці, але й у математичній науці взагалі.

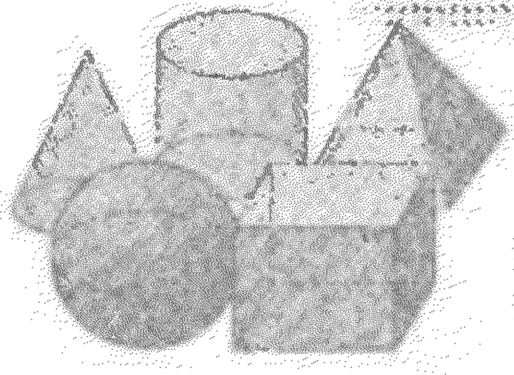
Отже, виникнувши з практичних потреб астрономії і мореплавства, ідея логарифмів привела у XVIII–XIX ст. до розвитку вчення про показникові і логарифмічні функції та інші математичні теорії, які, у свою чергу, відкрили можливості для нових практичних застосувань.

Розділ 2.

ВЕКТОРИ І КООРДИНАТИ

Векторний метод і метод координат належать у математиці до найзагальніших. Вони дають змогу зводити розв'язування різноманітних задач до обчислень, а також надають можливість мати наочне уявлення про такі найважливіші поняття математики, як числа, функції, рівняння і про фізичні поняття та відношення, що ними моделюються.

У даному розділі поняття вектора і дії над векторами поширюються на випадок простору, розглядаються прямокутна система координат у просторі і відповідні формули для вимірювання відстаней, кутів, складаються рівняння найпростіших просторових фігур.



Готуємось до вивчення теми «Вектори і координати»

Вивчення теми «Вектори і координати» варто розпочати з повторення основних понять і фактів про вектори і координати на площині, взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Найважливіший матеріал із цих питань подано у вигляді таблиць.

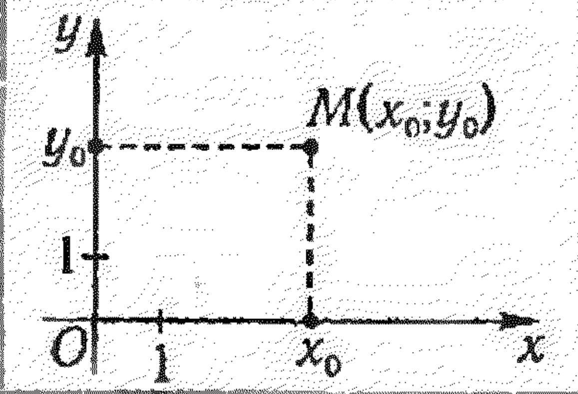
Властивості дій над векторами на площині

Таблиця 9

Операції	Властивості	Назва властивостей
Додавання векторів	1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ 4) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$	1) Переставний закон 2) Сполучний закон 3) Існування нульового вектора 4) Існування протилежного вектора
Множення вектора на число	1) $(kl)\vec{a}=k\left(l\vec{a}\right)$ 2) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ 3) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ 4) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$	1) Сполучний закон 2) Добуток вектора на число 1 3) Розподільний закон відносно додавання чисел 4) Розподільний закон відносно додавання векторів
Скалярний добуток векторів	1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2) $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ 3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	1) Переставний закон 2) Сполучний закон 3) Розподільний закон

Система координат на площині

Таблиця 10

Зображення	Позначення координат точки M	Геометричний зміст модуля координат
	$M(x_0; x_0)$	$\lvert x_0\rvert$ — відстань від точки M до осі y; $\lvert y_0\rvert$ — відстань від точки M до осі x

Дії над векторами у координатній формі

Таблиця 11

Вектори	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{a}+\vec{b}$	$\lambda\vec{a}$
Координати	$(x_1; y_1)$	$(x_2; y_2)$	$(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$	$(\lambda x_1; \lambda y_1)$

Основні формули методу координат

Таблиця 12

Величина	Формула для її обчислення
Довжина вектора $\vec{a}$	$\vec{a} = (x, y)$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$
Довжина відрізка M_1M_2	$M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

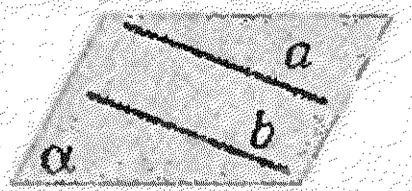
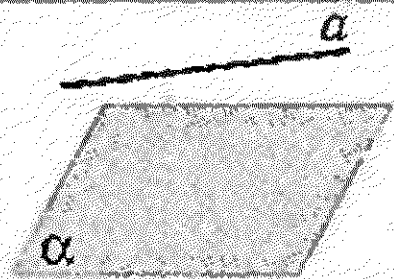
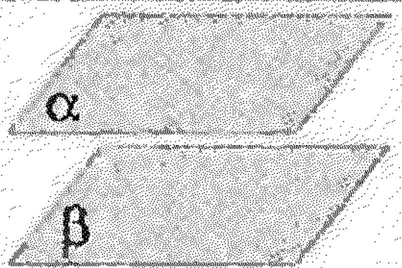
Властивості векторів у координатній формі

Таблиця 13

Властивість	Колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$	Перпендикулярність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$
Подання властивості в координатній формі	$\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$	$\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

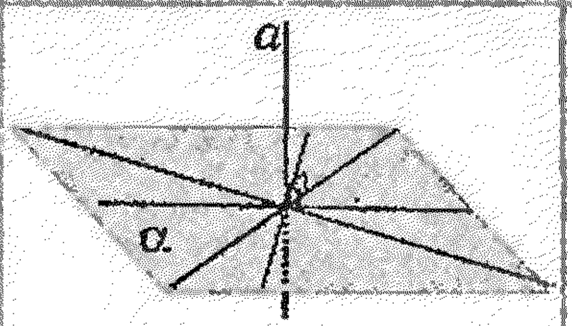
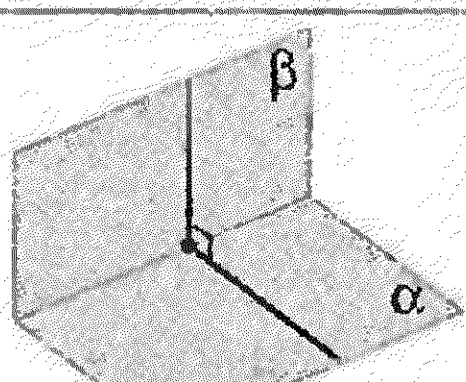
Паралельність прямих і площин

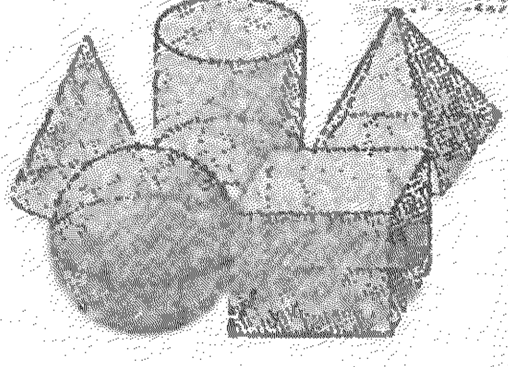
Таблиця 14

Фігури	Геометрична ілюстрація	Позначення	Суттєві ознаки
Прямі		$a \parallel b$	Лежать в одній площині і не мають спільних точок
Пряма і площина		$a \parallel \alpha$	Не мають спільних точок
Площини		$\alpha \parallel \beta$	Не мають спільних точок

Перпендикулярність прямих і площин

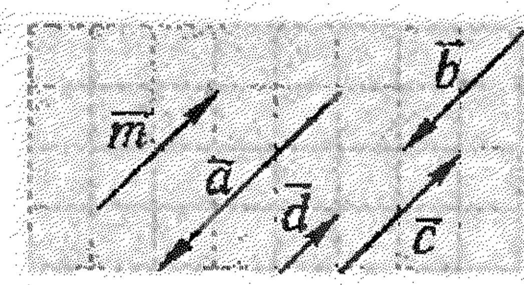
Таблиця 15

Фігури	Геометрична ілюстрація	Позначення	Суттєві ознаки
Пряма і площина		$a \perp \alpha$	Пряма перетинає площину і перпендикулярна до кожної прямої, що проходить через точку перетину прямої і площини
Площини		$\alpha \perp \beta$	Кожна з площин утворена прямими, що перпендикулярні до другої площини і проходять через точки перетину цих площин



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Вектори і координати»

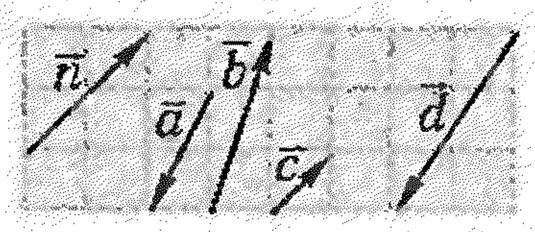
1. Який із зображених на рисунку векторів є протилежним до вектора $\vec{m}$?



А. $\vec{a}$. Б. $\vec{b}$.

В. $\vec{c}$. Г. $\vec{d}$.

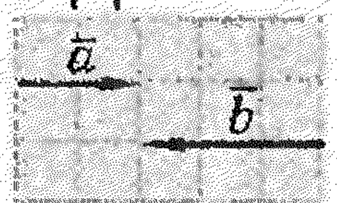
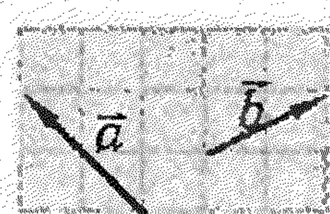
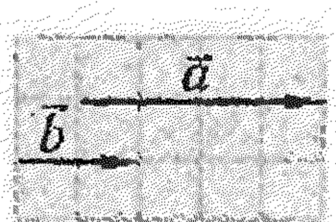
2. Який із зображених на рисунку векторів є колінеарним вектору $\vec{n}$?



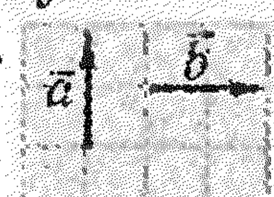
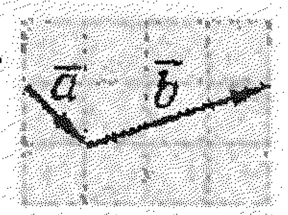
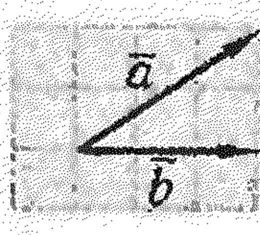
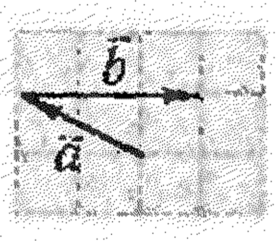
А. $\vec{a}$. Б. $\vec{b}$.

В. $\vec{c}$. Г. $\vec{d}$.

3. Для якої пари векторів, зображених на рисунку, виконується рівність $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

А.  Б.  В.  Г. 

4. На якому рисунку зображено пару векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, скалярний добуток яких від'ємний?

А.  Б.  В.  Г. 

5. Точка M — середина сторони AB трикутника ABC. Чому дорівнює сума векторів $\overline{CM}$ і $\overline{AM}$?

А. $\overline{CB}$. Б. $\overline{CA}$. В. $\overline{BC}$. Г. $\overline{AC}$.

6. Матеріальна точка, що рухається, має горизонтальну і вертикальну складові швидкості руху $\vec{v}_x$ і $\vec{v}_y$, причому, $|\vec{v}_x| = 3$ м/с, $|\vec{v}_y| = 4$ м/с. Модуль швидкості точки дорівнює ...

А. 5 м/с. Б. 7 м/с. В. 1 м/с. Г. $\sqrt{7}$ м/с.

7. Як розміщені прямі AB і CD, якщо $\overline{AB} = -3\overline{CD}$?
А. Паралельні. **Б.** Перетинаються.
В. Збігаються. **Г.** Збігаються або паралельні.

8. Яка з наведених точок знаходиться на такій самій відстані від осі x, що й точка $(-3; 4)$?
А. $(-3; 2)$. **Б.** $(3; 1)$. **В.** $(-4; -3)$. **Г.** $(-1; 4)$.

9. Укажіть координати кінця відрізка, якщо другий його кінець має координати $(7; 12)$, а середина відрізка — $(2; 3)$.
А. $(-3; 6)$. **Б.** $(-5; -6)$. **В.** $(-3; -6)$. **Г.** $(-5;6)$.

10. Дано вектори $\vec{a} = (2;-5)$ і $\vec{b} = (1;3)$. Яка з наведених рівностей є неправильною?
А. $\vec{a} - \vec{b} = (1;-8)$. **Б.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$.
В. $|\vec{a}| = 5$. **Г.** $-5\vec{a} = (-10;25)$.

11. Знайдіть радіус кола, якщо точки $(5; 7)$ і $(2; 3)$ є кінцями одного з його діаметрів.
А. 5. **Б.** 2,5. **В.** $\sqrt{29}$. **Г.** 10.

12. Точка A розташована у II чверті на відстані 2 від осі x і на відстані $\sqrt{5}$ від початку координат. Які координати має точка, симетрична даній відносно осі y?
А. $(2; 1)$. **Б.** $(1; 2)$. **В.** $(-1; -2)$. **Г.** $(-2; -1)$.

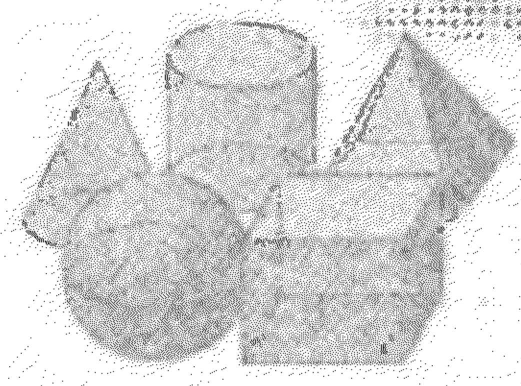
13. Яке з наведених рівнянь визначає на координатній площині коло?
А. $5x - 2y = 1$. **Б.** $y = x^2 + 1$. **В.** $y^2 = x^2 - 1$.
Г. $x^2 = 4 - y^2$.

14. Чому дорівнює ордината точки $(5; a)$, яка лежить на колі $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$?
А. -1. **Б.** 1. **В.** -3. **Г.** 3.

15. Відстань між центрами кіл $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ і $(x+2)^2 + y^2 = 9$ дорівнює ...
А. 5. **Б.** 7. **В.** 25. **Г.** $\sqrt{7}$.

16. Діагоналі протилежних граней куба ...
А. паралельні. **Б.** мимобіжні.
В. паралельні або мимобіжні. **Г.** перетинаються.

17. Укажіть взаємне розміщення прямої a і площини α, якщо пряма a перпендикулярна до двох суміжних сторін паралелограма, що лежить у площині α.
А. $a \perp \alpha$. **Б.** $a \parallel \alpha$. **В.** $a \subset \alpha$.
Г. Відповідь відрізняється від наведених.



§ 4. Вектори та їхнє застосування

У цьому параграфі систематизовано відомості про вектори на площині й узагальнено їх на випадок простору, а також розглянуто деякі застосування векторного числення у фізиці та в геометрії.

1. Вектори у просторі

Поняття вектора запроваджено для математичного описання широкого класу фізичних величин, які поділяються на скалярні і векторні. ***Скалярні величини*** характеризуються числом при обраній одиниці вимірювання. Йдеться, наприклад, про площу, масу, роботу, температуру тощо. Натомість для задання таких величин, як швидкість, переміщення, сила потрібно вказати не тільки кількісну характеристику, а й їхній напрям.

Величина, яка характеризується невід'ємним числом (модулем) при даній одиниці вимірювання та напрямом, називається векторною.

Векторні величини зображають зазвичай напрямленими відрізками (зі стрілкою на кінці). Довжина напрямленого відрізка при обраній одиниці вимірювання дорівнює модулю даної векторної величини, а напрям відрізка збігається з напрямом цієї величини. Означення того, що напрямлені відрізки мають однакові чи протилежні напрями, таке саме, як і у планіметрії, бо йдеться про паралельні відрізки, через які проходить площина.

Фізичні векторні величини з різним природничо-науковим змістом можуть бути описані одним і тим самим математичним поняттям — поняттям вектора.

Вектор являє собою математичну модель фізичних, хімічних та інших величин, яка характеризується

невід'ємним числовим значенням (модулем) і напрямом.

> ***Вектор** – від латинського vector – той, що несе.*

Вектори, як і відповідні їм векторні величини, зображаються напрямленими відрізками і в певній мірі ототожнюються з ними.

Залежно від того, де розміщені напрямлені відрізки, розрізнятимемо вектори на площині і вектори у просторі. Більшість означень і фактів формулюються без урахування того, які вектори розглядаються, за умови, що це не впливає на їхній зміст. Коли ж ця відмінність істотна, роблять відповідні уточнення.

Позначають вектори латинськими буквами зі стрілками $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{F},\vec{R},\vec{E}$ або з рисками $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{F},\bar{R},\bar{E}$. Крім того, іноді для позначення застосовують напівжирний шрифт: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{F}$... . Вектор, зображення якого має початок у точці A, а кінець — у точці B, позначають $\overline{AB}$.

Усі напрямлені відрізки, що зображають даний вектор, мають однакові довжину і напрям, які є, відповідно, ***довжиною (модулем)*** та ***напрямом*** цього вектора. Довжину вектора $\bar{a}$ позначають $|\bar{a}|$. Довжина вектора $\overline{AB}$ дорівнює відстані між точками A і B.

Напрямлений відрізок однозначно характеризується впорядкованою парою точок — початком і кінцем цього відрізка. Тому можна вважати, що вектор — це сукупність усіх упорядкованих пар різних точок, які відповідають однаково напрямленим відрізкам з однаковою довжиною. Пари точок (A, A), (B, B), ... , що збігаються, визначають вектор, який називають ***нульовим*** і позначають $\bar{0}$. Зображенням нульового вектора є довільна точка. Модуль нульового вектора вважають таким, що дорівнює нулю, а його напрям не визначається.

Вектори, модулі яких рівні між собою, а напрями збігаються, називаються рівними.

Вектори, що мають однакові або протилежні напрями, називаються колінеарними.

Іноді те, що вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ однаково напрямлені, позначають $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, протилежно напрямлені — $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, колінеарні — $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Ненульовий вектор $\bar{a}$ називають паралельним даній прямій (площині), якщо хоча б одне з його зображень належить цій прямій (площині) або паралельне їй.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним. Для довільного ненульового вектора $\bar{a}$ через $-\bar{a}$ позначають вектор, ***протилежний*** даному, тобто вектор, який має однакову з вектором $\bar{a}$ довжину, але протилежний напрям. Домовимося, що $-\bar{0}=\bar{0}$.

Побудову напрямленого відрізка, що зображає вектор $\bar{a}$ з початком у фіксованій точці А, називають відкладанням вектора від даної точки (рис. 19).

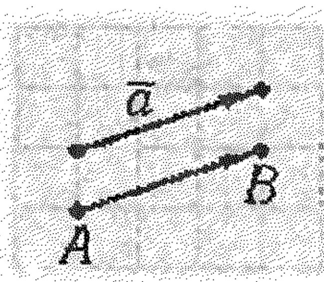


Рис. 19

Відкладання вектора $\bar{a}$ від кожної точки простору визначає перетворення, яке кожній точці M простору ставить у відповідність точку M' таку, що $\overline{MM'}=\bar{a}$, тобто точка M' є кінцем відкладеного від точки M вектора $\bar{a}$. Отримане перетворення називається ***паралельним перенесенням на вектор $\bar{a}$.***

При паралельному перенесенні точки зміщуються в одному напрямі на одну й ту саму відстань. Тому при цьому перетворенні відстані між точками не змінюються (рис. 20). Зрозуміло, що при паралельному перенесенні не змінюються і властивості фігур. **Якщо всі точки фігури перенести на вектор $\bar{a}$, то одержимо фігуру, рівну даній.**

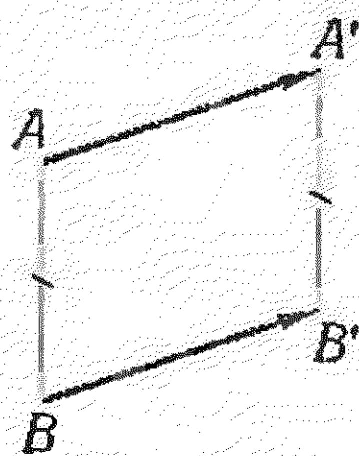


Рис. 20

Приклад 1. На зображенні куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21) зображено деякі вектори. Вказати серед них:

1) рівні вектори;

2) вектор, протилежний вектору $\overline{AA_1}$;

3) вектори, колінеарні вектору $\overline{MD}$.

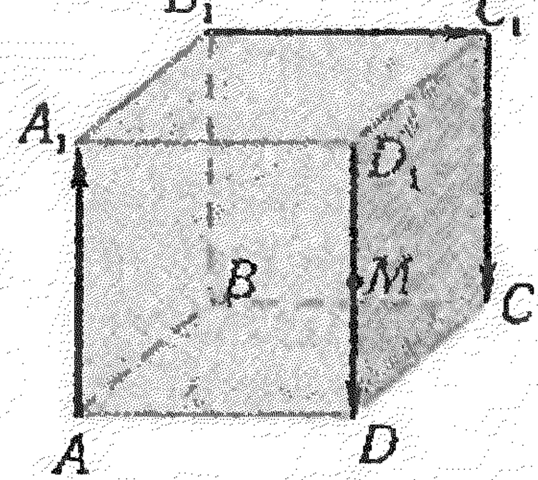


Рис. 21

☐ 1) Вектори $\overline{C_1C}$ і $\overline{D_1D}$ рівні, оскільки відрізки C_1C і D_1D рівні і паралельні, а також мають однаковий напрям.

2) Вектор $\overline{D_1D}$ протилежний вектору $\overline{AA_1}$ на підставі тих самих міркувань, що й у завданні 1).

3) Вектори $\overline{D_1D}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{C_1C}$ колінеарні вектору $\overline{MD}$, оскільки відповідні напрямлені відрізки лежать на тій самій прямій, що і відрізок MD, або паралельні їй. ■

Поняття вектора, яке найчастіше застосовують у фізиці, дещо відрізняється від наведеного вище. Це пов'язано з тим, що для задання деяких векторних величин істотними є точки їхнього прикладання. Йдеться, наприклад, про переміщення матеріальної точки, напруженість електричного поля, створеного додатним зарядом. Напрямлений відрізок, що зображає відповідну векторну величину, повинен мати певний початок – точку прикладання даної величини.

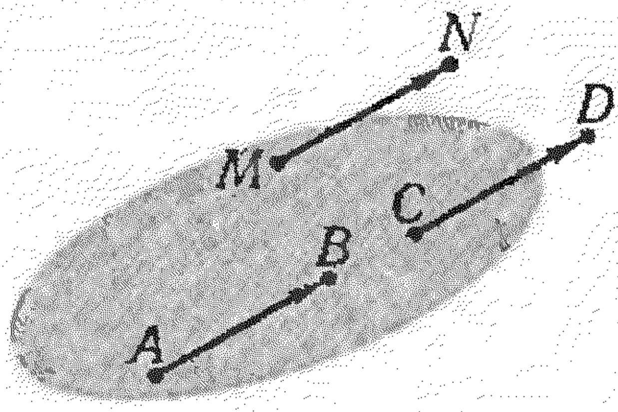


Рис. 22

Зображення інших векторних величин так жорстко не фіксується. Наприклад, силу, яка діє на тверде тіло і зображена на рис. 22 напрямленим відрізком AB, можна зобразити також напрямленим відрізком CD (але не MN). І справді, дія сили на тверде тіло не змінюється при перенесенні сили вздовж лінії її дії, але може змінитися в результаті зміни лінії дії.

Швидкість поступального руху твердого тіла, тобто швидкість руху тіла, при якому всі його точки рухаються з однаковою швидкістю (за модулем і за напрямом), може бути зображена напрямленими відрізками, що мають дану довжину, даний напрям і відкладені від довільної точки тіла.

Названа вище відмінність між векторними величинами дуже істотна в процесі виконання дій з цими величинами, наприклад, при заміні дії двох сил дією однієї сили (рівнодійної). Тому використовують різні типи векторів.

Якщо початок зображення вектора строго визначений, то вектор називають ***зв'язаним (закріпленим)***. Такий вектор можна ототожнювати з напрямленим відрізком. Отже, ***зв'язаним (закріпленим) вектором називається напрямлений відрізок***. У фізиці під вектором найчастіше розуміють саме зв'язаний вектор.

Якщо ж початок зображення вектора можна обрати довільно, то вектор називається ***вільним***. Точніше, ***вільний вектор*** *є сукупністю усіх напрямлених відрізків, які мають однакову довжину і заданий напрям.* Різні напрямлені відрізки із цієї сукупності можна вважати ***зображеннями*** даного вектора (різними «фотографіями» того самого об'єкта). На рис. 23 зображено три вільних вектори, хоча напрямлених відрізків на ньому шість. Тут один вектор має три зображення, другий — два, третій — одне.

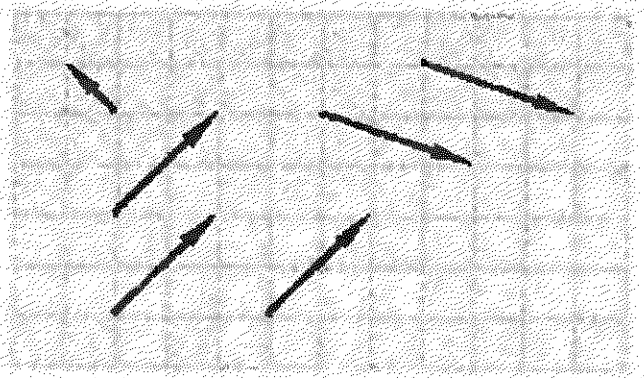


Рис. 23

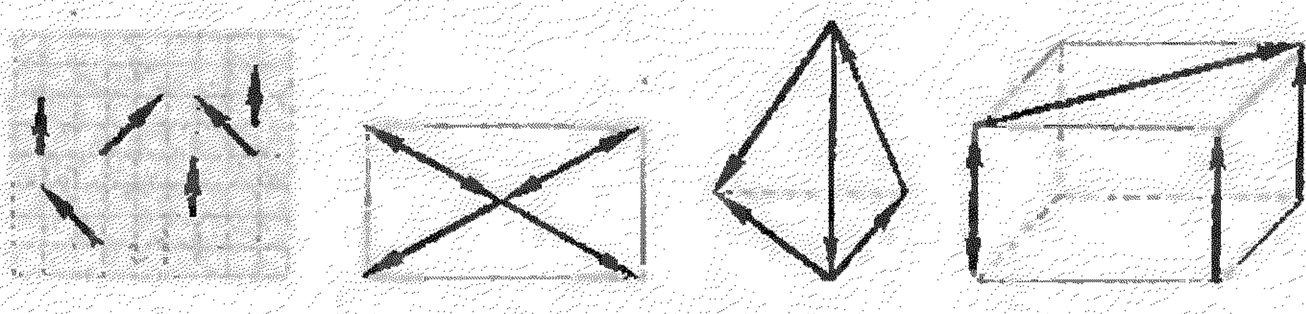
У курсі математики розглядатимемо лише вільні вектори і вживатимемо слово «вектор» у розумінні «вільний вектор».

Вільні вектори безпосередньо пов'язані з одним із важливих геометричних перетворень — паралельним перенесенням. Як було показано вище, кожен вектор визначає паралельне перенесення і навпаки: кожному паралельному перенесенню відповідає певний вектор. Паралельне перенесення відображає фігуру на фігуру, рівну їй, тобто пряму на пряму, відрізок на рівний йому відрізок, площину на площину тощо. Більш того, при паралельному перенесенні пряма відображається на пряму, яка паралельна їй або збігається з нею. Це зрозуміло з геометричної точки зору (див. рис. 20) і з механічного тлумачення паралельного перенесення. Користуючись цією властивістю, неважко довести, що при паралельному перенесенні площина відображається на площину, яка паралельна їй або збігається з нею.

Контрольні запитання

1°. Чи є векторною величиною: а) об'єм; б) переміщення точки; в) робота; г) сила земного тяжіння?

2°. Скільки різних векторів зображено на: а) рис. 24, а); б) рис. 24, б); в) рис. 24, в); г) рис. 24, г)?



а) б) в) г)

Рис. 24

3. Скільки ненульових векторів визначають: а) дві точки; б) вершини паралелограма; в) вершини куба; г) вершини тетраедра?

4°. Чи рівні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо чотирикутник $ABCD$ — паралелограм?

5°. Чи може вектор $\overline{AB}$ бути рівним вектору $\overline{BA}$?

6°. На рис. 25 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K лежить на ребрі D_1C_1.

а) Чи рівні вектори $\overline{A_1B_1}$ і $\overline{D_1C_1}$?

б) Чи є вектор $\overline{AA_1}$ протилежним вектору $\overline{C_1C}$?

в) Чи колінеарні вектори $\overline{D_1K}$ і $\overline{A_1B_1}$?

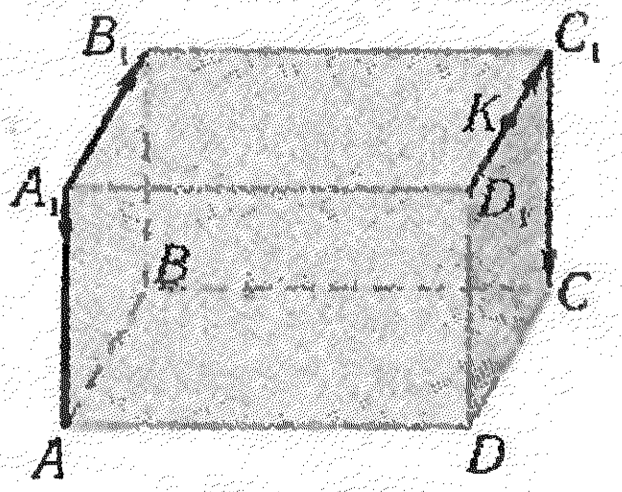


Рис. 25

7. Чи колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо прямі AB і CD:
а) перетинаються; б) паралельні;
в) збігаються; г) мимобіжні?

8. Як можуть розміщуватись прямі AB і CD у просторі, якщо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ — неколінеарні?

9. Коли напрямлений відрізок і його проекція на деяку площину зображають один і той самий вектор?

10. Даний вектор відкладено від усіх точок: а) відрізка; б) трикутника; в) тетраедра. Яку фігуру утворюють кінці отриманих відрізків?

2. Дії над векторами

З векторами простору, як і з векторами площини, виконують різні операції, які за своїми властивостями подібні до відповідних алгебраїчних операцій над числами.

Додавання векторів. Два поступальних переміщення тіла з пункту A в пункт B і далі — з пункту B у пункт C — можна замінити одним переміщенням із A в C. Узагальнення цієї операції на довільні вектори дає операцію додавання векторів.

Нехай дано два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$. Від довільної точки A відкладемо вектор $\bar{a}$, тобто знайдемо таку точку B, що $\overline{AB} = \bar{a}$ (рис. 26). Потім від точки B відкладемо вектор $\bar{b}$, тобто знайдемо таку точку C, що $\overline{BC} = \bar{b}$.

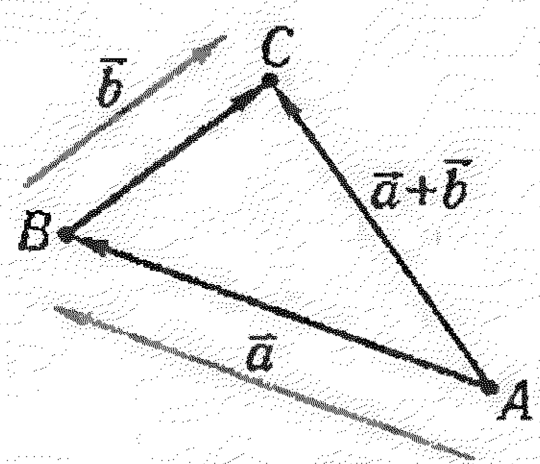


Рис. 26

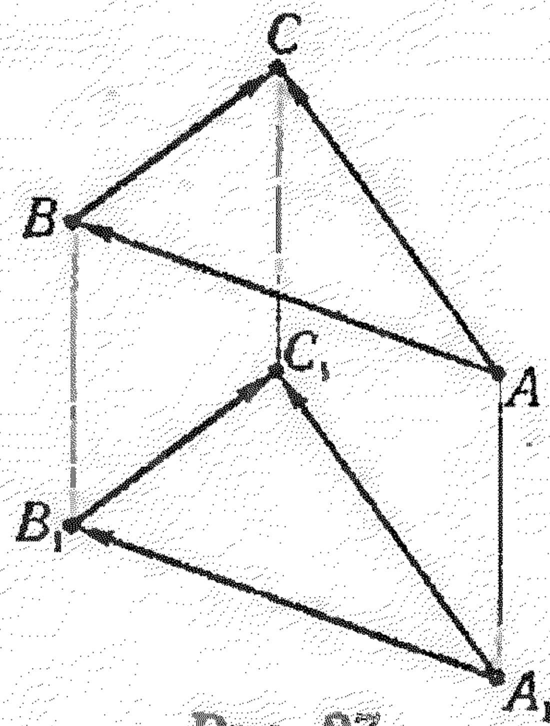


Рис. 27

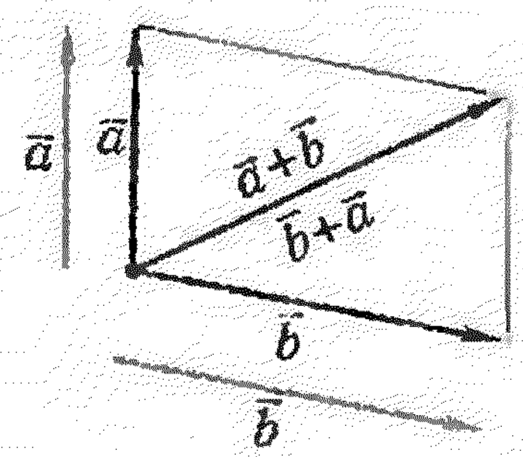


Рис. 28

Вектор $\overline{AC}$ називається сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і позначається через $\vec{a}+\vec{b}$.

Сума $\vec{a}+\vec{b}$ не залежить від вибору точки A. Якщо замінимо A іншою точкою простору A_1, то, виконавши аналогічні дії, дістанемо вектор $\overline{A_1C_1}$, що дорівнює вектору $\overline{AC}$ (рис. 27).

Сформульоване правило побудови суми векторів називають ***правилом трикутника***. У символічному вигляді його можна записати так:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Якщо ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то їхню суму зручно знаходити за допомогою ***правила паралелограма*** (рис. 28): відкладаємо вектори від однієї точки, на них будуємо паралелограм, відтак напрямлена діагональ паралелограма з початком у вибраній точці дорівнює сумі векторів. На рис. 28 бачимо, що правила трикутника і паралелограма дають однакові результати.

При додаванні векторів виконуються такі властивості.

Властивість 1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переставний закон).

Властивість 2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (сполучний закон).

Властивість 3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Властивість 4. $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Суму кількох векторів знаходять, додаючи їх послідовно. Наприклад, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$. Відповідно до сполучного закону, результат додавання векторів не залежить від групування доданків.

Віднімання векторів. ***Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор***

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

При відніманні векторів залишається правильною вже відома вам властивість: якщо $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, то $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. Справді, $\vec{b}+\vec{c}=$ $=\vec{b}+\left(\vec{a}+(-\vec{b})\right)=\vec{b}+\left((-\vec{b})+\vec{a}\right)=\left(\vec{b}+(-\vec{b})\right)+\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}.$

Геометрична побудова різниці $\vec{a}-\vec{b}$ також ґрунтується на додаванні векторів $\vec{a}$ та $-\vec{b}$.

Множення вектора на число. Існує кілька операцій множення, пов'язаних із векторами. Однією з них є операція множення вектора на число, яка призводить до «розтягування» чи «стискання» вектора, а також до зміни напряму на протилежний, якщо множник — від'ємне число.

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число $x \neq 0$ називається вектор, довжина якого дорівнює $|x| \cdot |\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $x > 0$, і протилежний напряму $\vec{a}$, якщо $x < 0$.

Добуток вектора $\vec{a}$ на число x позначають $x\vec{a}$ (числовий множник пишуть зліва).

Якщо $\vec{a}=\vec{0}$ чи $x=0$, то вважають, що $x\vec{a}=\vec{0}$.

Якщо для двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a}=x\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні. Причому $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ при $x>0$ і $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ при $x<0$.

Наступні рівності виражають основні властивості множення вектора на число.

Властивість 1. $x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$ ***(сполучний закон).***

Властивість 2. $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$ ***(розподільний закон відносно додавання чисел).***

Властивість 3. $x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=x\vec{a}+x\vec{b}$ ***(розподільний закон відносно додавання векторів).***

Скалярний добуток векторів. Для означення скалярного добутку векторів потрібно ввести поняття кута між векторами.

Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — ненульові вектори (рис. 29, а). Відкладемо від довільної точки O вектори $\vec{a}=\overline{OA}$, $\vec{b}=\overline{OB}$ (рис. 29, б). Кутова міра кута AOB не залежить від розміщення точки O і називається ***кутом між векторами*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Кут між векторами змінюється у межах від 0° до 180°. Якщо хоча б один із векторів нульовий, то кут між цими векторами невизначений. Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0°, а між протилежно напрямленими — 180°. Ненульові вектори називаються ***перпендикулярними***, якщо кут між ними дорівнює 90°. Під ***кутом між напрямами*** розуміють кут між двома довільними векторами, що мають ці напрями.

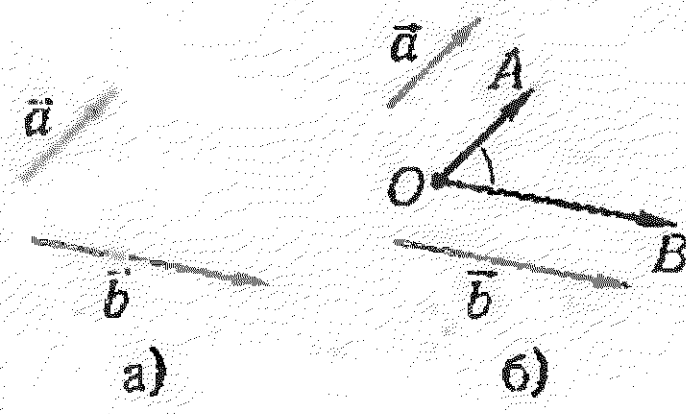


Рис. 29

Скалярним добутком двох ненульових векторів простору називається число, яке дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$, тобто:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо принаймні один із векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ — нульовий, то вважають, що $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Згадавши фізичну формулу, за допомогою якої визначають роботу A виконану силою $\vec{F}$, що діє на тіло при переміщенні $\vec{s}$ (рис. 30), неважко побачити можливість її запису з використанням скалярного добутку:

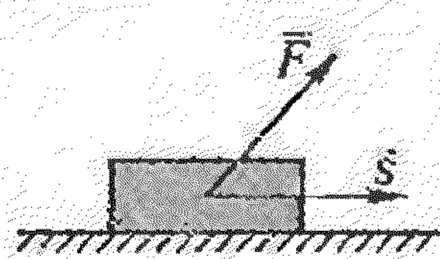


Рис. 30

$$A=\vec{F}\cdot\vec{s}.$$

Отже, векторний апарат, властивості скалярного добутку дають змогу ефективніше вивчати відповідну фізичну величину.

Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні тоді і лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Справді, рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ для ненульових векторів рівносильна рівності $\cos\varphi=0$, тобто кут між векторами дорівнює 90°.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називається ***скалярним квадратом вектора*** $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^2$. Таким чином,

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток векторів має такі властивості.

Властивість 1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ***(переставний закон).***

Властивість 2. $(x\vec{a})\cdot\vec{b}=x(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ***(сполучний закон).***

Властивість 3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ ***(розподільний закон).***

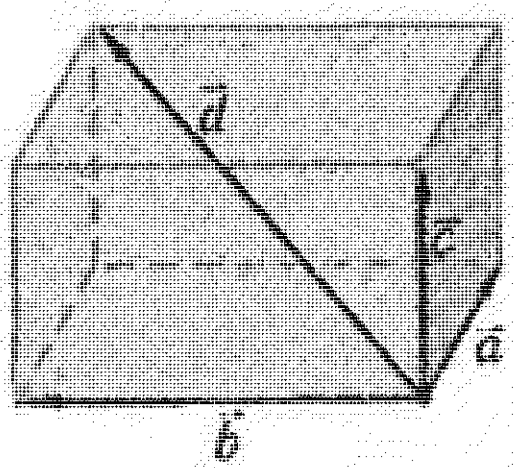


Рис. 31

Для знаходження суми трьох ненульових векторів простору, які не паралельні одній площині, користуються ***правилом паралелепіпеда*** (рис. 31): відкладають дані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ від однієї точки і на побудованих відрізках будують паралелепіпед. Напрямлена діагональ паралелепіпеда з початком у вибраній точці і кінцем у протилежній вершині паралелепіпеда дорівнює сумі трьох векторів: $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. У цьому неважко переконатись, знаходячи спочатку суму $\vec{a}+\vec{b}$ за правилом паралелограма, а потім додаючи до неї вектор $\vec{c}$ за тим самим правилом.

Приклад 2. На рис. 32 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 1.

1) Знайти вектор: а) $\overline{AB}+\overline{A_1D_1}$; б) $\overline{AB}+\overline{A_1D_1}+\overline{CC_1}$.

2) Обчислити скалярний добуток: а) $\overline{CD}\cdot\overline{BB_1}$; б) $\overline{AD_1}\cdot\overline{AB_1}$.

☐ 1) а) Оскільки $\overline{A_1D_1}=\overline{AD}$, то $\overline{AB}+\overline{A_1D_1}=\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$, за правилом паралелограма.

б) Використовуючи рівність $\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AD}$ і правило паралелепіпеда, маємо:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}.$$

2) а) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$, за означенням скалярного добутку.

б) Трикутник AD_1B_1 є правильним, оскільки діагоналі AD_1, D_1B_1, B_1A рівних квадратів рівні. Тому $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 60° = 1$. ■

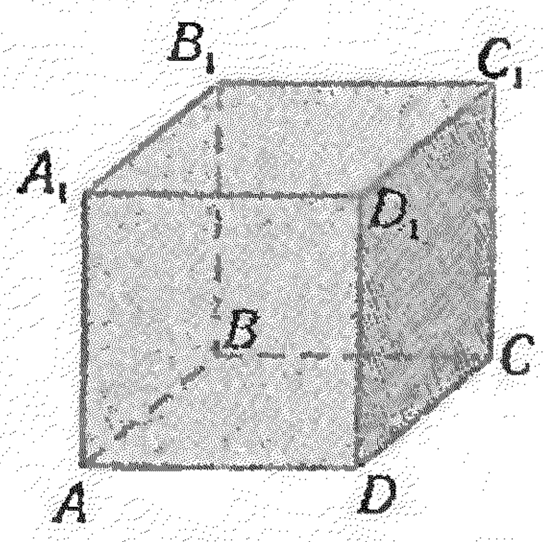


Рис. 32

Відповідь. 1) а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) а) 0; б) 1.

Обґрунтування більшості властивостей операцій над векторами можна одержати, користуючись їхнім геометричним тлумаченням.

Наприклад, аналізуючи рис. 28, дістанемо доведення переставного закону додавання векторів: виконавши побудову сум $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{b} + \vec{a}$, згідно з правилом паралелограма, матимемо ту саму напрямлену діагональ паралелограма.

У правильності розподільних законів множення вектора на число також неважко переконатись за допомогою геометричних побудов. Доведення цих властивостей полягає у порівнянні лівої і правої частин відповідної рівності після певних перетворень.

Доведемо другу властивість скалярного добутку векторів (перша властивість випливає з визначення скалярного добутку). При $x > 0$ $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = |x\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = x \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$, оскільки кут φ між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює куту між $x\vec{a}$ та $\vec{b}$. Якщо ж $x < 0$, то кут між $x\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює $180° - \varphi$. Таким чином,

$$(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = |x\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180° - \varphi) = -|x| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = x \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

У випадку, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю, властивість стає очевидною.

Зазначені властивості дають змогу перетворювати вирази зі скалярним добутком векторів за правилами алгебри. Наприклад:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Приклад 3. Довжини всіх ребер паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють одиниці, $AA_1 \perp ABC$, а кут BAD дорівнює 60°. Обчисліть:

1) довжину діагоналі AC_1;
2) кут між діагоналями DB_1 і BD_1.

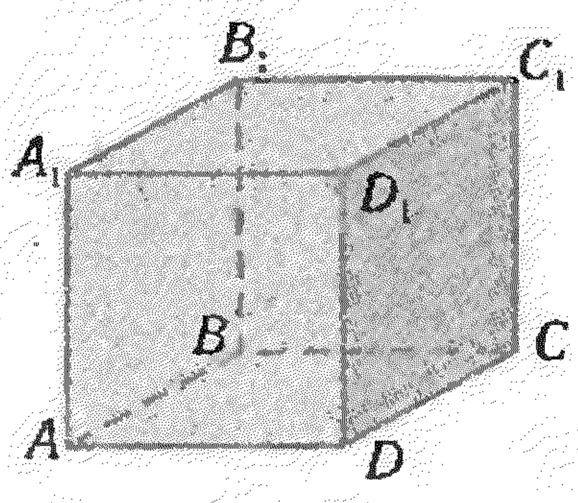


Рис. 33

☐ 1) Побудуємо зображення куба (рис. 33). Користуючись правилом паралелепіпеда, маємо: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. Знайдемо за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ довжину вектора $\overrightarrow{AC_1}$:

$$\left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2} =$$

$$= \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}} =$$

$$= \sqrt{1+1+1+2\cos 60^\circ + 2\cdot 0 + 2\cdot 0} = \sqrt{4} = 2.$$

2) Кут між діагоналями DB_1 і BD_1 знайдемо, обчисливши кут між відповідними векторами: $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$.

Знайдемо спочатку скалярний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BD_1} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1})\cdot(\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) =$$

$$= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} -$$

$$- \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{DD_1}^2 - \overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{DC}.$$

Оскільки $\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$, то

$$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BD_1} = 0 - 1 - \cos 120^\circ + 0 - \cos 120^\circ - 1 + 1 + 0 + 0 = 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{DB_1}$ і $\overrightarrow{BD_1}$ перпендикулярні, а тому перпендикулярні і відповідні їм відрізки. ■

Відповідь. 1) 2; 2) 90°.

✓ Контрольні запитання

1°. На рис. 34 зображено паралелограм $ABCD$, O — точка перетину його діагоналей.

а) Якому з наведених векторів рівний вектор $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$?

б) Чи правильно, що вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ рівний вектору $\overrightarrow{OD}$?

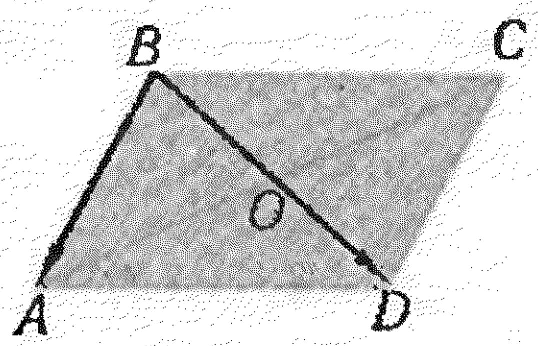


Рис. 34

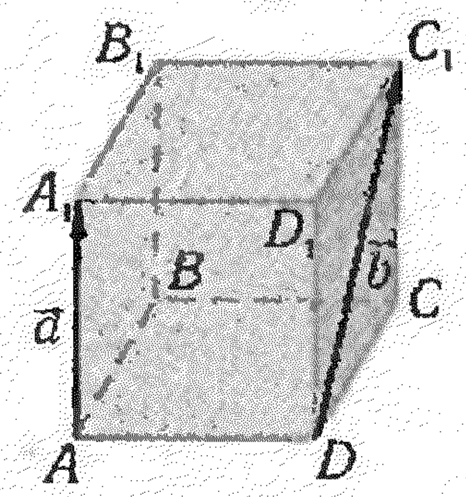


Рис. 35

в) Чи правильно, що вектор $\overline{DC} + \overline{BO}$ рівний вектору $\overline{AO}$?

2°. На рис. 35 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Якому з наведених векторів рівний вектор $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1C}$?

б) Чи правильно, що вектор $\bar{a} + \bar{b}$ рівний вектору $\overline{DC}$?

в) Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\vec{b}$?

3. Які значення може набувати довжина суми двох векторів, якщо довжини доданків дорівнюють 5 та 4?

4. Чи може довжина суми двох векторів: а) дорівнювати сумі їхніх довжин; б) бути більшою від суми довжин; в) бути меншою від модуля різниці їхніх довжин?

5. Чи почне рухатися точка, якщо на неї одночасно діятимуть: а) дві протилежні сили; б) три рівні за модулем сили, розміщені під однаковим кутом кожна відносно інших?

6°. Як напрямлений по відношенню до ненульового вектора $\bar{a}$ вектор: а) $2\vec{a}$; б) $-\frac{3}{5}\vec{a}$; в) $k\vec{a}$?

7°. Довжина якого з векторів $\bar{a}, -2\bar{a}, \frac{1}{3}\vec{a}$ є найбільшою?

8. Як розміщені точки A, B, M, за умови, що: а) $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; б) $\overline{AM} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$; в) $\overline{AM} = 3\overline{AB}$; г) $\overline{AM} = \frac{2}{5}\overline{AB}$?

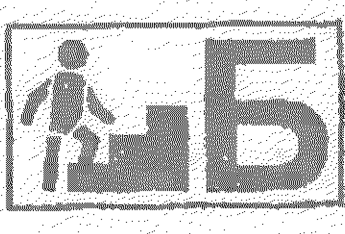
9°. Чи може кут між векторами дорівнювати: а) 7°; б) 180°; в) 250°?

10. Як розміщені ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо: а) $\bar{a} = 3\bar{b}$; б) $\bar{a} + \bar{b} = 2(\bar{a} - \bar{b})$; в) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$?

11°. Які значення може мати кут між векторами $\bar{a}$ і $\vec{b}$, якщо: а) $\bar{a} \cdot \vec{b} > 0$; б) $\bar{a} \cdot \vec{b} < 0$?

12. Чи рівні вектори $\bar{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$?

3. Розкладання вектора на складові



У фізиці та техніці часто доцільно розкласти векторну величину на суму складових, що мають задані напрями. Наприклад:

1) розкласти переміщення тіла на дві складові — горизонтальну і вертикальну (рис. 36);

2) розкласти прискорення точки, яка рухається по колу, на дві складові — дотичну (напрямлену по дотичній до кола) і нормальну (напрямлену перпендикулярно до дотичної) (рис. 37);

3) розкласти силу тяжіння вантажу, що висить на тринозі, на три складові, напрямлені вздовж опор (рис. 38).

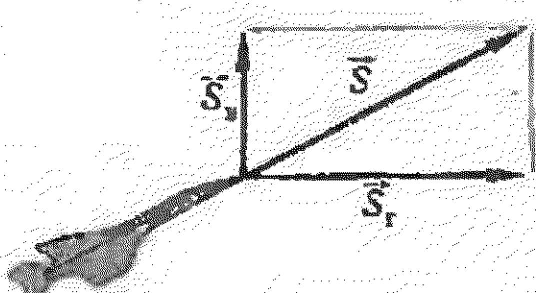


Рис. 36

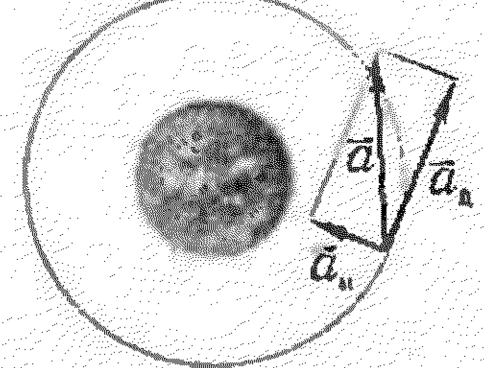


Рис. 37

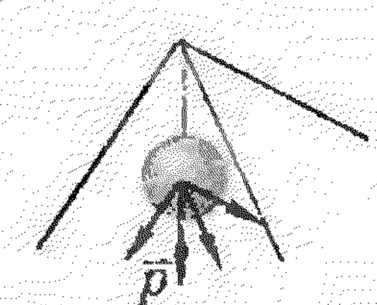


Рис. 38

Розглянуті приклади дають змогу сформулювати задачу про розкладання вектора площини на складові, паралельні двом даним прямим a і b, у загальному вигляді, а саме, зобразити вектор $\vec{m}$ як суму двох векторів $\vec{m}_a$ і $\vec{m}_b$, що паралельні прямим a і b: $\vec{m} = \vec{m}_a + \vec{m}_b$. Вектори $\vec{m}_a$ і $\vec{m}_b$ у цьому разі називають ***складовими*** даного вектора $\vec{m}$.

Аналогічно формулюється і задача розкладання вектора простору на три складові.

Задача знаходження складових даного вектора обернена до задачі знаходження вектора за його складовими, тобто суми векторів. На площині вона завжди має розв'язок, якщо дані прямі перетинаються.

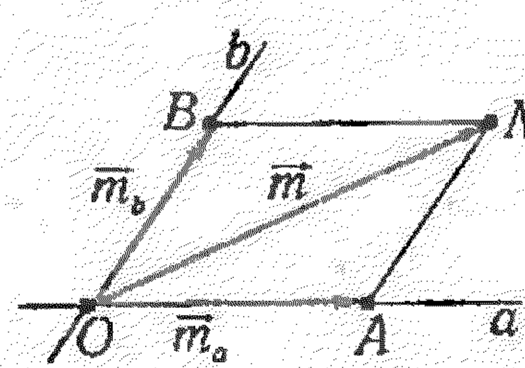


Рис. 39

Щоб розкласти вектор $\vec{m}$ площини на складові, які паралельні двом прямим a і b, що перетинаються (рис. 39), треба побудувати паралелограм $OAMB$ зі сторонами на даних прямих, у якого діагональ OM збігається з вектором $\vec{m}$, а O — точка перетину прямих a і b. Тоді вектори $\vec{m}_a = \overline{OA}$ і $\vec{m}_b = \overline{OB}$ є шуканими складовими вектора $\vec{m} = \overline{OM}$, оскільки, за правилом паралелограма, $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$. Якщо вектор $\overline{m}$ паралельний одній із даних прямих, наприклад, a, то складова $\overline{m}_b$ перетворюється на нуль, і навпаки.

Розкласти довільний вектор простору на дві складові, паралельні якійсь площині, у загальному випадку неможливо, оскільки три вектори простору не завжди можна «помістити» в одну площину. Однак довільний вектор $\overline{m}$ простору завжди можна розкласти на три складові, тобто зобразити його у вигляді суми трьох векторів, паралельних трьом прямим, за умови, що ці прямі не паралельні якійсь площині. Для цього через довільну точку O проведемо прямі a, b, c, паралельні даним прямим, і побудуємо паралелепіпед $OAMBCA_1M_1B_1$ (рис. 40), сторони якого лежать на проведених прямих, а діагональ OM_1 збігається з вектором $\overline{m}$, відкладеним від точки O. Тоді, за правилом паралелепіпеда: $\overline{OM_1} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Тобто шуканими складовими вектора $\overline{m}$ є вектори $\overline{m}_a = \overline{OA}$, $\overline{m}_b = \overline{OB}$, $\overline{m}_c = \overline{OC}$.

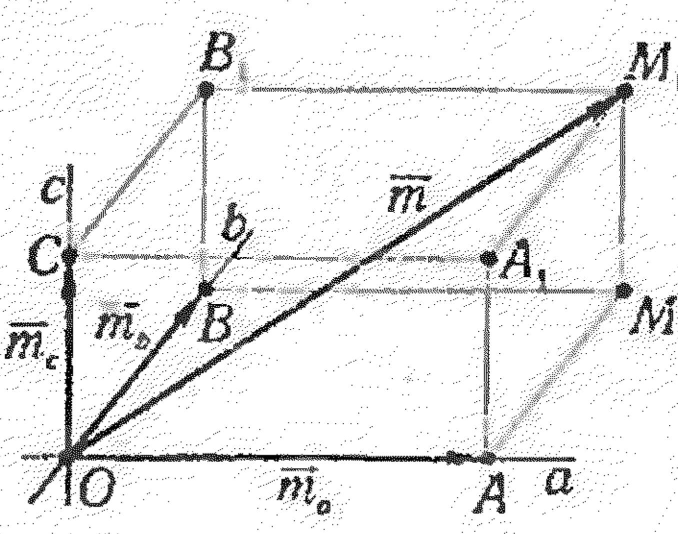


Рис. 40

Якщо вектор $\overline{m}$ паралельний площині, що проходить через дві побудовані прямі, то відповідна третій прямій складова перетворюється в нуль. У цьому випадку задача, по суті, зводиться до розкладання вектора площини на дві складові.

Результат розв'язання розглянутої задачі про розкладання векторів на складові у просторі можна виразити в такому твердженні.

Теорема 1 *(про розкладання вектора на складові).*

Ненульовий вектор простору можна однозначно розкласти на складові, які паралельні трьом прямим, що не паралельні якійсь площині.

Існування вказаного у теоремі 1 розкладання доведено вище. Єдиність розкладання вектора на складові є наслідком однозначності побудови відповідного паралелепіпеда.

Приклад 4. На рис. 41 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O_1 — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$.

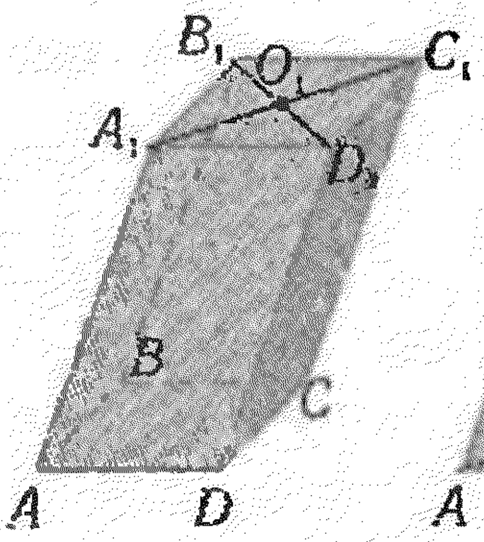


Рис. 41

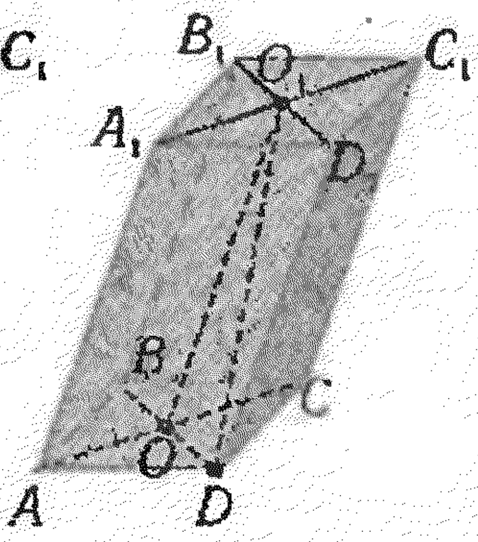


Рис. 42

Розкласти вектор $\overline{DO_1}$ на складові, які паралельні прямим AD, AB, AA_1.

□ Нехай O — точка перетину діагоналей грані $ABCD$ (рис. 42). З трикутника ODO_1 маємо: $\overline{DO_1} = \overline{DO} + \overline{OO_1}$. Вектор $\overline{OO_1}$ є рівний вектору $\overline{DD_1}$ і паралельний прямій AA_1 (чому?). Тому він є шуканою складовою. Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то

$$\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}\left(\overline{DA} + \overline{DC}\right).$$

Оскільки вектори $\overline{DA}$ і $\overline{DC}$ паралельні відповідно прямим AD і AB, то шукане розкладання має вигляд:

$$\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \overline{DD_1}. \blacksquare$$

Відповідь. $\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \overline{DD_1}$.

Розглянуте вище розкладання вектора на складові можна уточнити, користуючись умовою колінеарності векторів.

Теорема 2 *(про колінеарні вектори).*

Якщо ненульовий вектор $\bar{n}$ колінеарний ненульовому вектору $\bar{a}$, то існує таке єдине число x, що $\bar{n} = x\bar{a}$.

□ Справді, колінеарність векторів $\bar{n}$ і $\bar{a}$ означає, що їхні напрями збігаються або ж протилежні. Тому вектор $\bar{a}$ можна так «розтягнути» чи «стиснути», змінивши при необхідності його напрям, що він збігатиметься з вектором $\bar{n}$. А саме, якщо $\bar{n}$ і $\bar{a}$ однаково напрямлені, то $\bar{n} = x\bar{a}$, де $x = \frac{|\bar{n}|}{|\bar{a}|}$. Якщо $\bar{n}$ і $\bar{a}$ напрямлені протилежно, то $\bar{n} = x\bar{a}$, де $x = -\frac{|\bar{n}|}{|\bar{a}|}$. Із рівності $\bar{n} = x\bar{a}$

число x визначається однозначно: його модуль дорівнює $\frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|}$, а знак залежить від взаємної напрямленості векторів $\vec{n}$ і $\vec{a}$. ■

Рівність $\vec{n}=x\vec{a}$ є необхідною умовою колінеарності вектора $\vec{n}$ ненульовому вектору $\vec{a}$. Із означення множення вектора на число випливає, що ця умова є і достатньою. Однак про випадок, коли $\vec{n}=\vec{0}$, не йдеться, оскільки колінеарність векторів, один з яких дорівнює нулю, поки що не визначалась. Щоб не мати винятків, вважатимемо, що ***нульовий вектор колінеарний довільному вектору***. Тоді вказана рівність є необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів без жодних обмежень.

Розглянуте твердження про розкладання векторів і умова колінеарності дають змогу виразити кожний вектор простору через три довільні ненульові вектори, які одночасно не паралельні жодній площині, або ж, інакше кажучи, зображення яких не належить одній площині. Такі вектори називаються ***некомпланарними***. Якщо ж всі дані вектори паралельні якійсь площині, то вони ***компланарні***.

Теорема 3 *(про розкладання вектора за некомпланарними векторами).*

Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — некомпланарні вектори, тоді кожний вектор $\vec{m}$ простору можна однозначно записати у вигляді:

$$\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c},$$

де x, y, z – деякі числа.

□ Нехай a, b, c — прямі, які паралельні відповідно векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ і проходять через довільну точку O простору. З некомпланарності векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ випливає, що ці прямі не паралельні якійсь одній площині. Тоді кожний ненульовий вектор простору можна записати як суму складових векторів, паралельних прямим a, b, c: $\vec{m}=\vec{m}_a+\vec{m}_b+\vec{m}_c$. Оскільки вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ненульові і $\vec{m}_a \parallel \vec{a}$, $\vec{m}_b \parallel \vec{b}$, $\vec{m}_c \parallel \vec{c}$, то існують такі числа x, y, z, що

$$\vec{m}_a=x\vec{a}, \vec{m}_b=y\vec{b}, \vec{m}_c=z\vec{c}.$$

Підставивши ці значення у вираз $\vec{m}=\vec{m}_a+\vec{m}_b+\vec{m}_c$, дістанемо потрібний вираз. Однозначність знайденого розкладання випливає з однозначності розкладання вектора на складові і однозначності запису $\vec{n} = x\vec{a}$ для колінеарних векторів $\vec{n}$ і $\vec{a}$. ■

Наведену в теоремі 3 рівність називають ***розкладанням вектора*** $\vec{m}$ за векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а числа x, y, z називають ***коефіцієнтами розкладання.*** Розкладання $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}$ вектора площини $\vec{m}$ за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна вважати окремим випадком попереднього, коли вектори $\vec{m}, \vec{a}, \vec{b}$ паралельні одній площині. Тоді третя складова дорівнює нулю, тому $z = 0$ і розкладання $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ набуває вигляду $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Приклад 5. Сила, що діє на матеріальну точку, розкладена на три складові за попарно перпендикулярними напрямами. Знайти модулі складових, якщо модуль даної сили дорівнює 20 Н, а кути, утворені складовими з напрямом дії сили, дорівнюють 60°, 60°, 45°.

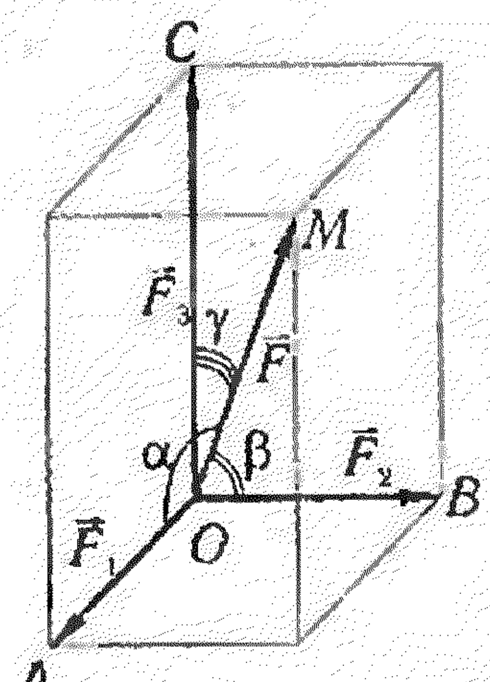


Рис. 43

□ Геометричну побудову розкладання вектора сили $\vec{F}$ уздовж попарно перпендикулярних прямих показано на рис. 43. Тут на діагоналі OM прямокутного паралелепіпеда зображено вектор сили $\vec{F}$, а складові $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ — на ребрах OA, OB, OC. Трикутники OAM, OBM і OCM — прямокутні з прямими кутами при вершинах A, B, C. З цих трикутників для модулів складових маємо: $OA = OM \cdot \cos\alpha$; $OB = OM \cdot \cos\beta$; $OC = OM \cdot \cos\gamma$, де α, β, γ — кути між вектором $\vec{F}$ і складовими $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ відповідно. За даними умови маємо: $OA = OM \cdot \cos 60° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ (Н);

$$OB = OM \cdot \cos 60° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ (Н)};$$

$$OC = OM \cdot \cos 45° = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 14 \text{ (Н)}.$$

Відповідь. 10 Н, 10 Н, ≈ 14 Н.

Контрольні запитання

1°. Чи завжди ненульовий вектор площини можна розкласти на дві складові, які паралельні двом даним прямим?

2°. Величина рівнодійної двох взаємно перпендикулярних сил дорівнює 10 Н. Якою є величина однієї зі складових, якщо вона утворює з рівнодійною кут 30°?

3. Чи можна силу в 1 Н розкласти на дві складові, модулі яких дорівнюють: а) 1 Н; б) 100 Н; в) 0,3 Н?

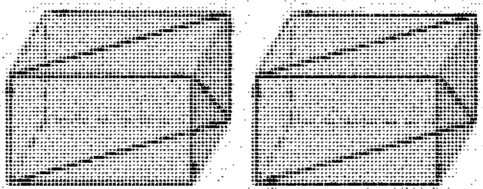
4°. Чи завжди ненульовий вектор простору можна розкласти на три складові, які паралельні трьом даним прямим?

5. Яких значень може набувати модуль вертикальної складової швидкості точки, якщо модуль швидкості дорівнює 360 км/год?

6. Чи компланарні вектори простору $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$?

Графічні вправи

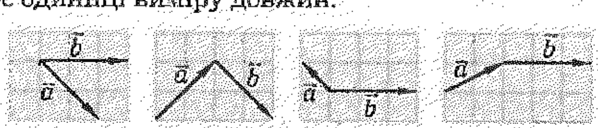
1. Скільки різних векторів зображено на: а) рис. 44, а); б) рис. 44, б)?



а) б)

Рис. 44

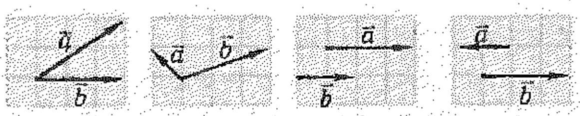
2. Для кожної пари векторів, зображених на рис. 45, укажіть значення скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці виміру довжин.



а) б) в) г)

Рис. 45

3. Укажіть, на якому з рис. 46, а)–г) зображені вектори, для яких виконується рівність: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.



а) б) в) г)

Рис. 46

4. Зобразіть три довільних вектори, позначивши їх через $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Побудуйте вектори:

1) $\vec{a}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

4) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 5) $3\vec{a}$; 6) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$;

7) $3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{d}-4\vec{c}$; 8) $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$.

5. На рис. 47 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і вектори $\vec{a}=\overline{AB}, \vec{b}=\overline{BC_1}, \vec{c}=\overline{C_1A_1}, \vec{d}=\overline{B_1M}$, де M — середина ребра AA_1.

1) Знайдіть суму векторів:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{a}+\vec{d}$.

2) Визначте знак скалярного добутку:

а) $\vec{a}\cdot\vec{d}$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; в) $\vec{a}\cdot\vec{c}$.

3) Виразіть через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектори:

а) $\overline{CC_1}$; б) $\overline{BD_1}$; в) $\overline{A_1C}$.

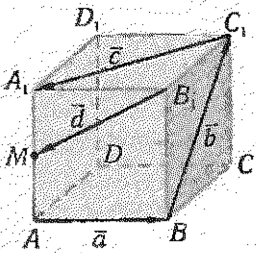


Рис. 47

6. Зобразіть даний вектор $\vec{p}$ як суму складових, що паралельні даним прямим: а) на рис. 48, а); б) на рис. 48, б).

а) б)

Рис. 48

Задачі

74°. Точки A, B, C, D — вершини паралелограма $ABCD$, O — точка перетину його діагоналей, а M – середина сторони AB.

1) Від точки B відкладіть вектор $\overline{CB}$ і протилежний йому вектор.

2) Укажіть дві пари точок, що визначають один вектор.

3) Укажіть вектори, однаково напрямлені з вектором $\overline{AC}$.

4) Укажіть вектори, які колінеарні вектору $\overline{OM}$.

75°. Мандрівник пройшов 20 км на схід, а потім 30 км на північ. Зобразіть вектор переміщення мандрівника у масштабі 10 км в 1 см. На якій відстані від початкової точки опинився мандрівник?

76. Доведіть, що коли точки A, B, C, D не лежать на одній прямій і ненульові вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ рівні, то ці точки є вершинами паралелограма.

77. Доведіть, що коли $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{AC} = \overline{BD}$.

78. Підрахуйте кількість ненульових векторів, які визначаються вершинами:

1) тетраедра; 2) куба; 3) паралелепіпеда.

79°. Доведіть, що при паралельному перенесенні площина відображається на площину.

80°. Спростіть вираз:

1) $\overline{BC} + \overline{AB}$; 2) $\overline{BA} - \overline{CD} + \overline{CA}$;

3) $\overline{AB} + \overline{MN} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{PQ} + \overline{NM}$.

81°. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть:

1) $\overline{BC} + \overline{CC_1} + \overline{C_1B_1}$; 2) $\overline{CB} + \overline{B_1A_1} + \overline{AD_1} + \overline{D_1C_1}$;

3) $\overline{AC_1} + \overline{D_1A_1} - \overline{DB} + \overline{D_1D}$; 4) $\overline{D_1C} + \overline{AA_1} - \overline{BC} - \overline{CC_1}$.

82°. Вектори $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ мають однакову довжину v. Кут між ними дорівнює φ. Знайдіть модуль суми та різниці векторів, якщо:

1) $v = 4$, $\varphi = 60°$; 2) $v = 3$, $\varphi = 180°$;

3) $v = 5$, $\varphi = 42°$; 4) $v = 7{,}8$, $\varphi = 17°12'$.

83°. Вантаж опускається на парашуті зі швидкістю 3 м/с. Вітер переміщує вантаж уздовж поверхні землі зі швидкістю 2 м/с. Під яким кутом до вертикалі опускатиметься вантаж за цих умов?

84. З'ясуйте геометричний зміст рівності:

1) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$;

3) $\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AB} - \overline{AC}\right)^2$; 4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 2\left(\vec{a}^3 + \vec{b}^2\right)$.

85. Доведіть, що для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконуються нерівності $\left|\vec{a} - |\vec{b}|\right| \le |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

86. Доведіть, що довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнюють одна одній тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні.

87. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a.

1°) Обчисліть скалярний добуток: а) $\overline{AA_1}\cdot\overline{BC}$; б) $\overline{AB_1}\cdot\overline{C_1D}$; в) $\overline{AC}\cdot\overline{B_1D_1}$.

2) Знайдіть довжину діагоналі AC_1.

3) Знайдіть кут між діагоналями AC_1 і CB_1.

88. Довжини всіх ребер паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють одиниці, $AA_1 \perp ABC$, а кут BAD дорівнює 60°. Обчисліть довжину діагоналі DB_1 і кут між діагоналями DB_1 і BD_1.

89°. Швидкість точки, модуль якої дорівнює 5 м/с, розкладена на дві взаємно перпендикулярні складові. Знайдіть модуль однієї з них, якщо: 1) модуль другої складової дорівнює 2 м/с; 2) кут, утворений цією складовою з напрямом швидкості, дорівнює 60°.

90. Сила, яка діє на матеріальну точку, розкладена на дві складові за напрямами, що утворюють кути α і β з напрямом дії сили. Знайдіть модулі складових, якщо модуль даної сили дорівнює 8 Н і:

1) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$; 2) $\alpha = 32°$, $\beta = 57°$; 3) $\alpha = 26°$, $\beta = 146°$.

91. Сила, що діє на матеріальну точку, розкладена на три складові за попарно перпендикулярними напрямами. Знайдіть модулі складових, якщо модуль даної сили дорівнює 10 Н, а кути, утворені складовими з напрямом дії сили, дорівнюють:

1) 45°, 60°, 120°; 2) 30°, $\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

92. Доведіть, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перетинає площину і перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині і проходять через точку перетину даної прямої з площиною.

93. Дано паралелограм $ABCD$, O — точка перетину діагоналей, P — середина сторони BC. Виразіть:

1) вектори $\overline{OB}, \overline{OC}, \overline{AO}, \overline{DO}$ через вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$.

2) вектори $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{OP}, \overline{PC}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

94. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина ребра DD_1, N — середина CC_1, P — середина BC_1. Виразіть через вектори $\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{AD}, \vec{c} = \overline{AA_1}$ такі вектори:

1) $\overline{AB_1}$; 2) $\overline{AC_1}$; 3) $\overline{AM}$; 4) $\overline{AN}$;

5) $\overline{AP}$; 6) $\overline{PN}$; 7) $\overline{MN}$.

Вправи для повторення

95°. Дано точку координатної площини (1; –3). Знайдіть:

1) у якому квадранті вона розміщена;
2) координату її проекції на вісь y;
3) відстань від точки до осі x;
4) відстань від точки до початку координат;
5) координати точок, які симетричні даній відносно координатних осей і початку координат;
6) координати точки, симетричної даній відносно бісектриси третього квадранта.

96°. Дано вектори $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (1; 3)$ і $\vec{c} = (-6; -4)$. Знайдіть:

1) координати вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$;
2) вектор, протилежний вектору $2\vec{a} + \vec{b}$;
3) скалярні добутки $\vec{a} \cdot \vec{c}$ і $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$;
4) довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$;
5) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

97. Побудуйте зручну прямокутну систему координат на площині і знайдіть координати вершин многокутника: 1) на рис. 49, а); 2) на рис. 49, б).

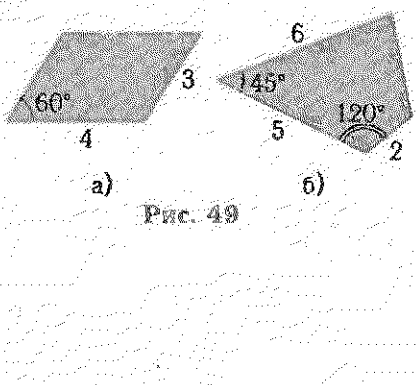


Рис. 49

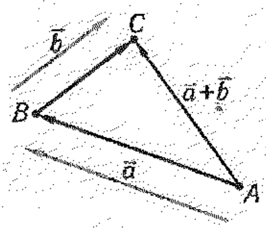
Підсумок

Головні означення

Вектор являє собою математичну величину, що характеризується невід'ємним числовим значенням (модулем) і напрямом.

Вектори, модулі яких рівні між собою, а напрями збігаються, називаються ***рівними.*** Вектори, що мають однакові або протилежні напрями, називаються ***колінеарними.***

Вектор, який має однакову з вектором $\vec{a}$ довжину, але протилежний напрям, називається ***протилежним даному.***



Дано два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Від довільної точки A відкладемо вектор $\vec{a}$, тобто знайдемо таку точку B, що $\overline{AB}=\vec{a}$. Потім від точки B відкладемо вектор $\vec{b}$, тобто знайдемо таку точку C, що $\overline{BC}=\vec{b}$. Вектор $\overline{AC}$ називається ***сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:*** $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число $x \neq 0$ називається вектор, довжина якого дорівнює $|x|\cdot|\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $x > 0$, і протилежний напряму $\vec{a}$, якщо $x < 0$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, яке дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними.

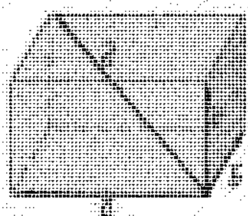
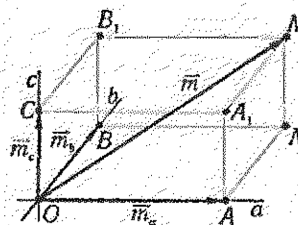
Властивості операцій над векторами

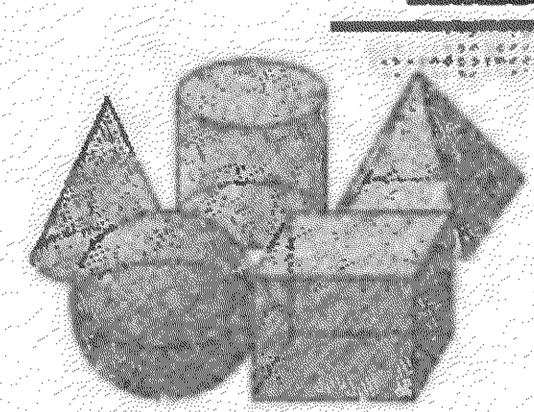
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},\quad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right),\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a},\quad \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}.$$

$$x\left(y\vec{a}\right)=\left(xy\right)\vec{a},\quad \left(x+y\right)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a},\quad x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=x\vec{a}+x\vec{b}.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},\quad \left(x\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=x\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),\quad \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Головні твердження

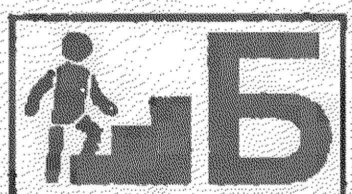
Твердження	Геометрична інтерпретація
Правило паралелепіпеда. Для знаходження суми трьох ненульових векторів простору, які не паралельні одній площині, відкладають дані вектори від однієї точки і на побудованих відрізках будують паралелепіпед. Напрямлена діагональ паралелепіпеда з початком у вибраній точці і кінцем у протилежній вершині паралелепіпеда дорівнює сумі трьох векторів.	 $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
Ненульовий вектор простору можна однозначно розкласти на складові, які паралельні трьом прямим, що не паралельні якійсь площині.	 $\bar{m}=\bar{m}_a+\bar{m}_b+\bar{m}_c$



§5. КООРДИНАТИ ТА ЇХНЄ ЗАСТОСУВАННЯ

Система координат дає змогу ставити у відповідність точкам і векторам площини чи простору впорядковані набори чисел. Це відкриває нові можливості для використання обчислень при розв'язуванні різних задач.

1. Прямокутні координати



Положення точки на площині або в просторі можна охарактеризувати за допомогою впорядкованої системи чисел, яку називають її координатами. Найбільш поширеними в математиці і її застосуваннях є прямокутні, або декартові координати.

Прямокутна система координат на площині широко використовувалась при вивченні функцій. Перехід від площини до простору пов'язаний з необхідністю введення додаткової характеристики для описання положення точки у просторі. Справді, положення літака в повітрі не визначається тільки «наземними» координатами його проекції на поверхню землі (довготою та широтою). Необхідно знати ще й висоту над поверхнею землі. Ця та інші просторові ситуації наводять на думку про введення додаткової координатної осі для задання точок простору за допомогою чисел.

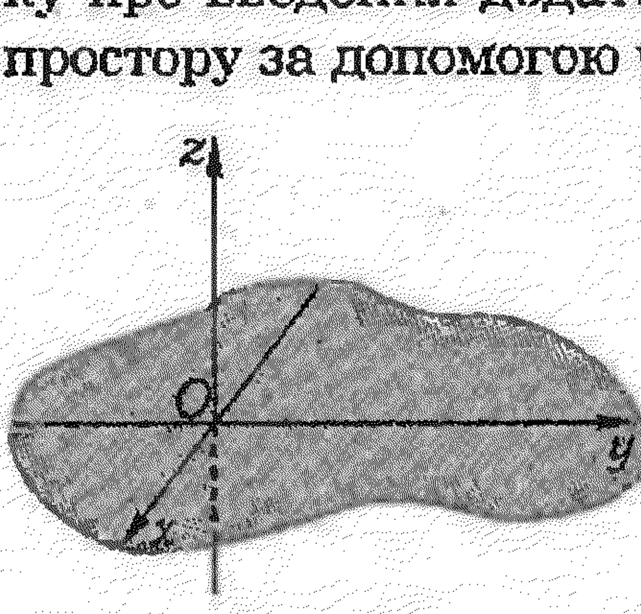


Рис. 50

При побудові прямокутної системи координат у просторі через деяку його точку O (***початок координат***) проводять три попарно перпендикулярні напрямлені прямі (***координатні осі***) з однаковим масштабом вимірювань (рис. 50). Першу вісь називають віссю x, або віссю ***абсцис***, другу — віссю y, або віссю ***ординат***, третю — віссю z, або віссю ***аплікат***.

> ***Апліката*** *— від латинського applicatus — прикладений, приєднаний.*

Площина, що проходить через осі x і y, позначається xy. Аналогічно вводять площини xz, yz і називають їх ***координатними***.

Основу для введення координат у просторі, як і на площині, становить поняття координати точки на координатній прямій, тобто відстані точки від початку координат, узятої зі знаком «+», якщо точка лежить на промені, що визначає напрям осі, або зі знаком «–» — в іншому випадку.

Координати довільної точки простору визначаються за допомогою проекції цієї точки на осі. Проекції точки M на координатні осі є точками перетину осей координат із площинами, що проходять через точку M паралельно координатним площинам (рис. 51). Наприклад, проекція M_y точки M на вісь y є точкою перетину осі y з площиною, що проходить через точку M паралельно площині xz.

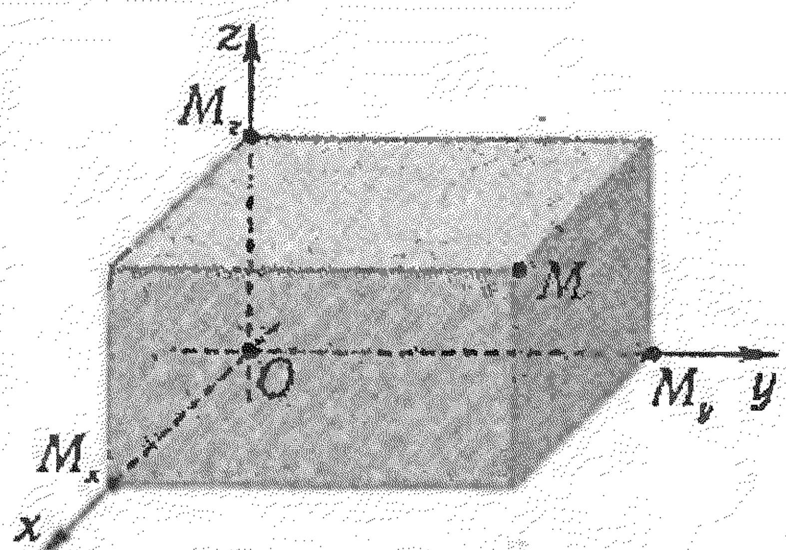


Рис. 51

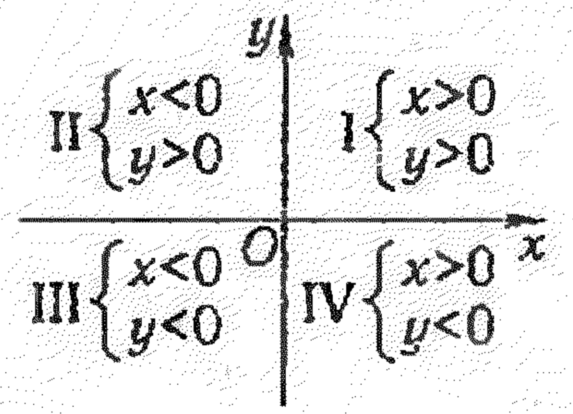
Координати проекцій точки M на осі координат, взяті за порядком нумерації осей, утворюють упорядковану систему трьох чисел. Цю трійку чисел називають ***прямокутними координатами точки*** M. Те, що точка M простору має координати $(x; y; z)$, позначають $M(x; y; z)$.

Координатами точки простору є взяті з певним знаком відстані від цієї точки до координатних площин.

Нагадаємо, що координатні осі на площині ділять її на чотири частини — ***координатні кути***, чи ***квадранти*** (рис. 52, а). Координатні площини ділять простір на вісім частин (рис. 52, б), які називають ***октантами***. Ці частини простору визначаються, як і квадранти на площині, знаками відповідних координат.

> ***Квадрант*** *— від латинського quadrans (quadrantis) — четверта частина.*

> ***Октант*** *— від латинського octans (octantis) — восьма частина.*



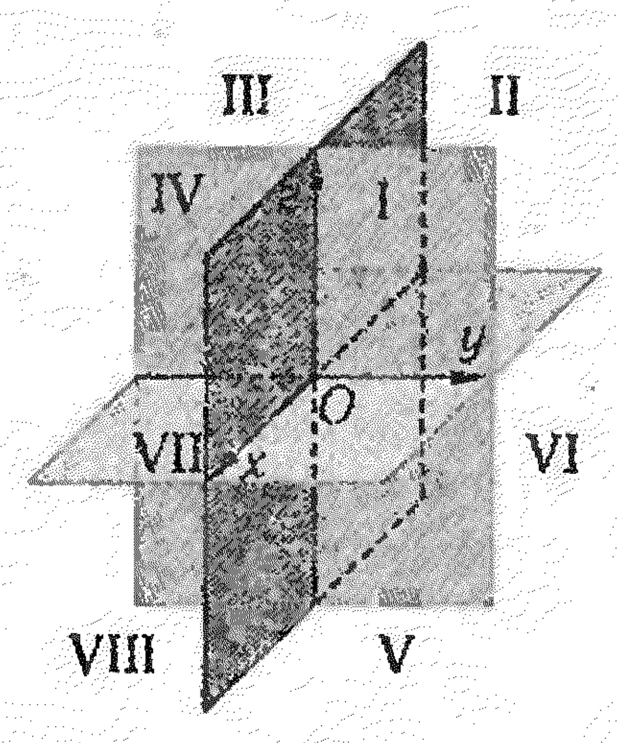


Рис. 52

У прямокутній системі координат на площині кожній точці відповідає упорядкована пара чисел — її координати, і навпаки, кожній упорядкованій парі відповідає певна точка площини. Така ж відповідність існує між упорядкованими трійками чисел і точками простору, в якому задана прямокутна система координат. Ця відповідність дає змогу ототожнювати точки з упорядкованими наборами чисел. І далі часто замість слів «точка, координати якої $(x; y; z)$» будемо вживати більш коротке: «точка $(x; y; z)$».

Приклад 1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розміщено в прямокутній системі координат так, як це показано на рис. 53, і вершина B має координати (2; 2; 0).

1) Знайти координати всіх інших вершин куба.
2) Як розміщена відносно куба точка $M(1; -2; 1)$?

☐ 1) З рис. 53 видно, що грань $ABCD$ розміщена в координатній площині xy, її сторони паралельні координатним осям, центр грані збігається з початком системи координат. Вершина B у системі координат xy має координати (2; 2) (рис. 54). Користуючись цією умовою, неважко встановити координати інших вершин

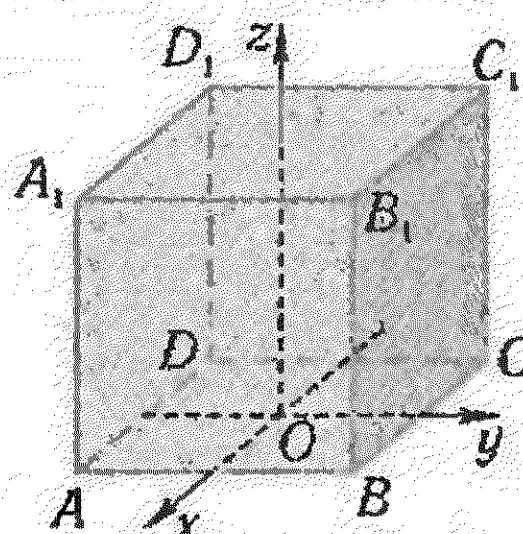


Рис. 53

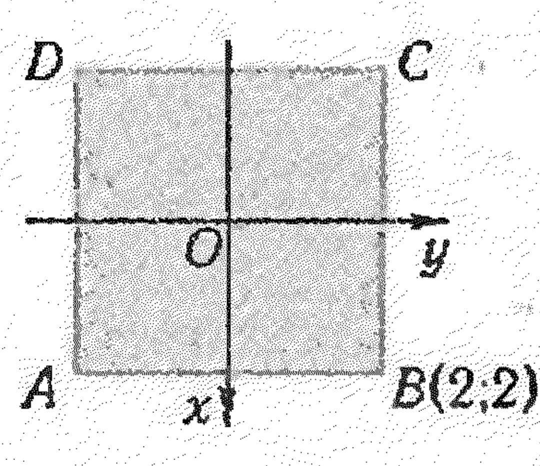


Рис. 54

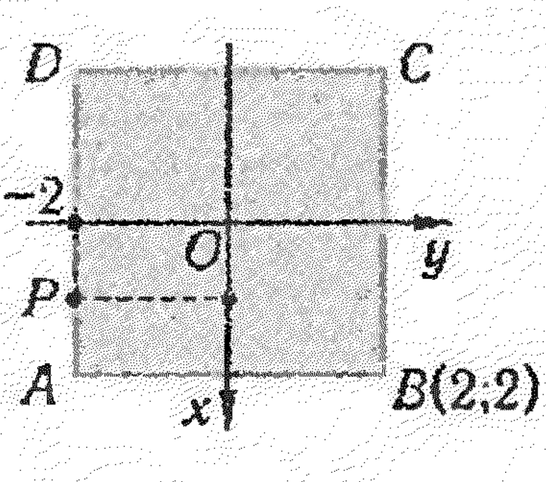


Рис. 55

грані $ABCD$ на цій координатній площині: $C(-2;\ 2)$, $D(-2;\ -2)$, $A(2;\ -2)$. А у координатному просторі маємо відповідно: $C(-2;\ 2;\ 0)$, $D(-2;\ -2;\ 0)$, $A(2;\ -2;\ 0)$.

Вершини A_1, B_1, C_1, D_1 лежать у площині, паралельній площині xy, на відстані 4 від неї (чому?). Враховуючи, що проекціями точок A_1, B_1, C_1, D_1 на площину xy є відповідно точки A, B, C, D і аплікати цих точок додатні, маємо: $A_1(2;\ -2;\ 4)$, $B_1(2;\ 2;\ 4)$, $C_1(-2;\ 2;\ 4)$, $D_1(-2;\ -2;\ 4)$.

2) Ортогональна проекція точки $M(1;\ -2;\ 1)$ на координатну площину xy має координати $(1;\ -2)$. Точка $P(1;\ -2)$ належить відрізку AD (рис. 55). Оскільки апліката точки $M(1;\ -2;\ 1)$ дорівнює 1, то ця точка лежить між площинами ABC і $A_1B_1C_1$. З цих двох умов випливає, що точка $M(1;\ -2;\ 0)$ лежить в грані AA_1D_1D, тобто на поверхні куба. ■

Відповідь. 1) $A(2;\ -2;\ 0)$, $C(-2;\ 2;\ 0)$, $D(-2;\ -2;\ 0)$, $A_1(2;\ -2;\ 4)$, $B_1(2;\ 2;\ 4)$, $C_1(-2;\ 2;\ 4)$, $D_1(-2;\ -2;\ 4)$; 2) лежить на поверхні куба.

Введення прямокутної системи координат у просторі дозволяє розв'язувати задачі, пов'язані з геометричними фігурами, за допомогою координат. Ці застосування починаються з вибору системи координат.

Приклад 2. Усі плоскі кути при вершині S тетраедра $SABC$ прямі, а бічні ребра рівні. Всередині тетраедра розміщено куб так, що одна з його вершин збігається з точкою S, прилеглі до неї ребра лежать на ребрах тетраедра, а протилежна їй вершина лежить на грані ABC. Знайти довжину ребра куба, якщо a — довжина бічного ребра тетраедра.

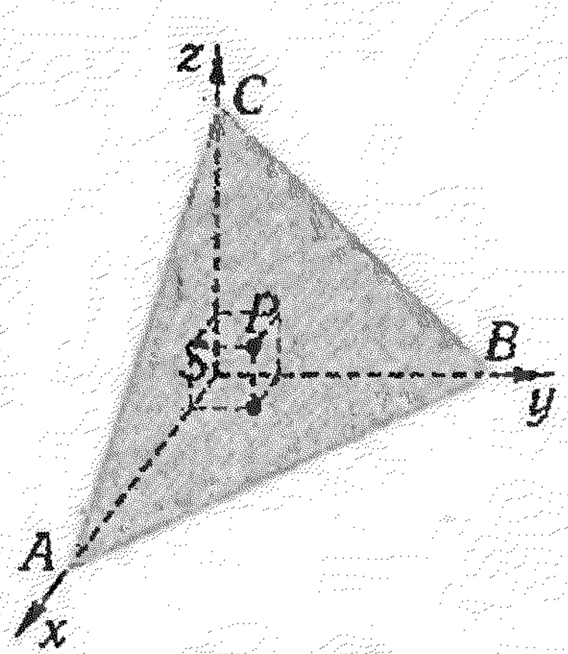


Рис. 56

□ Побудуємо прямокутну систему координат з початком у вершині S тетраедра (рис. 56). Оскільки a — довжина бічного ребра тетраедра, то вершини основи тетраедра мають координати: $A(a;\ 0;0)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ a)$. Нехай x — довжина ребра куба. Вершина P куба, яка лежить в грані ABC, має координати $(x;\ x;\ x)$. Координати точок грані ABC задовольняють умову $x + y + z = a$. Це буде обґрунтовано пізніше. Справедливість цього твердження підтверджується тим, що координати точок A, B, C, а також точок відрізків AB, BC, AC задовольняють цю умову. Розв'язання задачі зводиться до розв'язання рівняння $x + x + x = a$, звідси $x = \frac{a}{3}$. ■

Відповідь. $\frac{a}{3}$

Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює апліката точки простору, яка лежить на координатній площині xy?
2°. Які координати в просторі має точка осі z?
3°. Яка з точок $A(5; -2; -1)$, $B(-4 ;1; -2)$ розміщена ближче до координатної площини xy?
4. Які координати мають точки, симетричні точці $M(1; 2; -4)$ відносно координатних площин, осей, початку координат?
5°. Які координати має проекція точки $(3; -2; 1)$ на координатну площину xz?
6. Як зміняться координати точок, якщо масштаб вимірювань збільшити вдвічі?
7. Яку фігуру утворюють точки простору, що задовольняють умову: а) $x = 1$; б) $z = -2$; в) $x = 1$ і $z = -2$; г) $x \leq 1$?

2. Дії над векторами, що задані координатами

Вектори, як і точки, можна охарактеризувати упорядкованими наборами чисел — координатами. Координати векторів на площині розглядалися в планіметрії.

Нехай дано вектор $\vec{a}$ на площині, де задана прямокутна система координат. Через $\vec{i}$ та $\vec{j}$ позначимо одиничні вектори, що напрямлені вздовж осей координат x та y. Їх називають ***ортами***.

> ***Орт** — від грецького ορθος (orthos) — прямий, вертикальний.*

Оскільки вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$ неколінеарні, то вектор $\vec{a}$ можна однозначно виразити через ці вектори (рис. 57):

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

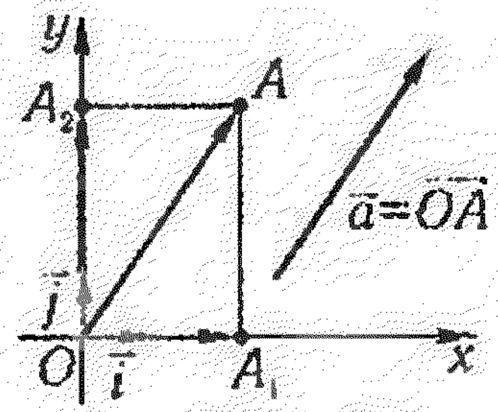


Рис. 57

Цю рівність скорочено записують у вигляді $\bar{a} = (x;\ y)$, або деколи $\bar{a}\,(x;\ y)$, а пару $(x;\ y)$ називають ***прямокутними координатами, або координатами вектора*** $\bar{a}$. Аналогічно вводять координати вектора у просторі. Довільний вектор $\bar{a}$ простору можна однозначно зобразити у вигляді

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

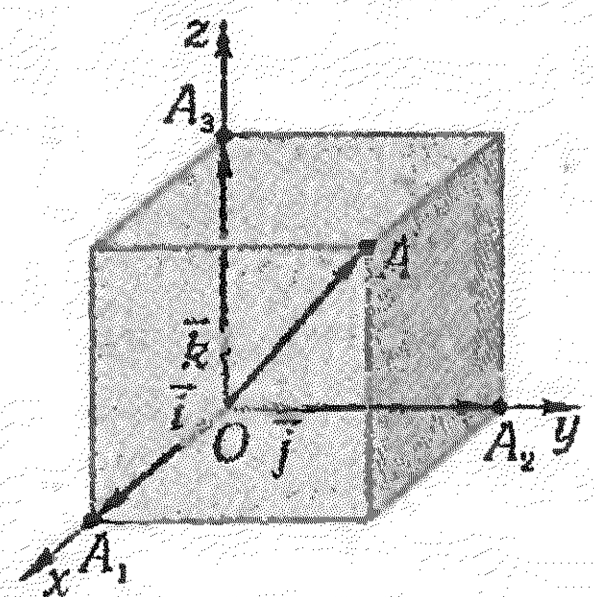


Рис. 58

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орти (рис. 58). Числа x, y, z називають ***координатами вектора.*** Розкладання вектора $\bar{a}$ по ортах скорочено записують так: $\bar{a} = (x;y;z)$ або $\bar{a}(x;y;z)$.

Між векторами координатної площини і парами чисел існує взаємно однозначна відповідність. Аналогічна відповідність існує між векторами простору в деякій системі координат і упорядкованими трійками чисел.

Позначимо через A_1 і A_2 проекції точки A на осі координат (рис. 57). Координата x точки A_1 на осі абсцис збігається з координатою вектора $\overline{OA_1}$ на цій осі, тобто $\overline{OA_1} = x\bar{i}$. Аналогічно, координата y точки A_2 на осі ординат збігається з координатою вектора $\overline{OA_2}$ на тій самій осі, тобто $\overline{OA_2} = y\bar{j}$. Вектори $\overline{OA_1}$ і $\overline{OA_2}$ — складові вектора $\overline{OA}$ по осях координат:

$$\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

Отже, координати вектора $\overline{OA}$ збігаються з координатами точки A. Аналогічне твердження справджується і для простору (рис. 58).

Якщо x, y, z — координати точки A, то

$$\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Вектор $\overline{OA}$, відповідний точці A, називають ***радіусом-вектором*** цієї точки.

Для точок $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)$ координати вектора $\overline{AB}$ обчислюються за формулою

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Цю формулу легко одержати з рівності $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Точки площини можна розглядати як точки простору, в яких апліката дорівнює нулю. Тому на площині наведена вище формула має вигляд: $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1)$.

Якщо вектори на площині задані своїми координатами, то дії над ними, як добре відомо із планіметрії, виконуються за наступними правилами.

1. Координати суми (різниці) двох векторів дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат цих векторів.

2. Координати добутку вектора на число дорівнюють добутку відповідних координат даного вектора на це число.

3. Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат цих векторів. Зокрема, скалярний квадрат вектора дорівнює сумі квадратів його координат.

Ці самі правила справджуються і для дій над векторами у просторі. Їхнє обґрунтування, як і у випадку площини, зводиться до використання розкладань векторів по ортах і перетворень векторних виразів.

Приклад 3. Маємо точки $A(2; 0; 1)$, $B(3; 5; 0)$, $C(-1; 2; 3)$. Знайти:

1) координати вектора $\vec{n} = 2\overline{AB} - 3\overline{BC}$;

2) скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$;

3) таку точку M, що $\overline{AB} = \overline{CM}$.

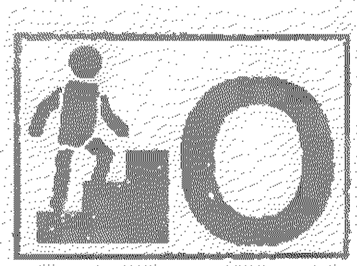
☐ Знайдемо спочатку координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$: $\overline{AB} = (3-2; 5-0; 0-1) = (1; 5; -1)$; $\overline{BC} = (-1-3; 2-5; 3-0) = (-4; -3; 3)$. Скориставшись правилами виконання дій над векторами, заданими координатами, маємо:

1) $\vec{n} = 2\overline{AB} - 3\overline{BC} = (2; 10; -2) - (-12; -9; 9) = (14; 19; -11)$;

2) $\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 1\cdot 4 + 5\cdot 3 + (-1)\cdot(-3) = 22$.

3) Нехай шукана точка M має координати $(x; y; z)$. Тоді $\overline{CM} = (x+1; y-2; z-3)$. За умовою, вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CM}$ є рівними, тому є рівними їхні координати: $x + 1 = 1$; $y - 2 = 5$; $z - 3 = -1$, або $x = 0$, $y = 7$, $z = 2$. Отже, шукана точка $M(0; 7; 2)$. ■

Відповідь. 1) (14; 19; –11); 2) 22; 3) (0; 7; 2).



Наведемо більш детальні обґрунтування наведених вище формул.

Розклад $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ випливає з теореми 3 §4, оскільки вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ некомпланарні, тобто не існує площини, якій паралельні ці вектори.

Нехай вектор $\vec{a}$ простору задано двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$: $\vec{a} = \overline{AB}$. Тоді $\overline{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\overline{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ і $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$. Використавши властивості операцій додавання, віднімання векторів, множення на число, наведені в § 4, перетворимо вираз для $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \left(x_2\vec{i} - x_1\vec{i}\right) + \left(y_2\vec{j} - y_1\vec{j}\right) + \left(z_2\vec{k} - z_1\vec{k}\right) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

тобто

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Доведемо істинність правила 2. Нехай $\vec{a} = (x; y; z)$, що є скороченим записом рівності $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тоді $\lambda\vec{a} = \lambda\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j} + \lambda z\vec{k}$. Ця рівність означає, що $\lambda\vec{a} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

При використанні векторів у фізиці складові вектора на осях координат називають ***векторними проекціями на осі координат***. Координати складових на осях, тобто координати вектора, називають ***скалярними проекціями***, або, коротко, ***проекціями вектора на осі координат***, і позначають $np_x\vec{a}$, $np_y\vec{a}$, $np_z\vec{a}$.

> ***Проекція*** *— від латинського projectio — кидання вперед.*

У багатьох випадках вектор задають модулем і кутами, які вектор утворює з осями координат (тобто, з ортами на цих осях). У цьому випадку координати (проекції) вектора $\vec{a}$ на площині обчислюються за формулами:

$$x = np_x\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha; \quad y = np_y\vec{a} = |\vec{a}|\cos(90^\circ - \alpha) = |\vec{a}|\sin\alpha,$$

де α — кут між вектором $\vec{a}$ і віссю x. У просторі мають місце аналогічні формули:

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad z = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

де α, β, γ — кути між вектором $\bar{a}$ і осями координат; x, y, z – координати вектора $\bar{a}$. Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають ***напрямними косинусами*** векторів.

Приклад 4. Вектор швидкості $\bar{v}$, модуль якого дорівнює 2 м/с, утворює з координатними осями кути $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$. Знайти проекції вектора швидкості на осі.

□ Користуючись наведеними формулами, маємо:

$$x = |\bar{v}| \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1; \ y = |\bar{v}| \cdot \cos\beta = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1;$$

$$z = |\bar{v}| \cdot \cos\gamma = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \ \blacksquare$$

Відповідь. $\bar{v} = \left(1; -1; \sqrt{2}\right)$.

Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює ордината вектора, напрям якого збігається з напрямом осі x?

2°. При яких значеннях k, l, m вектори $\bar{a} = (5; -4; 1)$ і $\bar{b} = k\bar{i} + l\bar{j} + m\bar{k}$ рівні; протилежні?

3°. Яким є вектор $\bar{a} + \bar{b}$, якщо $\bar{a} = (1; 0; 1)$, $\bar{b} = (0; 1; 0)$?

4°. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\bar{a} = (1; 0; 1)$ і $\bar{b} = (0; -1; 0)$?

5°. Якими є координати вектора $\bar{a}$, якщо $\bar{a} = \bar{0}$?

6. Нехай $\bar{a} = (-3; 4; 0)$. Яким є вектор:

а) протилежний даному;

б) одиничний і однаково напрямлений з даним?

7. Чому дорівнює проекція вектора $\bar{m} = (-4; 1; 5)$ на вісь x?

8. Чому дорівнюють проекції на осі координат рівнодійної двох сил $\bar{F}_1 = (2; -3; 1)$, $\bar{F}_2 = (-5; 1; -1)$?

3. Основні формули методу координат

Величини, пов'язані з векторами і точками простору, наприклад, довжина вектора, відстань між точками та ін., можуть бути вираженими через координати векторів і точок.

Довжина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ця формула є наслідком рівності $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ і правила 3 з попереднього пункту.

Відстань d між точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Цю формулу можна дістати з попередньої, якщо скористатись рівностями $d = \left|\overline{M_1M_2}\right|$ і $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Для обчислення кута φ між двома ненульовими векторами $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ використовують формулу

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Цю формулу дістають, застосувавши правило 3 і формулу для довжини вектора до правої частини формули

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}.$$

Теорема 1 *(ознака перпендикулярності векторів).*

Ненульові вектори $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярні, якщо

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Правильність цього твердження випливає з того, що вказана умова є записом рівності $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ в координатній формі.

Теорема 2 *(ознака колінеарності векторів).*

Вектор $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ колінеарний ненульовому вектору $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$, якщо координати вектора $\vec{a}_1$ пропорційні координатам вектора $\vec{a}_2$, тобто коли існує таке число λ, що

$$x_1 = \lambda x_2;\ \ y_1 = \lambda y_2;\ \ z_1 = \lambda z_2.$$

Цю умову колінеарності дістають, застосувавши правило 2 з попереднього пункту до рівності $\vec{a}_1 = \lambda\vec{a}_2$, яка є умовою колінеарності векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$.

Відповідні формули для площини можна дістати з наведених вище, якщо в них координату z (аплікату) прирівняти нулю.

Координати $(x; y; z)$ середини C відрізка з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Справді, якщо точка $C(x; y; z)$ є серединою відрізка AB, то $\overline{AC} = \overline{CB}$. У координатах ця рівність набуває вигляду:

$$x - x_1 = x_2 - x, \; y - y_1 = y_2 - y, \; z - z_1 = z_2 - z.$$

Відтак:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 5.

Маємо точки $A(2;0;0)$, $B(0;0;4)$, $C(-2;4;4)$, $D(0;4;0)$.

1) Знайти довжину вектора $\overline{BC}$ і кут, утворений ним з віссю x.

2) Чи перпендикулярні вектори $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$?

3) Чи колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$?

4) На осі абсцис знайти точку, рівновіддалену від точок A і C.

☐ 1) Знайдемо спочатку координати вектора $\overline{BC}$: $\overline{BC} = (-2 - 2; 4 - 0; 4 - 0) = (-4; 4; 4)$. Користуючись формулою для знаходження довжини вектора, маємо:

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}.$$

Кут α, який утворює вектор $\overline{BC}$ з віссю x, дорівнює куту між вектором $\overline{BC}$ і вектором $\vec{i} = (1; 0; 0)$. За формулою для обчислення кута між векторами, одержимо:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BC} \cdot \vec{i}}{\left|\overline{BC}\right| \cdot \left|\vec{i}\right|} = \frac{(-4)\cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{4\sqrt{3} \cdot 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2) Знайдемо спочатку координати вектора $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = (0 - 2; -2 - 0; 0 - 0) = (-2; -2; 0).$$

Скалярний добуток векторів $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$ знайдемо за правилом 3 попереднього пункту:

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} = (-2)\cdot(-4) + (-2)\cdot 4 + 0\cdot 4 = 0.$$

За наведеною ознакою перпендикулярності (теорема 1), вектори $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$ перпендикулярні.

3) Маємо: $\overline{AB} = (0-2;\ 0-0;\ 4-0) = (-2;\ 0;\ 4)$. Координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ не пропорційні, оскільки $\dfrac{-4}{-2} \neq \dfrac{4}{4}$. Тому, за наведеною ознакою колінеарності векторів (теорема 2), вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ не колінеарні.

4) Шукана точка M на осі абсцис має координати $(x;\ 0;\ 0)$. За умовою, $MA = MC$. Застосовуючи формулу для знаходження відстані між двома точками, заданими координатами, цю рівність можна записати так:

$$(2-x)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2 = (x+2)^2 + (4-0)^2 + (4-0)^2.$$

Якщо розкрити дужки і привести подібні члени, то одержимо рівняння $8x = -32$, або $x = -4$. Шукана точка $(-4;\ 0;\ 0)$. ■

Відповідь. 1) $4\sqrt{3}$, $\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 2) перпендикулярні; 3) не колінеарні; 4) $(-4;\ 0;\ 0)$.

Наведені формули широко застосовуються в математиці, зокрема, при розв'язуванні геометричних задач. Ці застосування ґрунтуються на тому, що багато геометричних тверджень про розміщення точок, прямих, площин та інших фігур можна виразити за допомогою співвідношень між векторами чи рівнянь зі змінними координатами. Найпростіший «словник» перекладу наведено в таблиці 16.

Таблиця 16

Геометрична мова	Векторна мова
Точки A, B, C лежать на одній прямій	$\overline{AC} = k\overline{AB}$
Прямі AB і CD паралельні або збігаються	$\overline{AB} = \lambda\overline{CD}$
Прямі AB і CD перпендикулярні	$\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$

Таблиця 16 (продовження)

Геометрична мова	Векторна мова
Довжина відрізка AB дорівнює d	$\overrightarrow{AB}^2 = d^2$
Кут між прямими l і m дорівнює φ	$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, де $\vec{a}\parallel l$, $\vec{b}\parallel m$

Приклад 6. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 2 см.

1) Знайти кути між діагоналлю куба і діагоналями його граней.

2) Довести, що точка перетину медіан трикутника, вершинами якого є кінці трьох ребер куба, що виходять з однієї вершини, лежить на діагоналі куба.

3) Довести, що середина діагоналі куба рівновіддалена від його вершин.

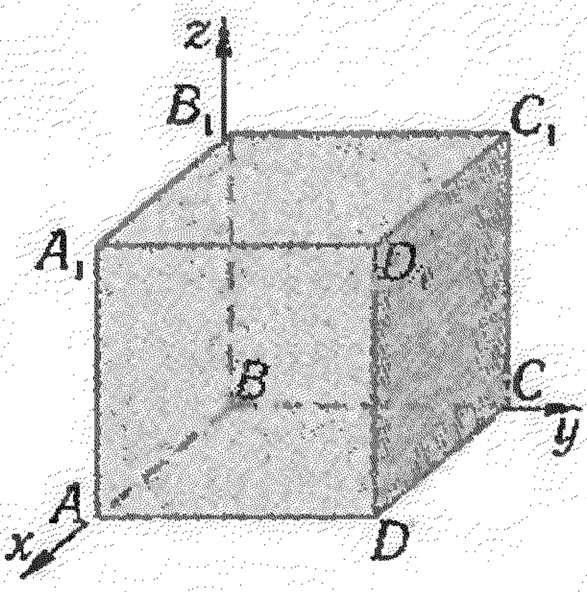


Рис. 59

☐ 1) Введемо систему координат, як це показано на рис. 59. Тоді, використовуючи вектори $\overrightarrow{BD_1} = (2;\ 2;\ 2)$, $\overrightarrow{BC_1} = (0;\ 2;\ 2)$, $\overrightarrow{CB_1} = (0;\ -2;\ 2)$ і позначивши через α кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$, а між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{CB_1}$ — через β, отримаємо:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC_1}\right|} = \frac{2\cdot 0+2\cdot 2+2\cdot 2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+2^2}} = \frac{8}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}};\ \cos\beta = \frac{2\cdot 0+2\cdot(-2)+2\cdot 2}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}} = 0,\ \beta = \arccos 0 = 90^\circ.$$

З огляду на симетричність куба, решта кутів між діагоналлю куба і діагоналями бічних граней такі самі.

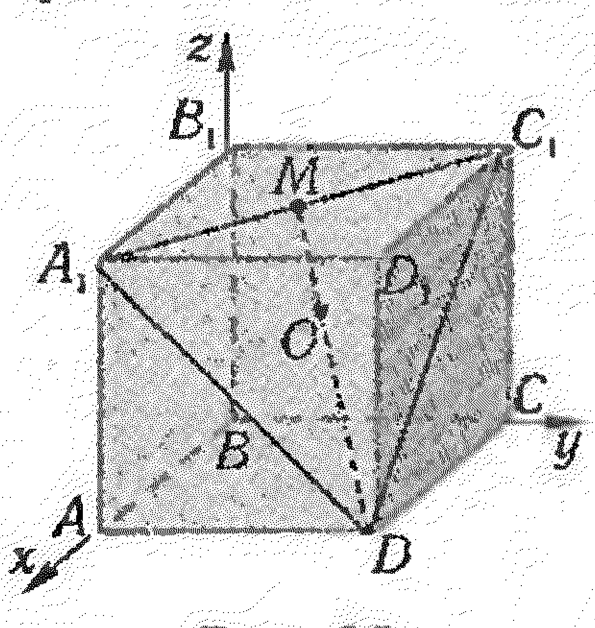


Рис. 60

2) Обчислимо координати точки O перетину медіан трикутника DA_1C_1, де $C_1(0;\ 2;\ 2)$, $A_1(2;\ 0;\ 2)$, $D(2;\ 2;\ 0)$ (рис. 60). Кінець M медіани DM має координати $M\left(\frac{0+2}{2};\frac{2+0}{2};\frac{2+2}{2}\right)$, або $M(1;\ 1;\ 2)$. Тому

$$\overrightarrow{DM} = (-1;-1;2),\ \overrightarrow{DO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DM} = \left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Щоб отримати координати точки O, треба знайти координати вектора $\overline{BO} = \overline{BD} + \overline{DO}$, тобто треба до координат точки D додати координати вектора $\overline{DO}$: $(2;\ 2;\ 0) + \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Вектори $\overline{BO} = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ і $\overline{BD_1} = (2;\ 2;\ 2)$ — колінеарні, тому точка O лежить на діагоналі BD_1.

3) Середина F діагоналі куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ має координати $F\left(\frac{2+0}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{2+0}{2}\right)$, або $F(1;\ 1;\ 1)$. Для розв'язання задачі досить обчислити відстані точки F до вершин куба: $FB = FD_1 = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$; $FD = \sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{3}$. Те саме маємо і при обчисленні відстані до решти вершин. ■

Відповідь. 1) $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$; $90°$.

Контрольні запитання

1°. Чи лежать точки $A(2;\ -1;\ 3)$ і $B(3;\ -2;\ 1)$ на однаковій відстані від початку координат?

2°. Чи перпендикулярні вектори $\bar{a} = (1;\ 2;\ 3)$ та $\bar{b} = (1;\ -2;\ 1)$?

3°. Чи колінеарні вектори $\bar{a} = (2;\ 1;\ 1)$ та $\bar{b} = (-4;\ -2;\ 2)$?

4. Чи перпендикулярні прямі AB і AC, якщо $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ -1)$, $C(-2;\ 0;\ 3)$?

5. Чи паралельні прямі AB і CD, якщо $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(1;\ 0;\ 2)$, $C(1;\ -2;\ 2)$, $D(0;\ -1;\ -1)$?

6. Чи симетричні точки $A(2;\ -1;\ 2)$ і $B(4;\ 3;\ 2)$ відносно точки $M(3;\ 1;\ 2)$?

7. Який геометричний зміст мають числа $\bar{a}\cdot\bar{i}$, $\bar{a}\cdot\bar{j}$, $\bar{a}\cdot\bar{k}$?

4. Рівняння фігур

З планіметрії відомо, що фігури на координатній площині, зокрема лінії, можна задавати рівняннями з двома змінними. Наприклад, рівняння прямої має вигляд $ax + by + c = 0$, рівняння кола з центром у точці $O(a;\ b)$ з радіусом R — $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

У просторі точка характеризується трьома координатами. Рівняння з трьома змінними визначає певну фігуру в просторі, координати точок якої задовольняють дане рівняння, а координати інших точок простору не задовольняють його. Розглянемо рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

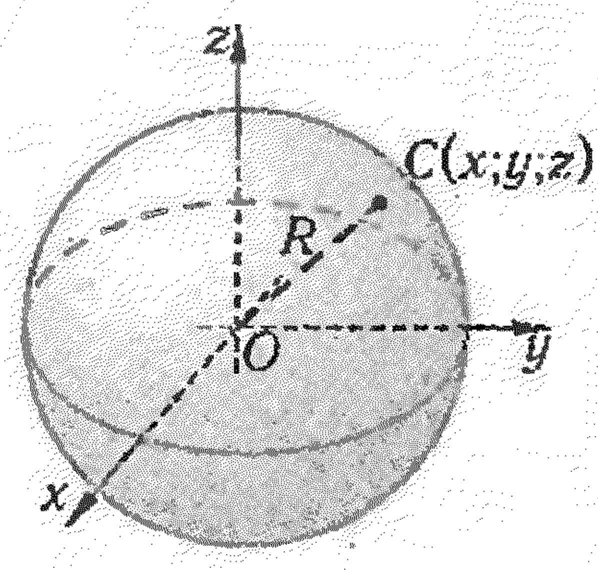


Рис. 61

Це рівняння схоже на рівняння кола і тому природно сподіватися, що воно описує аналог кола у просторі — сферу (рис. 61). Справді, вираз, розташований у лівій частині рівняння, має простий геометричний зміст — квадрат відстані від точки $C(x; y; z)$ до початку координат $O(0; 0; 0)$. Таким чином, рівняння описує сукупність усіх точок простору, квадрат відстані яких від початку координат однаковий і дорівнює R^2.

Фігура, складена з усіх точок простору, відстань від яких до даної точки однакова, називається сферою.

Дана точка називається ***центром сфери***. Величина R, яка дорівнює відстані від точок сфери до центра, називається ***радіусом сфери***.

Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ визначає сферу з центром у початку координат. Неважко скласти рівняння сфери з радіусом R і центром у даній точці $(a; b; c)$. Для цього треба записати квадрат відстані від довільної точки сфери $(x; y; z)$ до центра $(a; b; c)$ і прирівняти його до R^2:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Лінійному рівнянню $ax + by + c = 0$ на площині відповідає у просторі рівняння

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Можна передбачити, що це рівняння визначає площину, якщо не всі коефіцієнти при його змінних дорівнюють нулю одночасно. Аргументувати цей висновок можна по-різному. Наприклад, окремі випадки наведеного рівняння $x = m, y = n, z = h$ визначають площини, які паралельні координатним площинам. Перетину такої площини, наприклад, $z = h$, з фігурою, що задана рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, відповідає у цій площині рівняння $ax + by + ch + d = 0$, тобто рівняння прямої (крім випадку, коли $a = b = 0$).

Користуючись рівняннями фігур у просторі, можна розв'язувати численні задачі, пов'язані з цими фігурами, зокрема, досліджувати їхнє взаємне розміщення.

Приклад 7. Дано сферу $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=25$.

1) Чи лежить на сфері точка (–1; 2; 0)?

2) Знайти відстань від центра сфери до точки (0; 2; –1).

3) Скласти рівняння сфери з цим самим радіусом і яка має центр у точці (0; 2; –1).

4) Скласти рівняння сфери, симетричної даній відносно площини xz.

☐ 1) Точка лежить на даній сфері тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють рівняння сфери. Підставивши координати точки у рівняння сфери, матимемо: $(-1-3)^2+(2+1)^2+0^2=$ $=25$. Одержали правильну числову рівність: $(-4)^2+3^2=25$. Отже, дана точка належить сфері.

2) Центром сфери є точка з координатами (3; –1; 0). Знайдемо відстань d між точками з координатами (0; 2; –1) і (3; –1; 0) за формулою для знаходження відстані між двома точками, заданими координатами:

$$d=\sqrt{(3-0)^2+(-1-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}.$$

3) Радіус даної сфери дорівнює 5. Сфера з радіусом 5 і центром у точці (0; 2; –1) має рівняння

$$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25.$$

4) Сфера, симетрична даній відносно площини xz, має той самий радіус. Її центр симетричний центру (3; –1; 0) даної сфери відносно площини xz. Тому він має координати (3; 1; 0). Шукане рівняння має вигляд:

$$(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25. \blacksquare$$

Відповідь. 1) Лежить; 2) $\sqrt{19}$; 3) $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$; 4) $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25$.

Приклад 8. Дано площину $3x+4y+z=1$ і точку $A(1;-1;2)$.

1) Чи лежить точка A у даній площині?

2) Знайти точки перетину даної площини з координатними осями.

☐ 1) Підставимо координати точки A в рівняння площини: $3\cdot1+4\cdot(-1)+2=1$. Одержали правильну рівність $3-4+2=1$. Точка A лежить у даній площині.

2) Ординати і аплікати точок координатної осі x дорівнюють нулю. Тому абсциса точки перетину даної площини з віссю x задовольняє рівняння $3\cdot x+4\cdot0+0=1$, або $x=\frac{1}{3}$. Шуканою є

точка $\left(\frac{1}{3};0;0\right)$. Аналогічно знаходимо точки перетину даної площини з осями y і z:

$3\cdot0+4\cdot y+0=1$, тому $y=\frac{1}{4}$, $\left(0;\frac{1}{4};0\right)$ — точка перетину з віссю y;

$3\cdot0+4\cdot0+z=1$, тому $z=1$, $(0; 0; 1)$ — точка перетину з віссю z. ■

Відповідь. 1) Лежить; 2) $\left(\frac{1}{3};0;0\right)$; $\left(0;\frac{1}{4};0\right)$; $(0; 0; 1)$.

Обґрунтуємо докладніше той факт, що лінійне рівняння $ax+by+cz+d=0$ визначає площину, якщо не всі коефіцієнти при його змінних дорівнюють нулю.

Якщо хоча б один із параметрів a,b,c не дорівнює нулю, то неважко знайти таку точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0.$$

Віднімаючи цю рівність від рівняння $ax+by+cz+d=0$, одержимо рівняння, яке рівносильне даному:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Одержаному співвідношенню можна дати тлумачення «векторною» мовою. Нехай $\vec{n}=(a;b;c)$, а $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, де M — точка з координатами $(x; y; z)$. Тоді це рівняння можна записати за допомогою скалярного множення:

$$\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0.$$

Сукупність усіх точок M, які задовольняють цю умову, утворюють площину, що проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ називають ***нормальним вектором площини***. Його координатами є коефіцієнти при змінних.

Справді, точка з координатами $(x_0; y_0; z_0)$ задовольняє цю умову, бо $\vec{n}\cdot\vec{0}=0$.

Нехай α — площина, яка проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}$. Точка $M(x; y; z)$ належить площині α тоді і тільки тоді, коли пряма M_0M перпендикулярна до вектора $\vec{n}$. А це рівносильно тому, що $\overline{M_0M}\perp\vec{n}$, або $\overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$.

Повторивши міркування у зворотному порядку, побачимо, що кожна площина, яка проходить через точку $(x_0;y_0;z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(a;b;c)$, може бути задана лінійним рівнянням: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Приклад 9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(-1; 3; -2)$ паралельно площині $x-2y+3z=2$

□ Дана точка не лежить у даній площині, оскільки її координати не задовольняють рівняння площини: $-1-2\cdot 3+3\cdot(-2)=$ $=-13\neq 2$. Тому існує єдина площина, яка проходить через точку A паралельно даній площині. Нормальним вектором даної площини є вектор $(1; -2; 3)$. Оскільки вектор, перпендикулярний до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярний і до другої, то цей вектор є нормальним і для шуканої площини. Її рівняння має вигляд:

$$x-2y+3z+d=0.$$

Для знаходження невідомого d скористаємось тим, що цій площині належить точка $(-1; 3; -2)$, тому

$$-1-2\cdot 3+3\cdot(-2)+d=0, \text{ або } d=13.$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд $x-2y+3z+$ $+13=0$. ■

Відповідь. $x-2y+3z+13=0$.

За допомогою рівнянь сфери і площини, паралельної координатній площині, неважко довести, що довільний перетин сфери площиною є коло. Справді, можна вважати, що центр сфери збігається з початком координат, а січна площина паралельна площині xy. Цього можна досягти за рахунок вибору початку координат і напрямів координатних осей. Тоді дані фігури визначаються рівняннями

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ z=h,$$

а їхній перетин — системою цих рівнянь.

Розв'язком системи є всі точки простору $(x;y;h)$, для яких виконується співвідношення

$$x^2+y^2=R^2-h^2=r^2.$$

Отже, ці точки лежать в площині $z=h$ і в цій площині задовольняють рівняння кола, тобто шуканий перетин — коло (рис. 62).

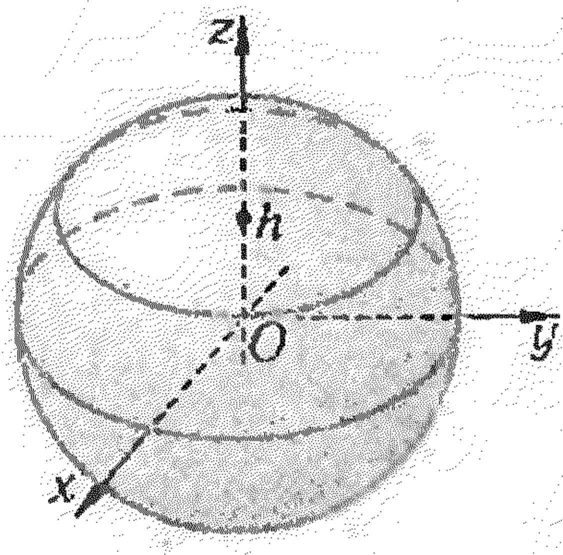


Рис. 62

Зрозуміло, малось на увазі, що площина перетинає сферу (тобто, $R^2 - h^2 > 0$).

Як і у випадку площини, фігури в просторі можна задавати не тільки рівняннями з трьома змінними, а також і нерівностями та системами рівнянь і нерівностей. Наприклад, нерівність $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ визначає множину всіх точок простору, віддалених від початку координат не більше ніж на R, тобто кулю.

Нерівність $z \ge h$ визначає півпростір.

Контрольні запитання

1°. Яке з наведених рівнянь визначає сферу в просторі?
а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$;
в) $x^2 + y^2 + z = -1$; г) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2°. Чому дорівнює радіус сфери $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 11$?

3°. Які координати має центр сфери $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$?

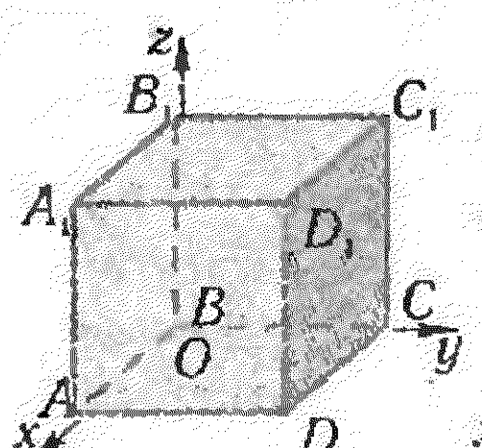
4°. Чи лежить точка (1; 2; –2) на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 9$?

5°. Які з даних рівнянь визначають площину у просторі?
а) $x = -1$; б) $x - 2y + z = 0$; в) $x - y + 1 = 0$.

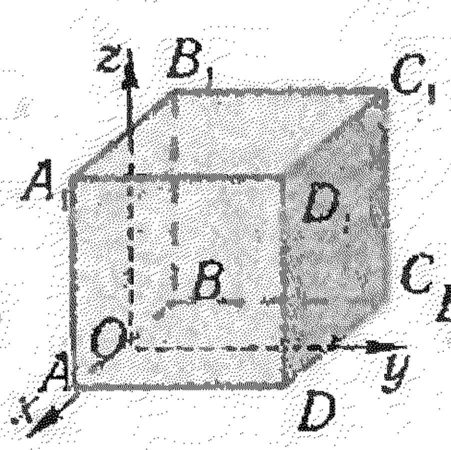
Графічні вправи

1. Побудуйте зображення точок за їхніми координатами:
а) $A(3; 1; 2)$; б) $B(0; -1; 3)$; в) $C(-2; 1; 3)$; г) $D(12; 8; -16)$.

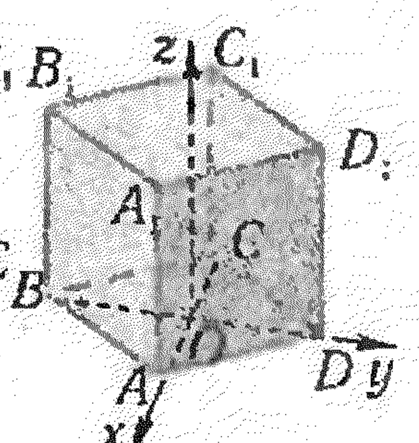
2. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 2 розміщено в прямокутній системі координат так, як це показано на рис. 63, а)–г). Вкажіть координати вершин куба.



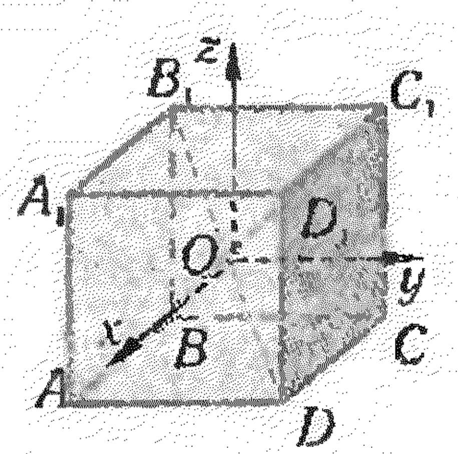
а)



б)



в)



г)

Рис. 63

3. Правильний тетраедр $SABC$ з ребром 3 розміщено в прямокутній системі координат так, як це показано на рис. 64, де початок координат O є центром грані ABC.
а) Вкажіть координати точки O.
б) Вкажіть координати вершин тетраедра.

4. Тетраедр $SABC$ розміщено в прямокутній системі координат так, як це показано на рис. 65. Трикутник ABC — рівнобедрений прямокутний з гіпотенузою $AB = c$, $SO = h$. Вкажіть координати вершин тетраедра.

5. Тетраедр $SABC$ розміщено в прямокутній системі координат так, як це показано на рис. 66. Трикутник ABC — правильний зі стороною a, $SB \perp ABC$, $SB = l$. Вкажіть координати вершин тетраедра.

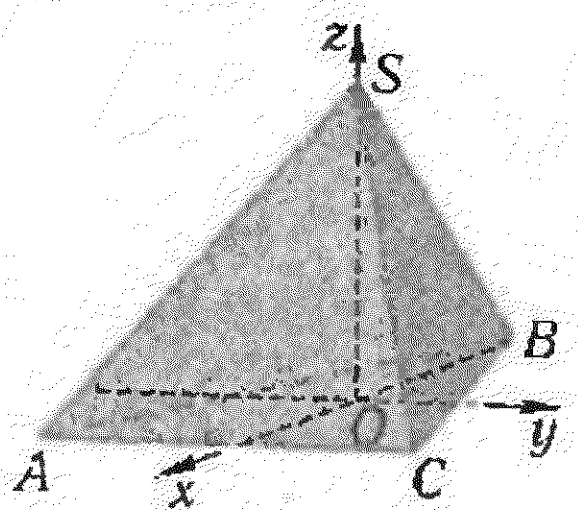


Рис. 64

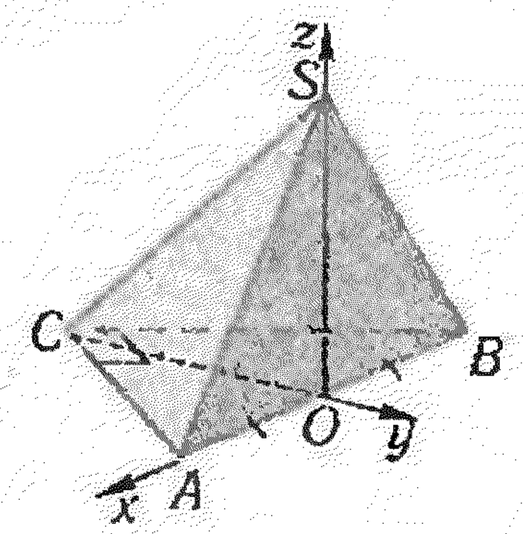


Рис. 65

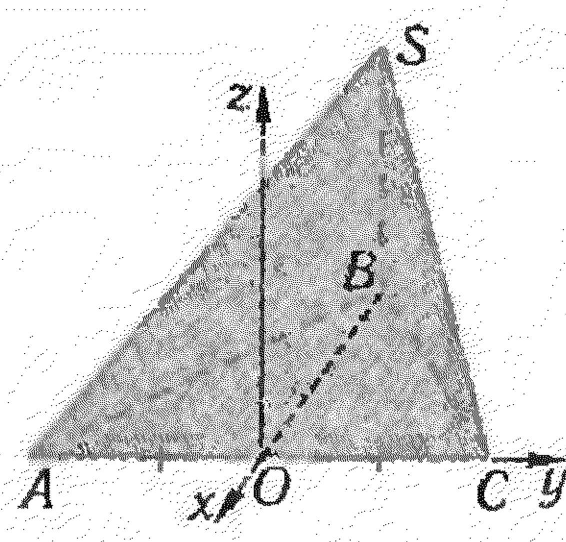


Рис. 66

Задачі

98. Дано точку (–3; 1; 2). Знайдіть:
1°) координати її проекцій на координатні осі;
2) координати її проекцій на координатні площини;
3) відстань від даної точки до координатних площин.

99. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розміщено в прямокутній системі координат з центром в точці D і осями x, y, z, напрямленими відповідно вздовж ребер DA, DC, DD_1. Довжина ребра куба дорівнює 1.
1°) Знайдіть координати вершин B, C, C_1.
2) Знайдіть координати середини ребра CC_1.
3) Яка з вершин куба найбільш віддалена від точки (1; 1; 1)?
4) Які з точок $M(1; 0; 5)$, $N\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right)$, $F\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ лежать усередині куба; зовні; на його поверхні?

100. Доведіть, що множина точок координатного простору, яка задовольняє умову $x = a$, є площиною, яка паралельна координатній площині або збігається з нею.

101. Маємо точки $A(-1; 3; 1)$, $B(-3; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$. Знайдіть:

1°) координати вектора $\vec{m} = 3\overline{BC} - 2\overline{AB}$;

2°) скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$;

3) таку точку M, що $\overline{CB} = \overline{AM}$.

102. Маємо точки $A(1; 2; -1)$, $B(-2; 1; 1)$, $C(1; -2; 3)$. Знайдіть:

1°) координати вектора $\vec{m} = \overline{AB} - 2\overline{BC}$;

2°) скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$;

3) таку точку N, що $\overline{AB} = \overline{NC}$.

103. Дано точки $A(-1; 3; 2)$, $B(-2; 4; 0)$, $M(1; 1; -3)$, $N(0; 5; 0)$, $P(-3; 0; 2)$ і $Q(2; -1; 4)$. Знайдіть:

1) координати вектора $3\overline{AB} - 5\overline{PQ}$;

2) скалярний добуток $\left(\overline{AB} - \overline{MN}\right) \cdot \overline{PQ}$.

104°. При паралельному перенесенні точка $A(5; 1; 2)$ переходить в точку $B(6; 3; 3)$. В яку точку перейде точка: 1) $C(1; 0; 1)$; 2) $D(-3; 2; 1)$?

105. Дано вектори $\vec{a} = (2;3;0)$, $\vec{b} = (-1;2;2)$, $\vec{c} = (3;1;0)$. Знайдіть:

1) $\left(3\vec{a} - 4\vec{b}\right) + \left(2\vec{c} - \vec{a}\right) + \left(\vec{b} - 3\vec{c}\right)$; 2) $\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)\left(-2\vec{a} - 3\vec{b}\right)$;

3) вектор $\vec{d}$, якщо $\vec{d} \perp \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $|\vec{d}| = 1$, $\vec{d} \perp -2\vec{a} - 3\vec{b}$.

106°. Матеріальна точка, на яку діють три сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, перебуває у стані спокою. Знайдіть $\vec{F}_3$, якщо:

1) $\vec{F}_1 = (-1; 2; 0)$, $\vec{F}_2 = (3; -5; 0)$;

2) $\vec{F}_1 = (1; 2; -3)$, $\vec{F}_2 = (4; 3; 2)$.

107°. Знайдіть проекцію на вісь абсцис вектора простору, модуль якого дорівнює 8, а кут, що утворює даний вектор з віссю x, дорівнює: 1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 120°.

108. Модуль вектора простору дорівнює 4, а кути, що утворені ним з осями координат x, y, z, дорівнюють відповідно 60°, 120° і 45°. Знайдіть проекції вектора на осі координат.

109. Дано чотири вершини $A(3; 0; 2)$, $B(2; 4; 5)$, $A_1(5; 3; 1)$, $D_1(7; 1; 2)$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати вершин: 1) D; 2) B_1; 3) C_1.

110. Маємо точки $A(4; 0; -3)$, $B(8; 0; 1)$, $C(2; 0; -1)$, $D(-2; 0; 3)$.

1°) Знайдіть довжину вектора $\overline{CD}$ і кут, утворений ним з віссю x.

2°) Чи перпендикулярні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?

3°) Чи колінеарні вектори $\overline{AC}$ і $\overline{CD}$?

4) На осі абсцис знайдіть точку, рівновіддалену від точок B і C.

5) Знайдіть координати вектора $\bar{a}$, який протилежно напрямлений з вектором $\overline{CD}$ і має довжину 2.

6) Відшукайте таку точку N, щоб чотирикутник $ABND$ був паралелограмом.

111. Маємо точки $A(-2; 2; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(4; 2 ;0)$, $D(1; 1; 0)$.

1°) Знайдіть довжину вектора $\overline{CA}$ і кут, утворений ним з віссю x.

2°) Чи перпендикулярні вектори $\overline{DB}$ і $\overline{DC}$?

3°) Чи колінеарні вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$?

4) На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і C.

5) Знайдіть координати вектора $\bar{b}$, який протилежно напрямлений з вектором $\overline{AC}$ і має довжину 3.

6) Відшукайте таку точку M, щоб чотирикутник $ABCM$ був паралелограмом.

112. Дано вектори $\bar{a} = (3; -1; 0)$, $\bar{b} =(2; 2; 1)$, $\bar{c} = (-3; 0; 4)$.

1) Знайдіть вектори, які колінеарні вектору $\bar{a}$ і довжина яких утричі більша від довжини вектора $\bar{c}$.

2) Знайдіть хоча б один вектор, перпендикулярний до $\bar{c}$.

3) При якому значенні p вектори $\bar{a}$ і $\bar{d} = (1; p; 2)$ перпендикулярні?

4) При якому значенні p вектори $\bar{b}$ і $\bar{m} = (p; -2; -1)$ колінеарні?

113. Дано точки:

1) $A(-3; 1)$, $B(1; 3)$, $C(2; 1)$, $D(-2; -1)$;

2) $A(-1; 2; 4)$, $B(1; 0; 2)$, $C(2; -3; 0)$, $D(0; -1; 2)$.

Визначте тип чотирикутника $ABCD$.

114. Доведіть, що точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4, -1; 1)$ є вершинами прямокутника. Обчисліть довжини його діагоналей і координати точки їхнього перетину.

115. Дано сферу $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$.

1°) Чи лежить на сфері точка $(-3; 1; 5)$?

2°) Знайдіть відстань від центра сфери до точки $(-5; 2; 0)$.

3°) Складіть рівняння сфери з тим самим радіусом і яка має центр у точці (–5; 2; 0).

4) Складіть рівняння сфери, симетричної даній відносно площини yz.

116. Дано сферу $x^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

1°) Чи лежить на сфері точка (0; –2; 7)?

2°) Знайдіть відстань від центра сфери до точки (1; 0; –2).

3°) Складіть рівняння сфери з тим самим центром і з діаметром 6.

4) Складіть рівняння сфери, симетричної даній відносно площини xy.

117. Маємо точки $A(1; -1; 2)$, $B(2; 3; -5)$, $C(-1; 3; -2)$ і площину α: $3x+4y-z=1$.

1°) Чи лежить точка A в площині α?

2°) Знайдіть точки перетину площини α з координатними осями.

3°) Складіть рівняння площини β, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої AC.

4) Визначте взаємне розміщення площин α і β.

5) Знайдіть кут між площинами α і β.

118. Маємо точки $A(2; -1; 3)$, $B(1; 0; -1)$, $C(-1;2;1)$ і площину α: $x-2y+3z=2$.

1°) Чи лежить точка C в площині α?

2°) Знайдіть точки перетину площини α з координатними осями.

3°) Складіть рівняння площини β, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої BC.

4) Визначте взаємне розміщення площин α і β.

5) Знайдіть кут між площинами α і β.

119. Доведіть, що площина, яка перетинає координатні осі в точках $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ і $(0; 0; c)$, має рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Підсумок

Головні означення

Прямокутними координатами точки М простору називають координати проекцій точки M на осі координат, узяті за порядком нумерації осей.	$M(x; y; z)$

Координатами вектора $\vec{a}$ в прямокутній системі координат називають коефіцієнти у його розкладанні за ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.	$\vec{a} = (x; y; z)$
Фігуру, складену з усіх точок простору M, відстань R від яких до даної точки O однакова, називають ***сферою***.	$OM = R$

Головні твердження

Координати вектора $\overline{AB}$ обчислюються за формулою

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \text{ де } A(x_1; y_1; z_1),\ B(x_2; y_2; z_2).$$

Довжина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Відстань d між точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Для обчислення кута φ між двома ненульовими векторами $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ використовують формулу

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ненульові вектори $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

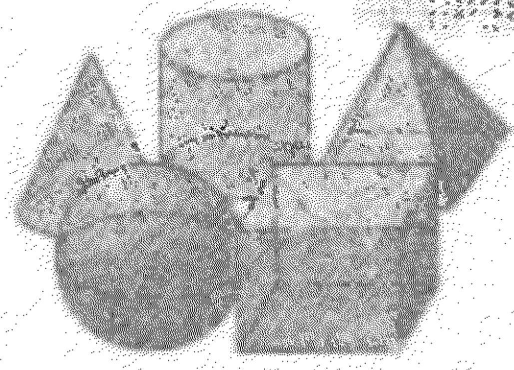
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Вектор $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ колінеарний ненульовому вектору $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ тоді і тільки тоді, коли існує таке число λ, що

$$x_1 = \lambda x_2; y_1 = \lambda y_2; z_1 = \lambda z_2.$$

Рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ є рівнянням сфери з центром у точці $(a; b; c)$ з радіусом R.

Рівняння $ax + by + cz + d = 0$ є рівнянням площини, якщо не всі коефіцієнти a, b, c дорівнюють нулю.



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Вектори і координати»

Завдання для самоконтролю

1°. Чи правильно, що вершини паралелограма задають 12 різних ненульових векторів?

2°. Чи є чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо $\overline{AB} = \overline{DC}$?

3. Чи є умова колінеарності векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ необхідною для паралельності прямих AB і CD?

4. Чи правильно, що $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a}|$?

5. Чи випливає з нерівності $k < 1$ нерівність $|k\vec{c}| < |\vec{c}|$?

6°. Чи правильно, що коли $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$?

7. Чи є перпендикулярними прямі AB і AC, якщо $(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = (\overline{AB} - \overline{AC})^2$?

8. Чи обов'язково тіло рухатиметься, якщо на нього діють три рівні сили?

9°. Чи правильно, що відстань від точки $M(-2;\ 3;\ 1)$ до площини xy менша за відстань від цієї точки до початку координат?

10°. Чи симетричні точки $A\ (a;b;-c)$ і $B\ (-a;b;c)$ відносно площини xy?

11. Чи зміняться координати точок на протилежні, якщо напрями всіх координатних осей змінити на протилежні?

12°. Чи правильно, що скалярна проекція вектора $\vec{a} = (-5;1;-3)$ на вісь x дорівнює 5?

13°. Чи правильно, що вектори $\vec{a} = (2;4;2)$ і $\vec{b} = (1;2;1)$ колінеарні?

14°. Чи є протилежними вектори $\vec{a} = (5;-4;1)$ і $\vec{b} = -5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$?

15°. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a} = (1;2;3)$ і $\vec{b} = (1;-2;1)$?

16. Чи правильно, що рівняння $y = -1$ у просторі задає пряму?

17. Чи правильно, що рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 0$ є рівнянням сфери?

Відповіді до завдань для самоконтроля

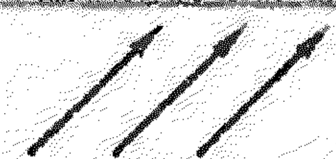
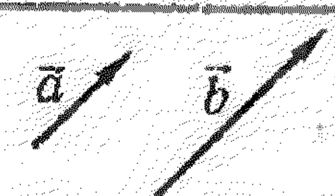
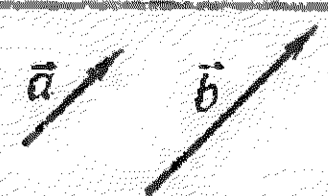
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ні	Так	Так	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Так	Ні
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**			
Так	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Ні			

Зразок контрольної роботи №2

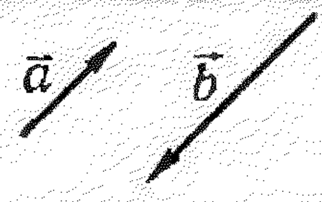
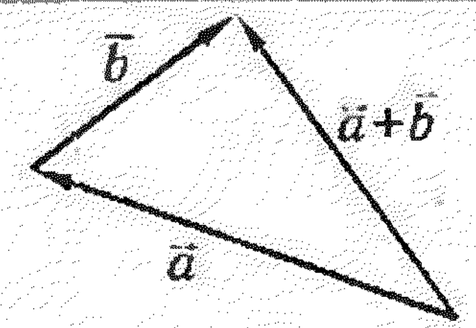
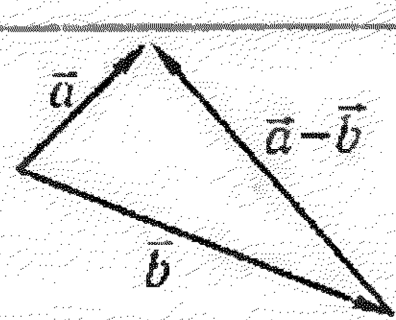
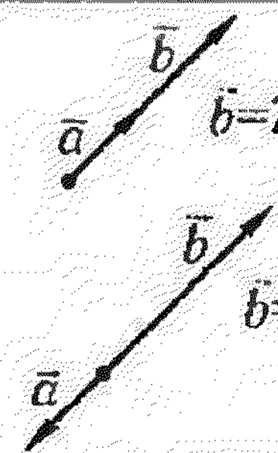
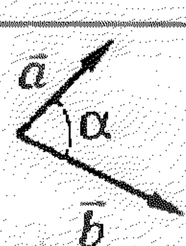
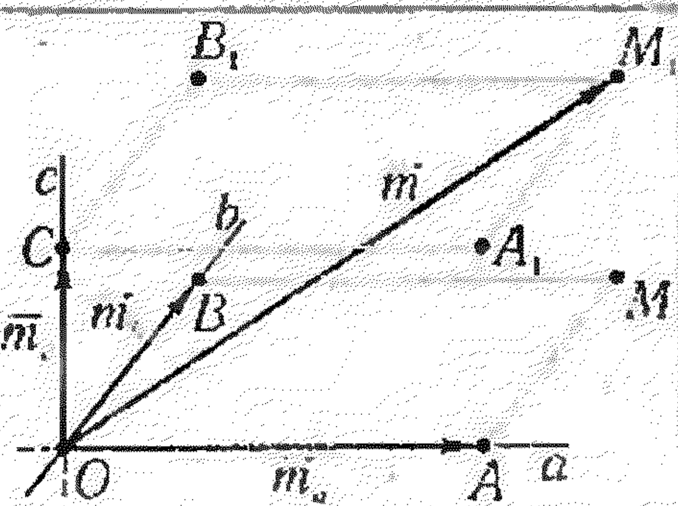
1. Маємо точки $A(1;1;-2)$, $B(-3;5;1)$, $C(4;5;-1)$.
   1°) Знайдіть координати точки, симетричної точці C відносно площини xy.
   2°) Обчисліть відстань від точки B до площини xz.
   3°) Обчисліть довжину відрізка AB.
   4°) Знайдіть координати вектора $2\overline{AB}-\overline{BC}$.
   5) Обчисліть довжину вектора $\overline{QC}$, якщо $\overline{BQ}=3\overline{AQ}$.
   6) Складіть рівняння сфери з центром у точці B, яка проходить через середину відрізка AB.
   7) Складіть рівняння площини, що проходить через точку C перпендикулярно до прямої BC.
   8*) Дослідіть взаємне розміщення сфери і площини, визначених у завданнях 6) і 7).

Векторне числення

Таблиця 17

Поняття	Геометрична ілюстрація	Символічний запис
Вектор		$\vec{a}$
Протилежні вектори		$\vec{a}$ і $-\vec{a}$
Колінеарні вектори		$\vec{a} \parallel \vec{b}$
Однаково напрямлені вектори		$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

Таблиця 17 (продовження)

Поняття	Геометрична ілюстрація	Символічний запис
Протилежно напрямлені вектори		$\vec a \uparrow\downarrow \vec b$
Сума векторів		$\vec c = \vec a + \vec b$
Різниця векторів		$\vec c = \vec a - \vec b$
Добуток вектора на число		$\vec b = \lambda\vec a,\ \lambda > 0$ $\vec b = \lambda\vec a,\ \lambda < 0$
Скалярний добуток векторів		$\vec a \cdot \vec b = \lvert\vec a\rvert \cdot \lvert\vec b\rvert \cdot \cos\alpha$
Розкладання вектора на складові		$\vec m = \vec m_a + \vec m_b + \vec m_c$

Дії над векторами у координатній формі

Таблиця 18

Вектори, результат дії над ними	Координати вектора, результат дії над ними
$\vec{a}$	$(x_1; y_1; z_1)$
$\vec{b}$	$(x_2; y_2; z_2)$
$\vec{a}+\vec{b}$	$(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$
$\vec{a}-\vec{b}$	$(x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2)$
$\lambda\vec{a}$	$(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$
$\vec{a}\cdot\vec{b}$	$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Основні формули методу координат

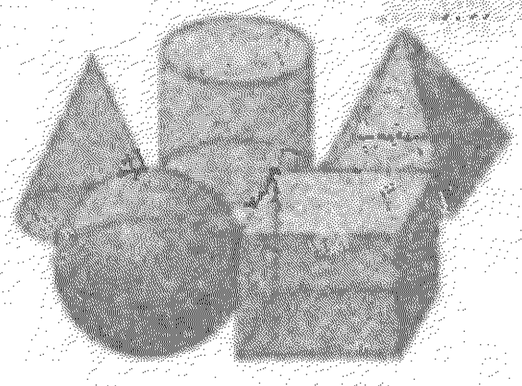
Таблиця 19

Величина	Формула для обчислення
Довжина вектора $\bar{a}$	$\bar{a}=(x, y, z)$ $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Довжина відрізка M_1M_2	$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
Кут φ між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$	$\bar{a}=(x_1, y_1, z_1), \bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ $\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

Властивості векторів у координатній формі

Таблиця 20

Властивість	Колінеарність векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$	Перпендикулярність векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$
Подання властивості в координатній формі	$\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ $x_1=\lambda x_2, y_1=\lambda y_2, z_1=\lambda z_2$	$\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$



Історичний коментар

Ідея зображення величин відрізками (не напрямленими) використовувалась у Стародавній Греції. У фізиці, починаючи з XVI ст., вчені за допомогою напрямлених відрізків зображали дію сил (Леонардо да Вінчі (1452–1519), Г. Галілей (1564 –1642) та ін.). Голландський математик та інженер С. Стевін (1548–1620) розкладав сили на складові й увів правило паралелограма.

У математику поняття вектора увійшло значно пізніше. Першим векторне числення запропонував норвезький математик К. Вессель (1745–1818), хоча його роботи залишилися поза увагою вчених. Тому творцями векторної алгебри вважають англійського математика У. Гамільтона (1805–1865), німецького математика Г. Грассмана (1809–1887). Сучасного вигляду векторне числення набуло наприкінці XIX ст. у працях американського фізика і математика Дж. Гіббса (1839–1903) та англійського фізика О. Хевісайда (1850–1925). З кінця XIX ст. векторна алгебра і векторний аналіз стали надійним інструментом математиків і фізиків.

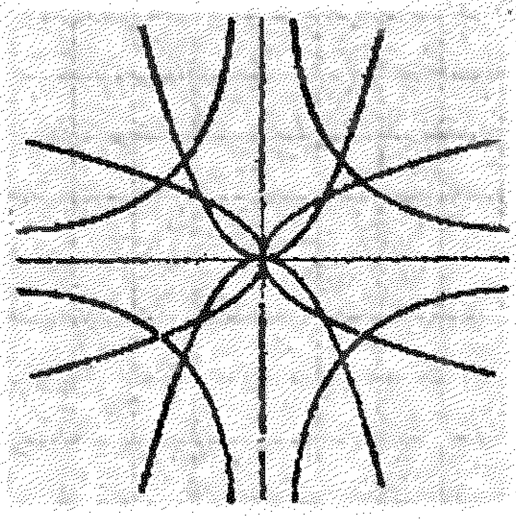
Уведення в математику координатного методу пов'язують з французькими математиками Р. Декартом (1596–1650) і П. Ферма (1601–1665). І хоча історично першим до ідеї характеризувати точки площини за допомогою пар чисел — координат — прийшов П. Ферма, першим опублікував і активно пропагував координатний метод саме Р. Декарт. Йому і віддають першість відкривача аналітичної геометрії. Р. Декарт чітко сформулював ідею моделювання геометричних образів алгебраїчними засобами і за допомогою свого методу дав розв'язання декількох класичних задач геометрії.

Як не дивно, координатний метод у просторі стали застосовувати лише через сто років. Першим, хто постійно і широко використовував координати у стереометрії, був французький математик А. Клеро (1713–1765). Швейцарський математик Л. Ейлер (1707–1783), який довгий час працював у Петербурзі, склав близький до сучасного курс аналітичної геометрії простору.

Розділ 3.

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Раніше розглядались елементарні методи дослідження функцій — математичних моделей багатьох реальних процесів і явищ. У цьому розділі ми познайомимось з новими методами дослідження функцій — методами **диференціального числення.** Методи диференціального числення дають змогу зводити вивчення складного процесу до простішого — рівномірного, знаходити його швидкість і прискорення, визначати умови оптимального перебігу процесу, оцінювати допущені похибки, будувати графіки тощо. Особливу увагу в даному розділі приділятимемо закріпленню і розвиненню навичок «читання» і побудови графіків функцій. Використання похідної дозволить точніше зображати графіки функцій. Розглядатимемо розв'язання прикладних задач, зокрема, на найбільше і найменше значення. Похідну використовуватимемо для дослідження рівнянь і нерівностей.

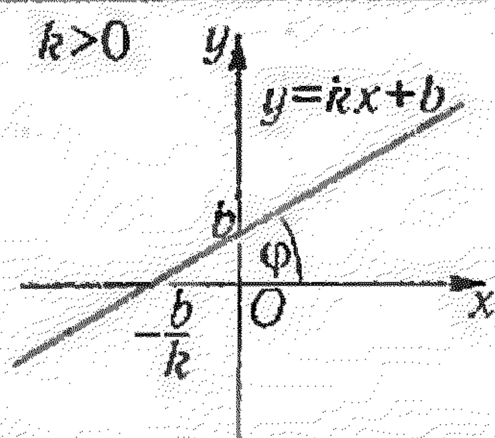
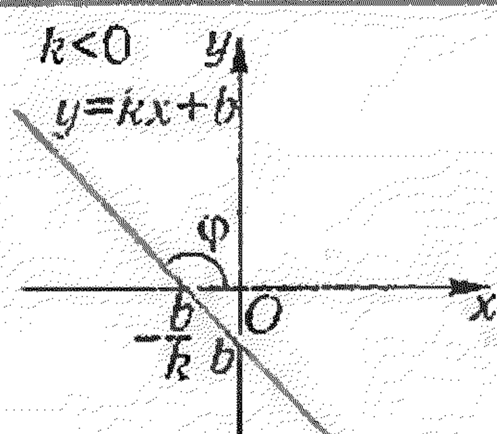
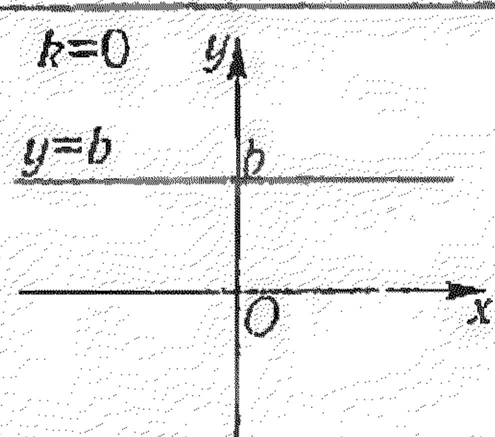


Готуємось до вивчення теми «Похідна та її застосування»

Вивчення теми «Похідна та її застосування» варто розпочати з огляду основних класів функцій, що вивчались раніше, їхніх властивостей і графіків. Для підготовки до вивчення теми наведено найважливіший матеріал у вигляді таблиць.

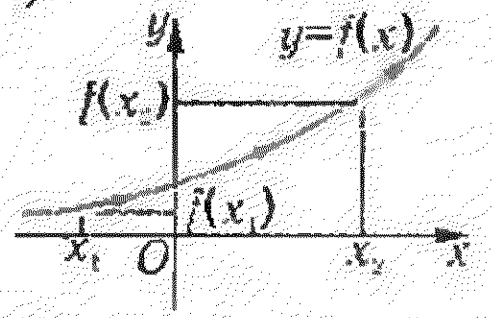
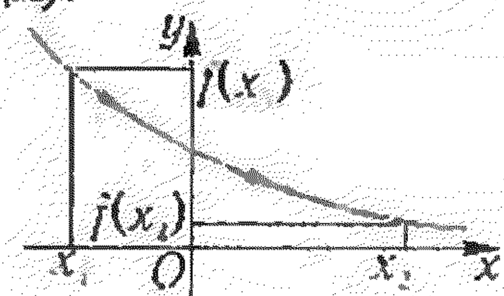
Лінійна функція

Таблиця 21

Функція	Графік	Властивості
$y = kx + b$, $k > 0$ k — тангенс кута φ нахилу її графіка (прямої) до осі x; $b = y(0)$		$D(y) = R$; $E(y) = R$; зростаюча, неперервна, має нуль $x = -\dfrac{b}{k}$
$y = kx + b$, $k < 0$		$D(y) = R$; $E(y) = R$; спадна, неперервна, має нуль $x = -\dfrac{b}{k}$
$y = b$		$D(y) = R$; $E(y) = \{b\}$; стала, неперервна

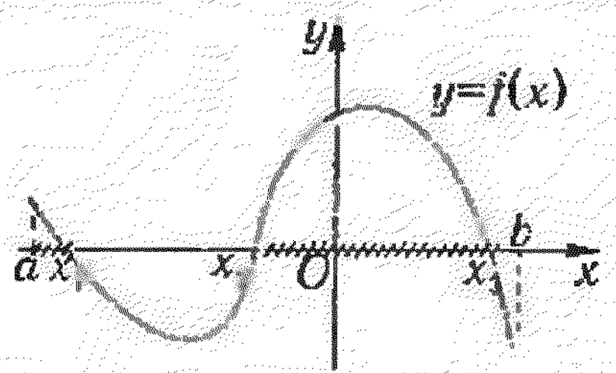
Монотонність функції

Таблиця 22

<table>
<tr><th>Зростаюча функція</th><th>Спадна функція</th></tr>
<tr><td>$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
(більшому значенню аргументу з області визначення функції відповідає більше значення функції).
</td><td>$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.
(більшому значенню аргументу з області визначення функції відповідає менше значення функції).
</td></tr>
</table>

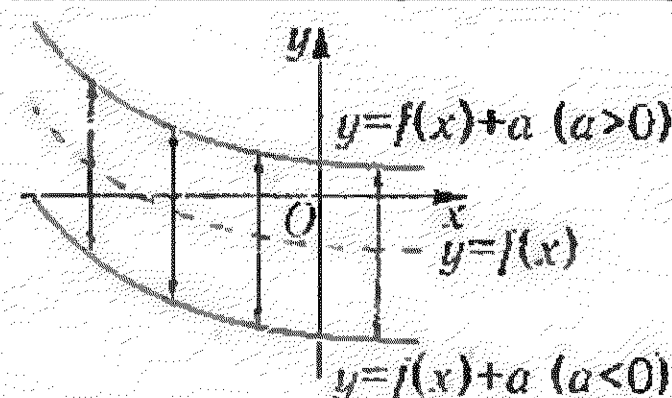
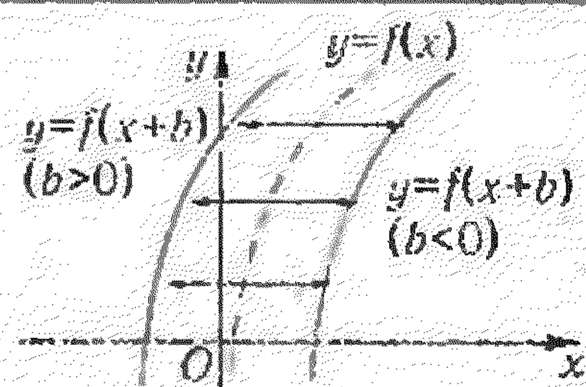
Нулі і проміжки знакосталості функції

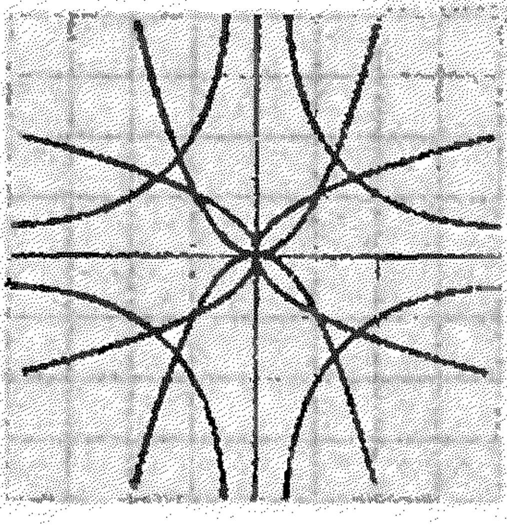
Таблиця 23

<table>
<tr><td>Нулі функції — абсциси точок перетину графіка функції з віссю x.
Проміжки знакосталості функції — проміжки, де функція набуває додатних або від'ємних значень.</td><td>
x_1, x_2, x_3 — нулі функції
$f(x) > 0$ $x \in [a; x_1) \cup (x_2; x_3)$
$f(x) < 0$ $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; b]$</td></tr>
</table>

Побудова графіків функцій

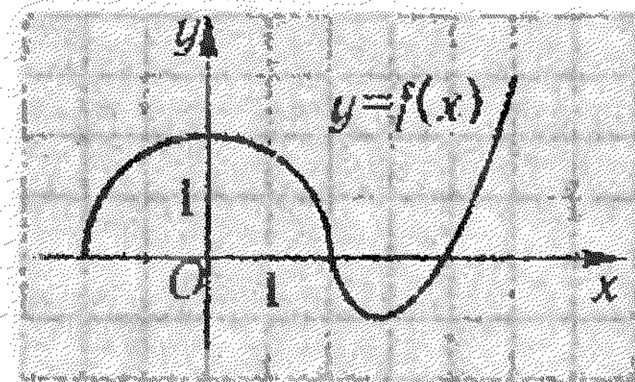
Таблиця 24

<table>
<tr><td>Графік функції $y = f(x) + a$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі y на $|a|$ одиниць: у напрямі осі y, якщо $a > 0$, і у напрямі, протилежному до напряму осі y, якщо $a < 0$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Графік функції $y = f(x + b)$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі x на $|b|$ одиниць: у напрямі осі x, якщо $b < 0$, і у напрямі, протилежному до осі x, якщо $b > 0$.</td><td></td></tr>
</table>



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Похідна та її застосування»

1. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$.



1) Скільки нулів має функція?

А. 0. **Б.** 1.
В. 2. **Г.** 3.

2) Визначте знак числа $a = f(2) - f(3)$.

А. $a < 0$. **Б.** $a = 0$.
В. $a > 0$. **Г.** Визначити неможливо.

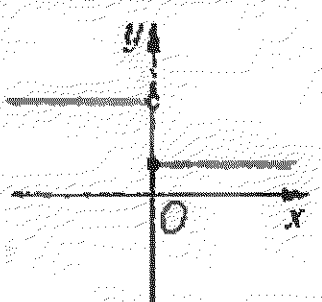
3) Вкажіть найбільший із проміжків спадання функції.

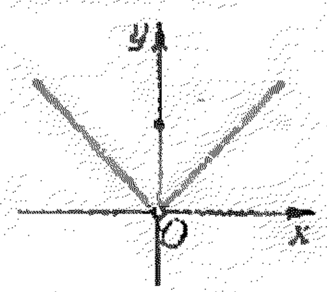
А. $[-2; 2]$. **Б.** $[0; 2]$. **В.** $[0; 3]$. **Г.** $[-2; 0]$.

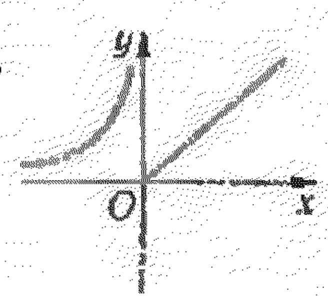
4) Яким є найбільше і найменше значення функції?

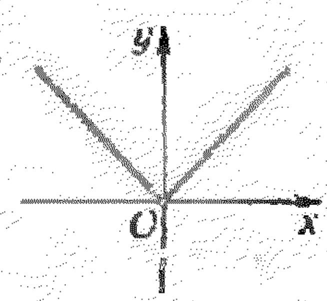
А. $f(0)$, $f(3)$. **Б.** $f(5)$, $f(3)$. **В.** $f(5)$, $f(-2)$. **Г.** $f(3)$, $f(5)$.

2. На якому рисунку зображено графік функції, неперервної у своїй області визначення?

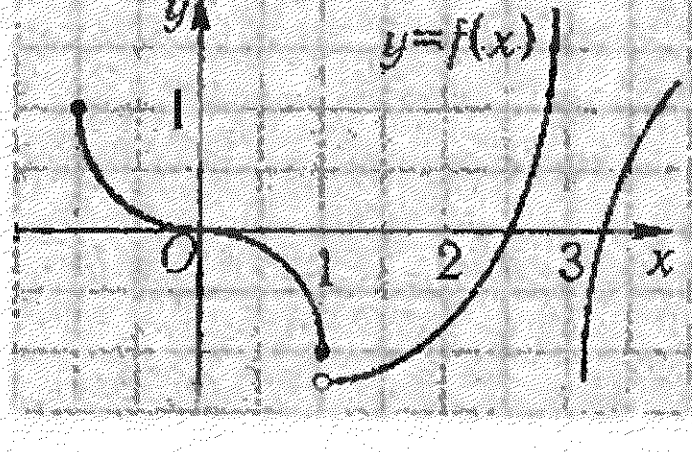
А.


Б.


В.


Г.


3. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$.



1) Вкажіть усі її точки розриву.

А. $x = 3$.
Б. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
В. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.
Г. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

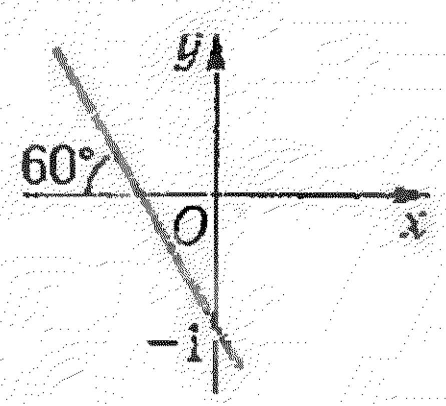
2) В якій з точок розриву ця функція визначена?

А. Функція не визначена в жодній з точок розриву.
Б. $x = 3$. **В.** $x = 1$. **Г.** $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

4. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої, що є графіком функції $y = \frac{5x-1}{2}$?

А. 5. Б. 2,5. В. –1. Г. –0,5.

5. Задайте за допомогою формули функцію, графік якої зображено на рисунку.



А. $y = -\sqrt{3}x - 1$. Б. $y = \sqrt{3}x - 1$.
В. $y = -\sqrt{3}x + 1$. Г. $y = \sqrt{3}x + 1$.

6. Яка з наступних функцій є зростаючою?

А. $y = 1 - 2x$. Б. $y = -1 - 2x$.
В. $y = -(1 - 2x)$. Г. $y = -\frac{1+2x}{3}$.

7. Пряма проходить через точки $A(0; 1)$ і $B(1; 2)$. Яким є її кутовий коефіцієнт?

А. 0. Б. 1.
В. 2. Г. Визначити неможливо.

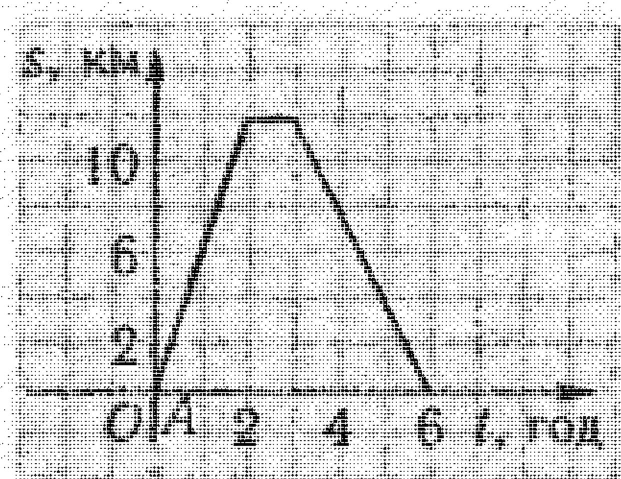
8. Чому дорівнює значення виразу $f(x_0 + 5) - f(x_0)$, якщо $f(x) = 4x - 3$?

А. 20. Б. 12. В. $8x_0$.
Г. Відповідь відрізняється від наведених.

9. Точка рухається вздовж координатної осі. Закон її руху має вигляд $x = 3t + 2$, де x — координата точки, t — час. З якою швидкістю v рухається точка?

А. $v = 3$. Б. $v = 2$. В. $v = 1,5$.
Г. Швидкість залежить від часу.

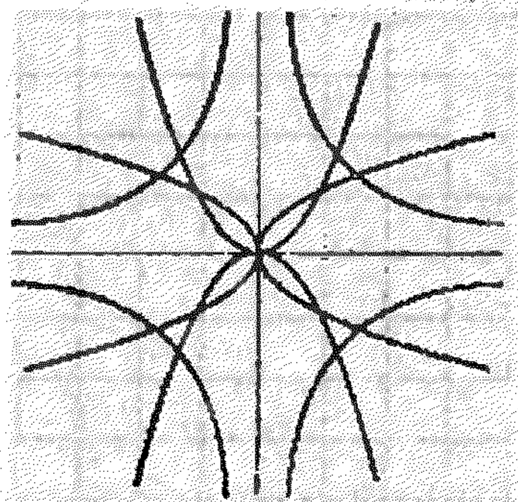
10. На рисунку зображено графік закону руху пішохода. Якою є швидкість руху пішохода на проміжку часу:



1) [3;6];
А. 12 км/год. Б. 0 км/год.
В. 4 км/год. Г. 3 км/год.
2) [2;3]?
А. 12 км/год. Б. 0 км/год.
В. 4 км/год. Г. 3 км/год.

11. При вільному падінні залежність між пройденою тілом відстанню s і часом t задається формулою $s = \frac{gt^2}{2}$, де $g \approx 9,8$ м/с² — прискорення вільного падіння. Яку відстань пролетить тіло за другу секунду падіння?

А. $2g$ м. Б. $1,5g$ м. В. $0,5g$ м.
Г. Відповідь відрізняється від наведених.



30. Похідна функції

У даному параграфі ми познайомимось з одним із головних понять математики — похідною, її геометричним і фізичним змістом; навчимось знаходити похідні найпростіших функцій і використовувати їх при розв'язанні прикладних задач.

1. Задачі, що приводять до поняття похідної

Розв'язання багатьох задач фізики, геометрії, техніки зводяться до однакових математичних побудов, які і стали основою поняття похідної. Однією з таких задач є задача про знаходження миттєвої швидкості руху.

Якщо матеріальна точка рухається рівномірно, тобто за однакові проміжки часу проходить той самий шлях, то швидкість її руху легко знайти: необхідно шлях, який пройшла точка за будь-який проміжок часу, поділити на час руху. Як відомо, при рівномірному русі залежність шляху s від часу t виражається формулою $s = vt$, де v — швидкість руху, тобто є лінійною функцією.

Для характеристики нерівномірного руху застосовують поняття ***середньої швидкості руху на проміжку часу***.

Середня швидкість руху точки на деякому проміжку часу — це відношення шляху, пройденого точкою за цей проміжок часу, до довжини цього проміжку. Середня швидкість нерівномірного руху, на відміну від швидкості рівномірного руху, залежить від проміжку часу, за який вона обчислюється.

Нехай, наприклад, точка рухається прямолінійно і $s = t^2$ — шлях, пройдений нею за проміжок часу $[0; t]$. Обчислимо середню швидкість її руху за проміжки часу $[3; 4]$, $[3; 3{,}1]$, $[3; 3{,}01]$, $[3; 3{,}001]$ і т. д. Одержимо:

$$v_{сер}[3; 4] = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = \frac{4^2 - 3^2}{1} = 7,$$

$$v_{сер}[3;\,3{,}1] = \frac{s(3{,}1)-s(3)}{3{,}1-3} = \frac{3{,}1^2-3^2}{0{,}1} = 6{,}1,$$

$$v_{сер}[3;\,3{,}01] = \frac{s(3{,}01)-s(3)}{3{,}01-3} = \frac{3{,}01^2-3^2}{0{,}01} = 6{,}01,$$

$$v_{сер}[3;\,3{,}001] = \frac{s(3{,}001)-s(3)}{3{,}001-3} = \frac{(3{,}001)^2-3^2}{0{,}001} = 6{,}001 \text{ і т. д.}$$

Виникає питання: якою вважати швидкість руху точки в момент часу $t = 3$?

Легко помітити, що середня швидкість руху точки при зменшенні проміжку часу наближається (як ще кажуть — «прямує») до числа 6. Оскільки проміжки часу, що розглядалися, зменшуючись, стягуються до моменту часу $t_0 = 3$, то природно прийняти число 6 за швидкість руху точки в момент часу $t_0 = 3$. Подібні міркування можна навести і в загальному випадку.

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж координатної прямої і $x = x(t)$ — закон її руху (тобто залежність координати точки від часу). Зафіксуємо певний момент часу t_0 і позначимо через Δt проміжок часу, який минув, починаючи з моменту t_0. Тоді $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$ — переміщення точки, а $\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$ — її середня швидкість за проміжок часу Δt. Чим менший цей проміжок часу, тим точніше середня швидкість точки характеризує рух.

Величину, до якої прямує середня швидкість руху точки, коли проміжок Δt прямує до нуля, називають ***швидкістю точки в момент часу t_0***, або ***миттєвою швидкістю руху точки.***

Аналогічно визначається не тільки швидкість механічного руху, але і швидкість нагрівання тіла, швидкість випаровування рідини, швидкість перебігу хімічної реакції і т. ін. Всі ці задачі розв'язуються за однією схемою.

1. Знаходять середню швидкість перебігу процесу за деякий проміжок часу $[t_0;\,t]$.
2. Стягують проміжок $[t_0;\,t]$ у точку t_0, тобто спрямовують t до t_0.
3. З'ясовують, до чого прямує середня швидкість перебігу процесу при t, що прямує до t_0.

Зверніть увагу на те, що миттєву швидкість у точці t_0 можна обчислювати, користуючись проміжком $[t; t_0]$, тобто для $t < t_0$. Якщо перебіг процесу плавний, то результат буде той самий.

У таких випадках кажуть, що задача розв'язується за допомогою ***граничного переходу***.

Якщо процес описується лінійною функцією $f(t) = kt + b$, то його середня швидкість за будь-який проміжок часу є сталою:

$$v_{\text{сер}}[t_0;t_0+\Delta t] = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \frac{k(t_0+\Delta t)-kt_0}{\Delta t} = k.$$

Отже, і миттєва швидкість перебігу процесу в будь-який момент часу є сталою і дорівнює k. Лінійна функція $f(t) = kt + b$ описує рівномірні процеси, які відбуваються зі швидкістю k.

Поняття миттєвої швидкості зміни величини широко застосовується у природознавстві і техніці. Покажемо, наприклад, як уводиться поняття сили струму.

Нехай $q = q(t)$ — кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за деякий проміжок часу $[0;t]$. Тоді $\Delta q(t_0) = q(t_0+\Delta t) - q(t_0)$ — кількість електрики, яка проходить через указаний переріз за проміжок часу $[t_0;t_0+\Delta t]$.

Величину $\dfrac{\Delta q(t_0)}{\Delta t}$ називають ***середньою силою струму за проміжок часу*** $[t_0;t_0+\Delta t]$. Якщо спрямувати t до t_0, то величину, до якої прямує середня сила струму на проміжку $[t_0;t_0+\Delta t]$, називають ***силою струму в момент часу*** t_0.

Таким чином, сила струму є миттєвою швидкістю зміни кількості електрики, що проходить через поперечний переріз провідника.

Оскільки перебіг процесів зазвичай описуються функціями, то доцільно ввести поняття швидкості зміни функції в точці.

Контрольні запитання

1°. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x = 2 - 3t$, де x — координата точки, t — час. Якою є швидкість руху точки? В якому напрямі координатної прямої рухається точка?

2°. Матеріальна точка, рухаючись прямолінійно і рівномірно, в момент часу $t = 1$ мала координату $x = 3$, а в момент часу $t = 3$ — координату $x = 7$. Якою є швидкість її руху?

3°. Який вигляд має графік закону рівномірного руху матеріальної точки вздовж координатної прямої?

4°. На рис. 67 зображено залежність шляху s, пройденого матеріальною точкою, від часу t. Якою є швидкість руху точки?

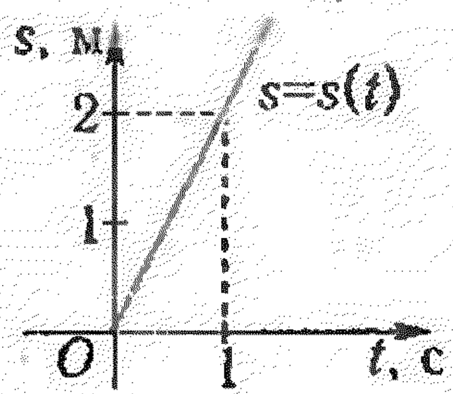


Рис. 67

5. Точка рухається вздовж координатної прямої за законом $x = 3t^2$, де x — координата точки, t — час. Якою є середня швидкість руху точки на проміжку [1; 3]?

6. Маса солі, що розчинилася у воді за проміжок часу $[0; t]$, дорівнює $m(t)$. Що треба розуміти під:

а) середньою швидкістю розчинення солі за проміжок часу [1; 2];

б) швидкістю розчинення у момент часу $t = 1$?

2. Границя функції в точці

Б

Перед тим, як увести поняття «швидкості зміни функції в точці», розглянемо поняття граничного переходу, за допомогою якого і буде вводитись зазначене поняття. Як ми бачили вище, цей метод міркувань зводиться до дослідження поведінки функції при прямуванні її аргументу до деякого значення.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, можливо, за виключенням самої точки x_0.

Якщо значення функції $y = f(x)$ прямують до деякого числа a при x, що прямує до x_0 ($x \neq x_0$), то кажуть, що функція має границю в точці x_0, що дорівнює a.

Скорочено це записують так: $f(x) \to a$ при $x \to x_0$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ (читають: границя функції $f(x)$ у точці $x = x_0$, або при x, що прямує до x_0, дорівнює a).

Символ lim є скороченням латинського слова limes (лiміт), яке у перекладі означає «границя».

Використовуючи термін «границя», можна сказати, що миттєва швидкість $v(t_0)$ руху точки — це границя середньої швидкості $v_{сер}[t_0; t]$ руху точки на проміжку часу $[t_0; t]$ при t, що прямує до t_0. У символічній формі: $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} v_{сер}[t_0; t]$.

Дослідимо, наприклад, поведінку лінійної функції $f(x) = x + 1$ при прямуванні x до 1. Складемо таблицю значень цієї функції.

Таблиця 25

x	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	$\to 1 \leftarrow$	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,5	1,8	1,9	1,99	1,999	$\to 2 \leftarrow$	2,001	2,01	2,1

З таблиці видно, що коли значення аргументу прямують до 1 з одного чи іншого боку відповідні значення функції прямують до 2. У тому самому легко переконатися, прослідкувавши за графіком функції $y = f(x)$ зміну її значень при наближенні x до 1 (рис. 68). Функція $f(x) = x + 1$ має границю в точці $x = 1$, яка дорівнює 2, тобто $\lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

Зверніть увагу на те, що границя функції $f(x) = x + 1$ у точці $x = 1$ дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1).$$

Ця властивість є характерною для всіх неперервних функцій (рис. 69).

Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною у деякому околі точки x_0, то границя функції в точці x_0 дорівнює її значенню в цій точці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

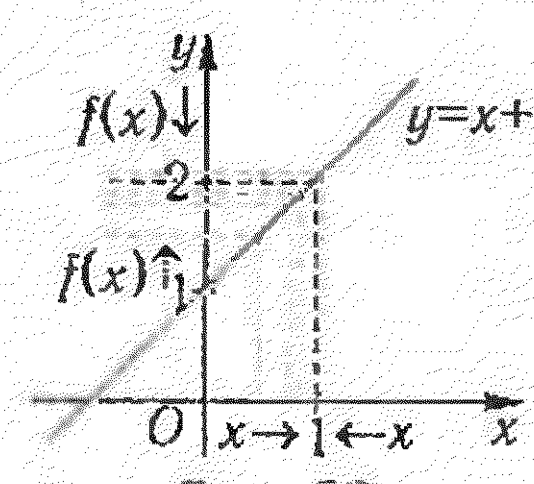


Рис. 68

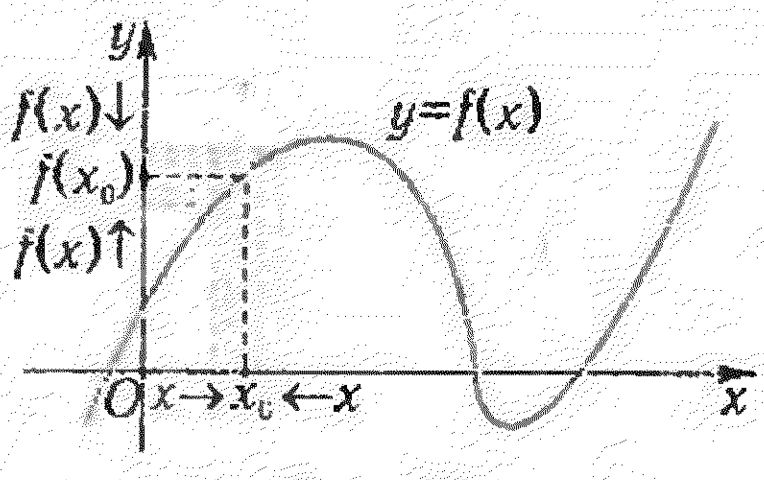


Рис. 69

Використовуючи цю властивість, можна знайти границі багатьох функцій. Наприклад, ми знаємо, що квадратична функція неперервна на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тому

$$\lim_{x \to 2}(x^2 + 3x + 1) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 11.$$

Аналогічно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=\sqrt{9}=3$; $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$, тобто границя сталої функції $f(x)=c$ у довільній точці дорівнює числу c.

Розглянемо тепер функції, які мають точки розриву, і дослідимо поведінку цих функцій в околах точок розриву. Функція $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ не визначена в точці $x=1$. Якщо $x\neq 1$, то $g(x)=x+1$, тобто співпадає з неперервною функцією, яка розглядалась раніше. Її графік (рис. 70) збігається при $x\neq 1$ з графіком функції $f(x)=x+1$. Отже, незважаючи на те, що функція розривна в точці $x=1$, вона має границю в цій точці, яка дорівнює 2:

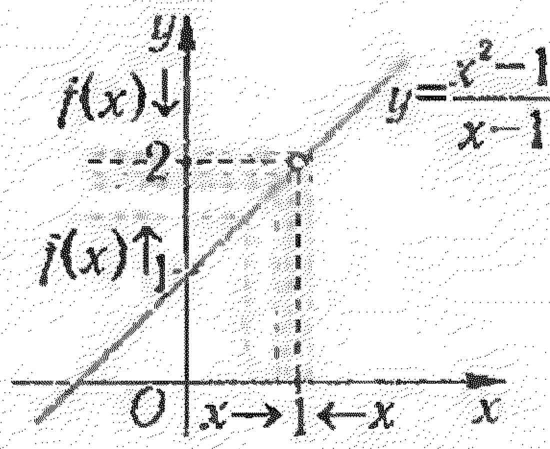


Рис. 70

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

Узагальненням цього прикладу є наступне твердження.

Якщо функція має точку розриву x_0, але її значення при всіх x з деякого околу цієї точки, окрім x_0, дорівнюють значенням деякої неперервної функції, то вона має границю в точці x_0, яка дорівнює значенню цієї неперервної функції в точці x_0.

Приклад 1. Обчислити: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin x}$.

☐ 1) Оскільки $\frac{x^2+3x}{x}=\frac{x(x+3)}{x}=x+3, x\neq 0$, а функція $y=x+3$ неперервна в точці $x=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=0+3=3$.

2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}(2\sin x)=2\sin\pi=0$. ■

Відповідь. 1) 3; 2) 0.

На підставі того, що було викладено вище, функція $y=\varphi(x)$, графік якої зображено на рис. 71, має границю в своїй точці розриву $x=0$. В точці розриву функція визначена, її значення в цій точці дорівнює 3. Якщо точку графіка функції $y=\varphi(x)$ з координатами (0; 3) замінити точкою з координатами (0; 2), то одержимо

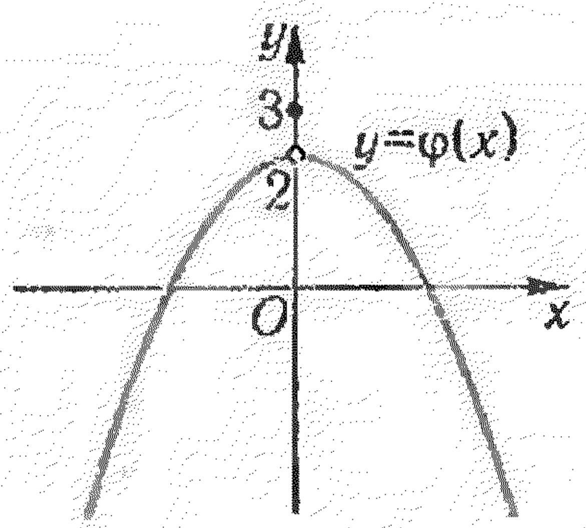


Рис. 71

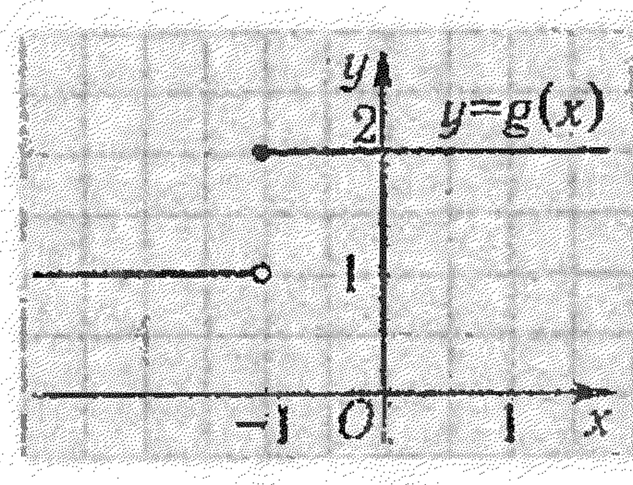


Рис. 72

нерозірвану лінію, яка є графіком деякої неперервної функції. Функція $y = \varphi(x)$ скрізь, окрім точки $x = 0$, збігається з цією функцією. Границя неперервної функції при x, що прямує до 0, дорівнює 2. Відтак і $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 2$.

Функція $y = g(x)$, графік якої зображено на рис. 72, не має границі в точці розриву $x = -1$ її графіка. Якщо значення аргументу прямують до -1 зліва, то значення функції прямують до 1, а якщо справа, то до 2.

І у загальному випадку, якщо графік функції має стрибок у точці розриву, то функція в цій точці границі не має.

Твердження, які висловлювались вище, спирались не на доведення, а на наочно-інтуїтивні уявлення про границю функції. Для їхнього доведення необхідно уточнити поняття границі функції, яке ми ввели раніше, а саме, необхідно сформулювати математичною мовою речення «функція прямує до числа a при x, що прямує до x_0».

Функція $y = f(x)$ прямує до числа a, коли x прямує до x_0, якщо наближеній рівності $f(x) \approx a$ можна забезпечити будь-яку наперед задану точність для всіх значень x, достатньо близьких до x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0.

Точку x_0 ми виключаємо, бо в ній функція може бути не визначена.

Це означає, що модуль різниці $|f(x) - a|$ можна зробити меншим від будь якого додатного числа h для всіх x, достатньо близьких до x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0.

Користуючись наведеним означенням, доведемо, що $\lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$. Оцінимо точність наближеної рівності $f(x) \approx 2$. Вона дорівнює $|f(x) - 2| = |x + 1 - 2| = |x - 1|$. Відтак, число 2 є наближенням до $f(x)$ з точністю 0,1, якщо x взяти таким, щоб $|x-1| < 0,1$, тобто $0,9 < x < 1,1$. Міркуючи аналогічно, одержимо наступну таблицю.

Таблиця 26

x	$0,9 < x < 1,1$	$0,99 < x < 1,01$	$0,999 < x < 1,001$	...	$1-h < x < 1+h$
$\lvert f(x)-2\rvert$	$< 0,1$	$< 0,01$	$< 0,001$	...	$< h$

З таблиці видно, що насправді значення функції $f(x) = x + 1$ можна наблизити до числа 2 з будь-якою точністю, якщо x брати досить близьким до 1.

Нехай тепер функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ у точці x_0 мають границі a і b відповідно. Це означає, що наближеним рівностям $f(x) \approx a$, $g(x) \approx b$ можна забезпечити довільну наперед задану точність, якщо значення $x \neq x_0$ брати достатньо близькими до x_0. Відтак і наближеним рівностям $f(x) + g(x) \approx a + b$, $f(x) \cdot g(x) \approx a \cdot b$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \approx \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ можна забезпечити довільну наперед задану точність, якщо значення $x \neq x_0$ брати достатньо близькими до x_0. На підставі цих міркувань можна стверджувати, що сума, добуток і частка функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ також мають границі у точці x_0.

Отже, справджуються наступні правила знаходження границь.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a + b$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = ab$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$, **якщо $b \neq 0$.**

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\sin x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

☐ Користуючись послідовно правилами 1 і 2, матимемо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\sin x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\sin x - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0. \ ■$$

Відповідь. 0.

Контрольні запитання

1°. На рис. 73 зображено графік функції $y = \varphi(x)$.

а) Чому дорівнює $\lim\limits_{x \to ?} \varphi(x)$?

б) Укажіть точки розриву функції.

в) Чи визначена функція в точках розриву?

г) Чи існує границя функції у кожній з цих точок? Якщо існує, то чому вона дорівнює?

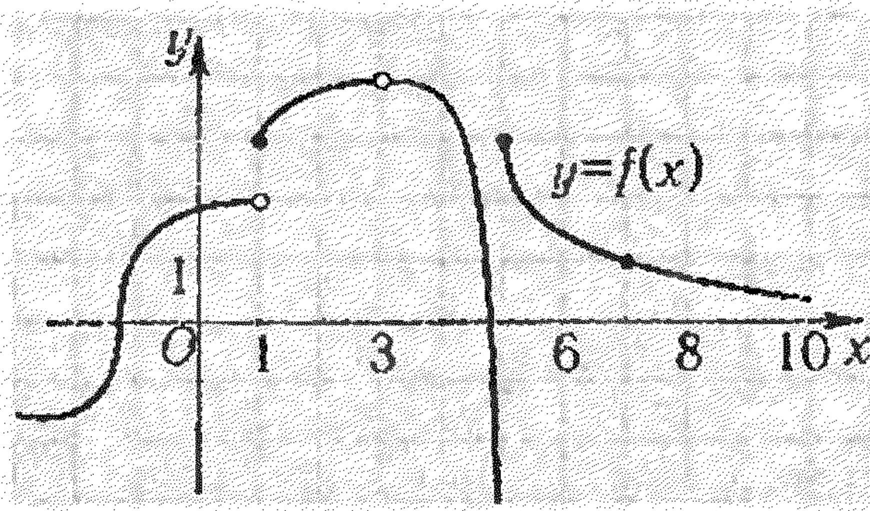


Рис. 73

2°. Чому дорівнює границя неперервної функції в будь-якій точці її області визначення?

3°. Чому дорівнює границя функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо:

а) $f(x) = 1 - 2x^2$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = (2x - 4)^2$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \dfrac{(2x-4)^2}{x-2}$, $x_0 = 2$?

3. Похідна та її фізичний зміст

Розглянемо тепер більш детально поняття швидкості зміни функції в точці.

Нехай x_0 — деяка задана точка, а x — довільна точка з області визначення функції $y = f(x)$. Різницю $x - x_0$ називають ***приростом аргументу*** в точці x_0 і позначають Δx (читається «дельта ікс»), тобто $\Delta x = x - x_0$. Тоді $x = x_0 + \Delta x$. Точку x можна брати як зліва, так і справа від точки x_0. Тому Δx може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

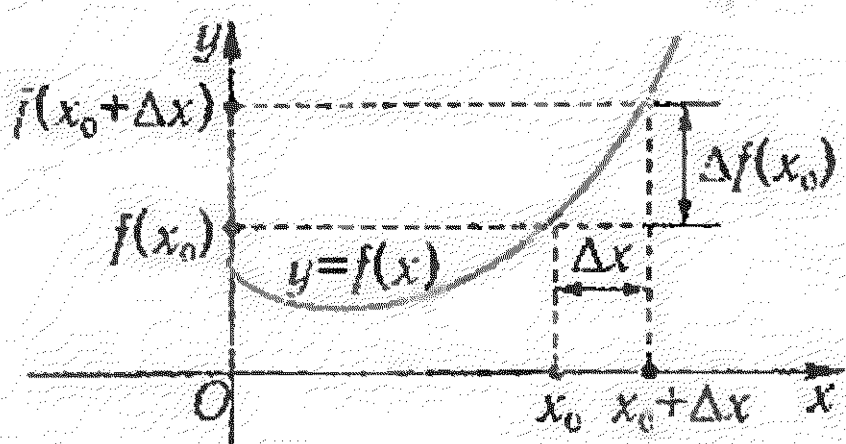


Рис. 74

Різницю $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називають ***приростом функції $y = f(x)$ у точці x_0***, який відповідає приросту аргументу Δx, і позначають $\Delta f(x_0)$ або Δy, тобто $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Геометричний зміст приросту аргументу і приросту функції показано на рис. 74.

Приклад 3. Знайти приріст функції $f(x)=2x^2-1$ в точці $x_0=1$, який відповідає приросту аргументу:

1) $\Delta x=1$; 2) $\Delta x=-2$; 3) $\Delta x=0{,}1$; 4) $\Delta x=-0{,}1$.

□ Користуючись виразом для $f(x)$, маємо:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+\Delta x)-f(1)=2(1+\Delta x)^2-1-1=$$

$$=2(1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1)=2\Delta x(2+\Delta x).$$

Обчислимо приріст функції $\Delta f(1)$ для відповідних значень приросту аргументу Δx. Результати наведено у наступній таблиці.

Δx	1	–2	0,1	–0,1
$\Delta f(1)$	6	0	0,42	–0,38

■

Відповідь: 1) 6; 2) 0; 3) 0,42; 4) –0,38.

Відношення приросту функції $y=f(x)$ на проміжку $[x_0; x_0+\Delta x]$ при $\Delta x>0$ (або $[x_0+\Delta x; x_0]$, якщо $\Delta x<0$) до приросту аргументу, тобто $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, називають ***середньою швидкістю зміни функції*** на цьому проміжку.

Швидкістю зміни функції $y=f(x)$ в точці x_0 називають границю її середньої швидкості $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$.

Швидкість зміни функції в точці x_0, називають ***похідною*** функції в цій точці.

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ у точці x_0 до приросту аргументу Δx, коли Δx прямує до нуля.

Похідну функції $y=f(x)$ в точці x_0 позначають через $f'(x_0)$ (читається: «еф штрих від x_0») або $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ (читається: «де еф від x_0 по де ікс»). Згідно з означенням, маємо:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Функція, що має похідну в точці x_0, називається ***диференційовною*** в цій точці.

Функція, що має похідну в кожній точці деякого проміжку, називається ***диференційовною на цьому проміжку.***

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, то в кожній його точці x_0 визначено значення похідної $f'(x_0)$. Тим самим на розглянутому проміжку задано функцію, яка називається ***похідною функції*** $y = f(x)$ і позначається $y = f'(x)$.

Операція відшукання похідної функції називається ***диференціюванням.***

З означення похідної в точці випливає її фізичний зміст. ***Якщо функція є законом зміни деякої фізичної величини, то її похідна є миттєвою швидкістю зміни цієї величини.***

Зокрема, якщо $x = x(t)$ — закон прямолінійного руху точки, то $x'(t)$ — швидкість руху точки.

Для знаходження похідної функції в точці x_0 зазвичай використовують наступну схему.

1. Знаходять приріст функції $\Delta f(x_0)$, який відповідає приросту аргументу Δx.
2. Ділять приріст функції $\Delta f(x_0)$ на приріст аргументу Δx.
3. Знаходять границю одержаного виразу при Δx, що прямує до нуля.

Наведемо приклади знаходження похідних деяких функцій.

Приклад 4.

Довести, що похідна сталої функції $y = c$ в кожній точці числової осі дорівнює нулю, тобто $(c)' = 0$.

□ 1) Візьмемо довільну точку x_0 і приріст Δx. Знайдемо відповідний приріст функції $y = c$: $y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = c - c = 0$.

2) Середня швидкість зміни функції $y = c$ дорівнює $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

3) Зрозуміло, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Отже, $(c)' = 0$. ■

Приклад 5. Знайти похідну лінійної функції $f(x) = kx + b$ у довільній точці числової осі.

□ 1) Візьмемо довільну точку x_0 і приріст Δx. Знайдемо відповідний приріст функції $y = kx + b$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - kx_0 - b = k\Delta x.$$

2) Середня швидкість зміни функції, коли x змінюється від x_0 до $x_0+\Delta x$, дорівнює: $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{k\cdot\Delta x}{\Delta x}=k$.

3) Оскільки середня швидкість стала і дорівнює k, то її границя теж дорівнює k:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}k=k.$$

Отже, похідна лінійної функції є стала і дорівнює коефіцієнту при x.

Знайденого результату треба було очікувати, оскільки лінійна функція описує рівномірний рух, швидкість якого стала. ■

Приклад 6. Знайти похідну функції $y=x^2$.

□ 1) Нехай Δx — приріст аргументу в довільній точці x. Тоді

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Таким чином, $(x^2)'=2x$. ■

Справджуються також наступні формули:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\ (\cos x)'=-\sin x,\ (\sin x)'=\cos x.$$

Доведення перших двох формул несуттєво відрізняється від розв'язання попередніх прикладів. Дві останні формули будуть обґрунтовані нижче. Ці формули і похідні, знайдені в прикладах 4 – 6, у подальшому будуть часто застосовуватись.

$$(c)'=0,\ \left(x^2\right)'=2x,\ (kx+b)'=k,\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},$$
$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ (\cos x)'=-\sin x,\ (\sin x)'=\cos x.$$

Приклад 7. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $x=\sin t$, де x — координата точки, $t\ge 0$ — час руху. Знайти:

1) середню швидкість руху точки за проміжок часу $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$;

2) швидкість руху в момент часу $t = \frac{\pi}{6}$.

$$\square\ 1)\ v_{сер} = \frac{x\left(\frac{\pi}{6}\right) - x(0)}{\frac{\pi}{6} - 0} = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi} \approx 0{,}955.$$

2) Необхідно знайти похідну функції $x = \sin t$ в точці $t = \frac{\pi}{6}$:

$$x'(t) = \cos t,\ x'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866.\ \blacksquare$$

Відповідь. 1) $\approx 0{,}95$; 2) $\approx 0{,}866$.

Обґрунтуємо формулу $(\cos x)' = -\sin x$, використовуючи фізичний зміст похідної.

Нехай матеріальна точка M рухається рівномірно по колу з радіусом 1 з лінійною швидкістю 1 м/с.

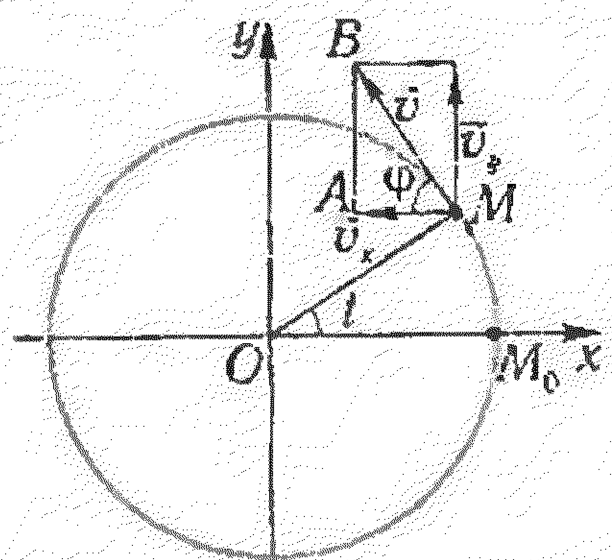


Рис. 75

Відомо, що вектор швидкості спрямований по дотичній до кола (рис. 75). Координати точки M у момент часу t за умовою дорівнюють $x = \cos t$ і $y = \sin t$. Знайдемо швидкість зміни абсциси точки M, тобто функції $x = \cos t$. Для цього швидкість $\vec{v}$ розкладемо на горизонтальну і вертикальну складові. Горизонтальна складова $\vec{v_x}$ і є швидкістю зміни функції $x(t)$. З прямокутного трикутника AMB маємо: $\left|\vec{v_x}\right| = BM \cdot \cos\varphi$, $BM = \left|\vec{v}\right| = 1$, $\angle AMO = \angle MOM_0 = t$ як різносторонні кути при паралельних прямих і січній, $\angle OMB = \frac{\pi}{2}$. Тоді $\angle AMB = \varphi = \frac{\pi}{2} - \angle AMO = \frac{\pi}{2} - t$. Відтак $\left|\vec{v_x}\right| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$. Тоді $\vec{v_x} = -\sin t$, бо вектор $\vec{v_x}$ спрямований у бік, протилежний до напряму осі x для вказаного розміщення точки M. Одержали: $x'(t) = -\sin t$ або $(\cos t)' = -\sin t$.

Ми розглянули випадок, коли точка M знаходилась у першій координатній чверті. Аналогічні міркування можна провести для будь-якого розміщення точки M.

З курсу фізики відомо, що важливою характеристикою руху матеріальної точки є ***прискорення***. Математичний зміст цього поняття з'ясуємо за допомогою похідної.

Нехай точка рухається вздовж координатної прямої за законом $x = x(t)$. Тоді швидкість її руху $v(t)$ є похідною від функції $x(t)$: $v(t) = x'(t)$. Оскільки швидкість $v(t)$ сама є функцією часу, то можна говорити про швидкість її зміни. У фізиці швидкість зміни швидкості називається ***прискоренням***.

Як і при введенні поняття миттєвої швидкості, матимемо на увазі, що прискорення $a(t)$ у момент часу t дорівнює границі виразу $\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, тобто $a(t) = v'(t) = (x'(t))'$. Прискорення $a(t)$ є похідною від похідної функції $x(t)$, або, як кажуть, ***прискорення руху є другою похідною координати точки за часом*** або ***похідною другого порядку***.

Похідну другого порядку функції $y = f(x)$ позначають y'' або $f''(x)$, або $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Приклад 8. Матеріальна точка рухається за законом $x = t^2 - 3t + 2$, де x — координата, м; t — час, с. Знайти швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 4$ с.

□ Для визначення швидкості знайдемо першу похідну даної функції при $t = 4$ с:

$$v(t) = 2t - 3;\ v(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \text{ м/с}.$$

Прискорення дорівнює другій похідній функції $x = x(t)$, тобто

$$a(t) = (2t-3)' = 2 \text{ м/с}^2.$$

З'ясувалося, що в даному випадку прискорення стале для довільного значення t, тобто точка рухається рівноприскорено. ■

Відповідь. 2 м/с².

Скориставшись поняттям похідної другого порядку, один із найважливіших законів фізики — другий закон Ньютона — можна записати так:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F \text{ або } m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F,$$

де m — маса тіла, що рухається прямолінійно; F — сила, яка діє на нього.

Контрольні запитання

1°. На рис. 76 зображено графік функції $y = f(x)$.

а) Чому дорівнює приріст функції на проміжку [0; 3], [–3; 0], [–4; 0]?

б) Чому дорівнює середня швидкість зміни функції на проміжку [–4; 3]?

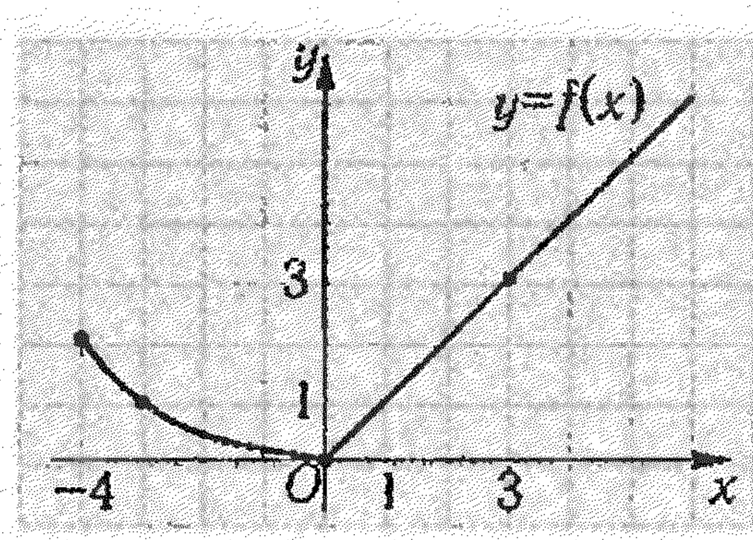


Рис. 76

2°. Яким є фізичний зміст рівності:

а) $(c)' = 0$;

б) $(kx + b)' = k$?

3°. Матеріальна точка рухається за законом $x = \cos t$. Якою є швидкість її руху в момент часу $t = \frac{\pi}{6}$?

4°. Яка з наступних величин змінюється рівномірно відносно t:

1) $h = \frac{gt^2}{2} + v_0 t$; 2) $m = \frac{m_0}{2t+1}$;

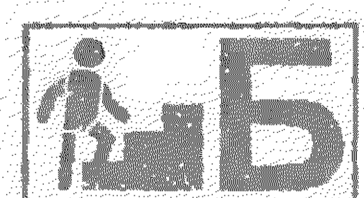
3) $S = kt(t+1)$; 4) $T = k(1+t) + T_0$?

5. Кутову швидкість рівномірного обертання визначають як відношення кута повороту до відповідного проміжку часу. Що розуміють під кутовою швидкістю нерівномірного обертання?

6. При нагріванні тіла зміна його температури описується законом $T = 0,4t + 1$, де T — температура, К; t — час, с. З якою швидкістю нагрівається тіло?

7. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x = \cos t$. У якому напрямку (в напрямку координатної осі чи у протилежному) рухається точка у моменти часу $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$?

4. Геометричний зміст похідної



Нам відомий фізичний зміст похідної — це швидкість зміни функції у заданій точці. З'ясуємо тепер геометричний зміст похідної.

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0. Через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ і $M(x; f(x))$ її графіка проведемо пряму (рис. 77). Пряму, що проходить через дві точки графіка функції, називають ***січною до графіка***. Із трикутника MM_0P знайдемо кутовий коефіцієнт січної M_0M:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Звідси випливає, що середня швидкість зміни функції на проміжку $[x_0; x]$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної M_0M до осі x. Спрямуємо тепер точку x до точки x_0. Тоді точка $M(x; f(x))$, рухаючись по графіку функції, наближатиметься до точки $M_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 78). Ми бачимо, що січна обертається навколо точки M_0. Її кутовий коефіцієнт, який дорівнює $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, прямує до $f'(x_0)$ при x, що прямує до x_0. Отже, граничним положенням січної M_0M буде деяка пряма M_0N, що проходить через точку $M_0(x_0; f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$. Ця пряма називається ***дотичною*** до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0.

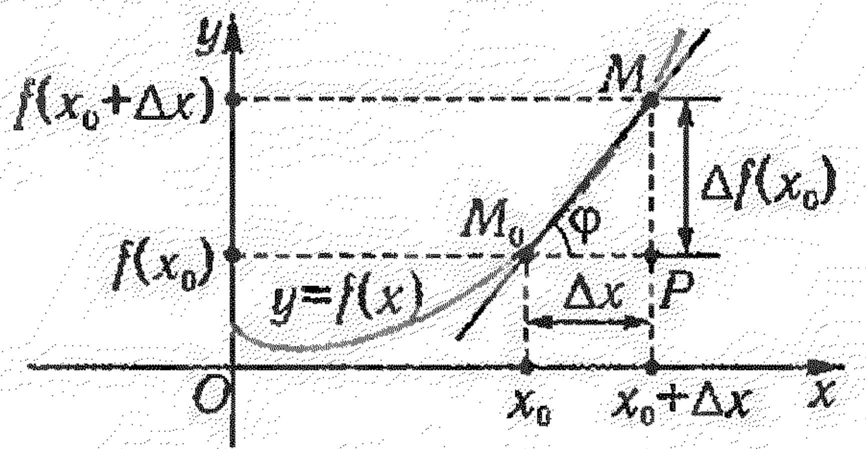


Рис. 77

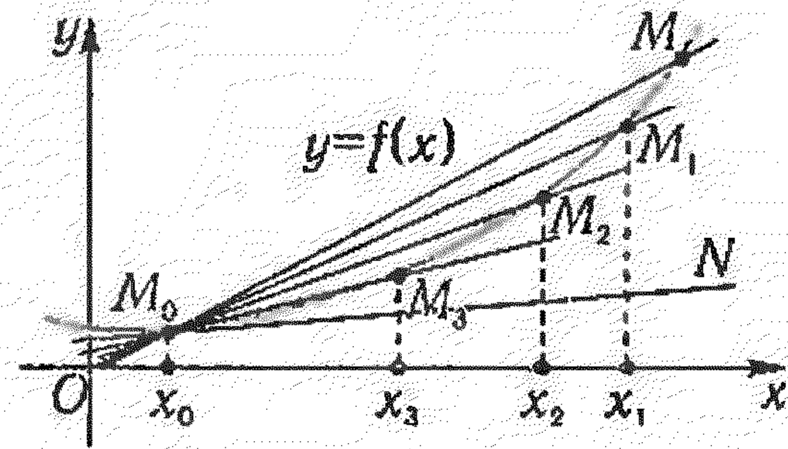


Рис. 78

Наведені вище міркування дозволяють зробити висновок.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точці з координатами $(x_0; f(x_0))$.

Це і є геометричним змістом похідної. Користуючись ним, можна за графіком функції визначити знак похідної в точці, обчислювати її значення, хоча б наближено. Наприклад, похідна функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 79, у точці $x = 4$ є додатною, бо кут нахилу дотичної до осі x гострий. Оскільки вона дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$ і з прямокутного трикутника AM_0B випливає, що $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{M_0B}{AB} = \dfrac{2}{2} = 1$, то $f'(4) = 1$.

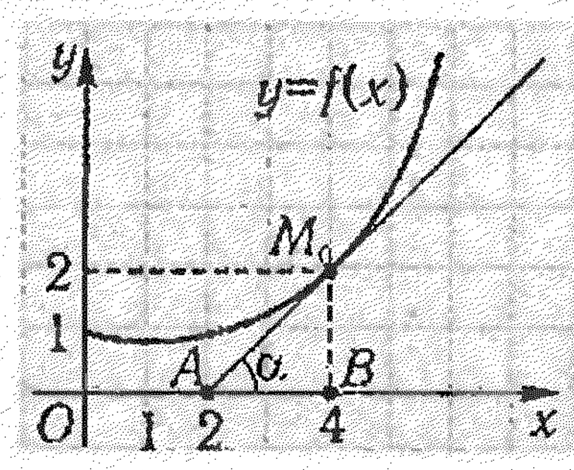


Рис. 79

Приклад 9. На рис. 80 зображено закон прямолінійного руху точки.

1) Чи є цей рух рівномірним?

2) Чи існують проміжки часу, протягом яких рух був рівномірним?

3) У які моменти часу швидкість точки дорівнювала нулю?

4) У який момент часу — $t_1 = 1{,}5$ с чи $t_2 = 2{,}5$ с — точка мала більшу швидкість?

5) Порівняти середню швидкість точки на проміжку [0; 2,5] і швидкість у момент часу $t = 2{,}5$ с.

6) У які проміжки часу точка рухалась у від'ємному напрямі координатної осі?

7) У які проміжки часу швидкість руху була від'ємною?

☐ 1) Рух не є рівномірним, оскільки рівномірний рух описується лінійною функцією (див. п. 1), а графіком лінійної функції є пряма.

2) Рух був рівномірним на проміжку [4; 6], оскільки на цьому проміжку графіком закону руху є відрізок прямої, тобто на ньому закон руху описується лінійною функцією.

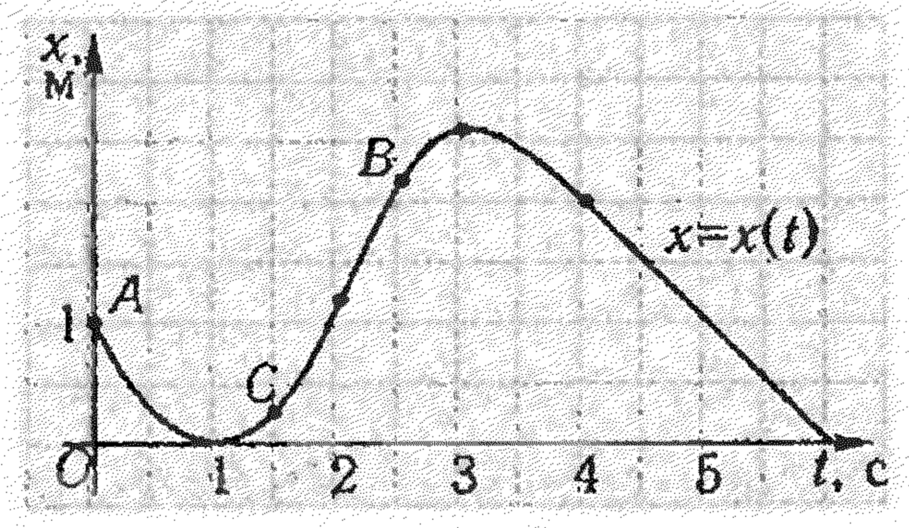


Рис. 80

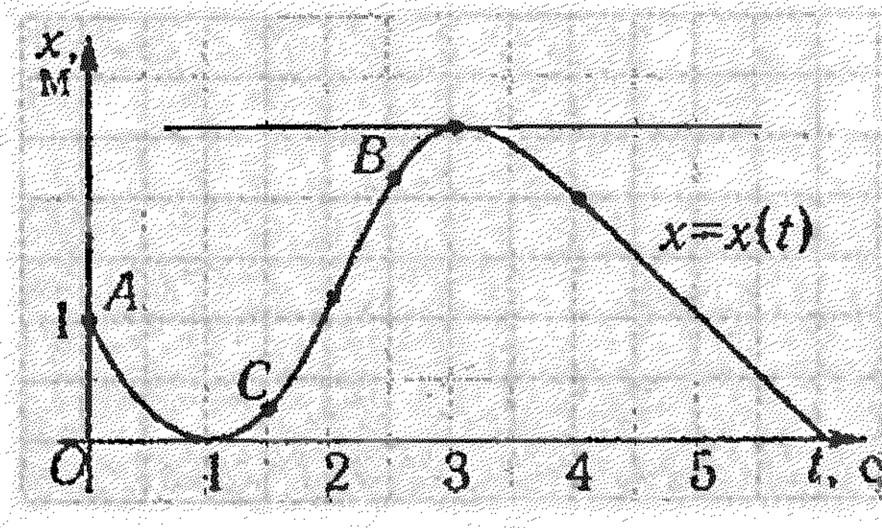


Рис. 81

3) Швидкість руху дорівнює нулю при $t = 1$ с і $t = 3$ с. Справді, $v(3) = x'(3) = 0$, бо в точці з абсцисою 3 дотична до графіка паралельна осі x (рис. 81). Аналогічно, $v(1) = x'(1) = 0$ (дотична в точці $x = 1$ збігається з віссю абсцис!).

4) $v(2{,}5) > v(1{,}5)$. Щоб переконатись у цьому, зобразимо дотичні до графіка функції в точках з абсцисами 1,5 і 2,5, тобто в точках B і C, і порівняємо тангенси кутів їхнього нахилу до осі x (рис. 82).

5) Порівнявши кут нахилу до осі x січної AB з кутом нахилу до цієї осі дотичної в точці B, дістанемо: $v(2{,}5) > v_{сер}[0; 2{,}5]$ (рис. 83).

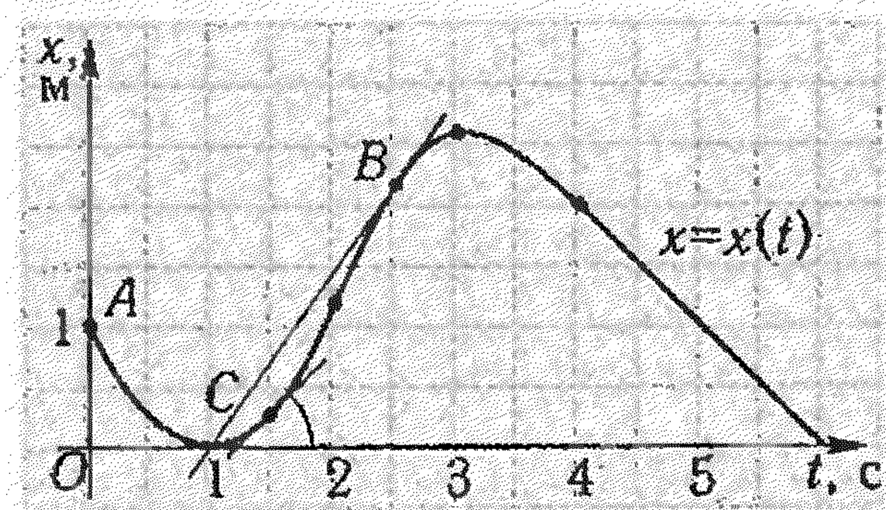


Рис. 82

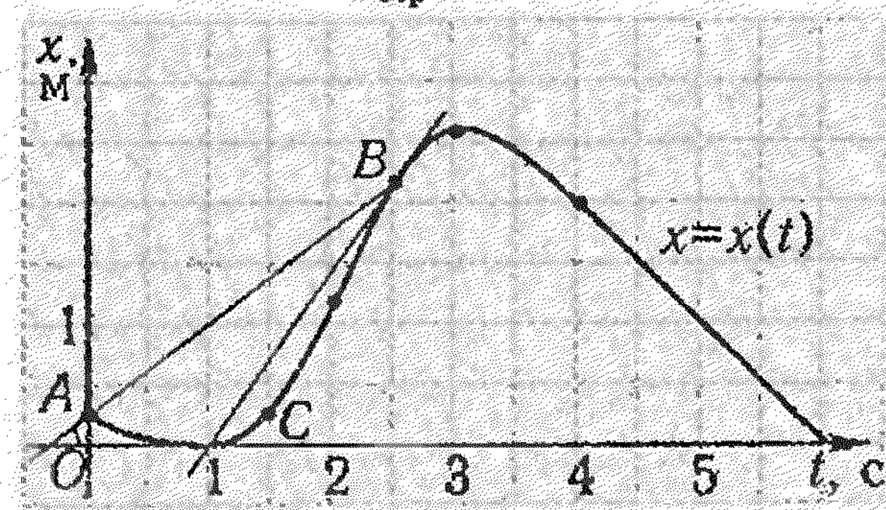


Рис. 83

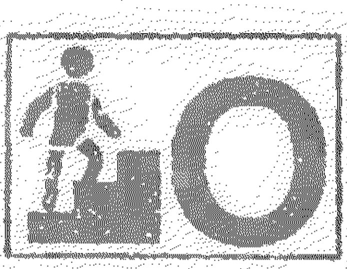
6) На проміжках [0; 1] і [3; 6] координата точки зменшується із збільшенням часу. Тому на цих проміжках точка рухалась у від'ємному напрямі координатної осі.

7) На проміжах (0; 1) і (3; 6) дотичні утворюють з віссю x тупі кути, тому похідна на цих проміжках є від'ємною і швидкість руху — також. ■

Приклад 10. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

□ Знайдемо кутовий коефіцієнт k дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $\frac{\sqrt{3}}{2}$: $f'(x) = 2x$, $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної в точці $(x_0; f(x_0))$ дорівнює похідній $f'(x_0)$, то у нашому випадку $k = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha$. Звідси $\alpha = \frac{\pi}{3}$. ■

Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.



Знайдемо рівняння дотичної до графіка диференційовної функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; f(x_0))$. Будемо шукати це рівняння у вигляді $y = kx + b$. Оскільки шукана пряма проходить через точку M_0, то справджується рівність $f(x_0) = kx_0 + b$. Звідси $b = f(x_0) - kx_0$. Тому рівняння дотичної має вигляд: $y = kx + f(x_0) - kx_0$, або $y = f(x_0) + k(x - x_0)$. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної в точці $(x_0; f(x_0))$ дорівнює похідній $f'(x_0)$, то остаточно одержимо:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Це і є шукане рівняння дотичної до графіка функції в точці з координатами $(x_0; f(x_0))$.

Приклад 11. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$:

1) у точці з абсцисою $x_0 = 9$;

2) у точці перетину графіка з прямою $y = 2$;

3) якщо дотична нахилена до осі x під кутом 45°.

□ 1) Оскільки $f(9)=3$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(9)=\frac{1}{6}$, то, підставивши ці значення в рівняння дотичної, маємо: $y=3+\frac{1}{6}(x-9)$, або $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

2) На відміну від завдання 1), нам невідома абсциса x_0 точки дотику. Її можна знайти, розв'язавши рівняння $\sqrt{x}=2$. Таким чином, $x_0=4$. Далі діємо так само, як і при виконанні завдання 1). Обчислимо: $f(4)=2$, $f'(4)=\frac{1}{4}$. Підставимо ці значення в рівняння дотичної: $y=2+\frac{1}{4}(x-4)$, або $y=\frac{1}{4}x+1$.

3) Знайдемо x_0 з умови $f'(x_0)=1$. Розв'язавши рівняння $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=1$, отримаємо $x_0=\frac{1}{4}$. Враховуючи, що $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ і $f'\left(\frac{1}{4}\right)=1$, запишемо рівняння дотичної: $y=\frac{1}{2}+1\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)$, або $y=x+\frac{1}{4}$. ■

Відповідь. 1) $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$; 2) $y=\frac{1}{4}x+1$; 3) $y=x+\frac{1}{4}$.

Нехай функція $y=f(x)$ є диференційовною в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Тоді, згідно з п. 2, наближеній рівності $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx f'(x_0)$, а відтак і наближеній рівності $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, можна забезпечити будь-яку точність для всіх x, достатньо близьких до x_0. Це говорить про те, що в малому околі точки x_0 функція $y=f(x)$ поводить себе як лінійна функція $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Геометрично це означає, що невелика частина графіка функції $y=f(x)$ в околі точки $M_0(x_0; f(x_0))$ практично не відрізняється від відрізка дотичної до графіка функції в цій точці. Тому графік диференційовної функції не має розривів та «зломів». Таку криву зазвичай називають ***гладкою***. Наприклад, функція $y=|x|$ не є диференційовною в точці $x=0$, оскільки її графік у точці $O(0; 0)$ має злом.

Розглянута властивість має важливі застосування. Вона дозволяє диференційовну в точці функцію замінювати в околі цієї точки лінійною функцією, тобто дозволяє складні залежності наближено описувати за допомогою простих — лінійних.

З фізичної точки зору це означає, що при дослідженні нерівномірних процесів на короткому проміжку часу їх можна замінювати рівномірними.

Так, якщо $s = s(t)$ — шлях, пройдений матеріальною точкою за проміжок часу $[0; t]$, то формула $s(t) - s(t_0) \approx s'(t_0)(t - t_0) = v(t_0)(t - t_0)$ говорить про те, що рух на малому проміжку часу $[t_0; t]$ можна вважати рівномірним зі швидкістю $v(t_0)$, а пройдений шлях $s(t) - s(t_0)$ таким, що дорівнює $v(t_0)(t - t_0)$.

Контрольні запитання

1°. Який геометричний зміст має похідна функції?

2°. Чи може дотична до графіка функції у деякій точці перетинати цей графік також в інших точках?

3°. Для якої функції дотична до графіка функції у кожній точці графіка збігається зі самим графіком?

4. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = -2$ має вигляд $y = 5 - 3x$. Чому дорівнює $f'(-2)$?

5. На рис. 84 зображено графік функції $y = g(x)$.

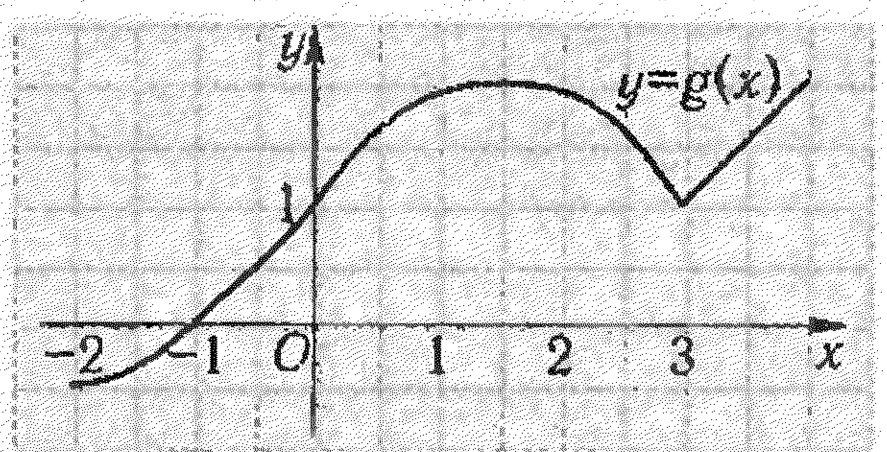


Рис. 84

а°) Укажіть середню швидкість зміни функції на проміжку $[-1; 3]$.

б°) В якій точці похідна функції дорівнює нулю?

в) В якій з точок $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2{,}5$ похідна є від'ємною?

г) Порівняйте числа $g'(-1)$ і $g'(1{,}5)$.

ґ) Порівняйте середню швидкість зміни функції на проміжку $[-1; 3]$ і швидкість зміни функції в точці $x = 1$.

д*) Чи в усіх точках функція $y = g(x)$ є диференційовною?

6. Яким є геометричний зміст рівності:

а) $f'(x_0) = g'(x_0)$; б) $f(x_0) = g(x_0)$ і $f'(x_0) = g'(x_0)$?

Задачі

120°. Точка рухається прямолінійно за законом $x = t^2 + 1$. Знайдіть:
1) середню швидкість точки на кожному з проміжків часу [1; 1,1], [1; 1,01], [1; 1,001];
2) швидкість точки в момент часу $t = 1$.

121°. Автомобіль протягом першої години пройшов 50 км, а протягом другої — 60 км. Якою є середня швидкість автомобіля?

122°. Автомобіль першу половину шляху долав із швидкістю 50 км/год, а другу половину — із швидкістю 60 км/год. Якою є середня швидкість автомобіля?

123. Протягом деякого проміжку часу тіло рухалось за законом $x = 5t + 1$, а потім протягом такого самого часу – за законом $x = 7t - 3$. Якою є середня швидкість тіла?

124. Відомо, що при вільному падінні тіла залежність пройденого шляху від часу виражається формулою $s = \frac{gt^2}{2}$, де s — шлях, м; t — час, с; $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння.
1) Якою є середня швидкість тіла протягом першої секунди падіння? Протягом першої хвилини падіння?
2) Якою є швидкість тіла в момент $t = 1$ с; в момент $t = 10$ с?

125. Що розуміти під:
1) середньою швидкістю охолодження тіла за даний проміжок часу;
2) швидкістю охолодження тіла у даний момент часу?

126°. Побудуйте графіки функцій $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$. Вкажіть на схожість і відмінність у поведінці цих функцій в околі точки $x = 0$.

127. Обчисліть:

1°) $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)$; 2°) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$;

3) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0}\left(2x + 1 + \frac{0{,}5x + x^2}{x}\right)$.

128. Побудуйте графік будь-якої функції $y = \varphi(x)$, якщо відомо, що:
1) функція у точці розриву має границю;
2) функція у точці розриву не має границі;

3) $\varphi(1)=0,\ \lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=1.$

129°. Знайдіть приріст функції $y = f(x)$ у вказаній точці x_0, який відповідає даному приросту аргументу Δx, якщо:

1) $f(x)=x^2+1, x_0=-1, \Delta x=0{,}1$;

2) $f(x)=x^3, x_0=2, \Delta x=-1$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x_0=10, \Delta x=-5$.

130. Дано функцію $f(x) = x^2$.

1°) Знайдіть $f'(5)$, $f'(-3)$, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2) У яких точках $f'(x)=f(x)$?

131. Знайдіть швидкість зміни функції $y = \sin x$ у точці: 1) $x_1 = 0$; 2) $x_2=\dfrac{\pi}{2}$; 3) $x_3=\pi$.

132°. Одна точка рухається прямолінійно за законом $x = 3t$, а друга — за законом $x=t^2$ $(t\ge 0)$.

1) Вкажіть моменти часу, коли точки мають однакову швидкість.

2) Знайдіть проміжки часу, коли швидкість першої точки менша від швидкості другої.

3) Зобразіть на одному рисунку графіки швидкостей обох точок.

133. Точка рухається прямолінійно за законом $x=t^2+1$. Знайдіть момент часу, коли швидкість точки дорівнювала середній швидкості точки на проміжку [1; 2].

134*. Точка рухається прямолінійно за законом $x=\sqrt{t}$, де t — час, с; x — координата точки, м. Через 4 с після початку руху точка почала рухатись рівномірно з набраною до цього часу швидкістю. Запишіть закон руху точки і побудуйте відповідний графік.

---

135. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y=\sqrt{x}$ в точці:

1°) $A(1; 1)$; 2°) $B(4; 2)$; 3*) $C(x_0;\sqrt{x_0})$, де $x_0\ne 0$.

Використовуючи отриманий результат, знайдіть метод побудови дотичної у будь-якій точці кривої $y=\sqrt{x}$, абсциса якої відмінна від нуля.

136°. Знайдіть кут нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $y=\frac{1}{x}$ у точці: 1) $x_1=-1$; 2) $x_2=\sqrt[4]{3}$.

137. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2$:
1) у точці з абсцисою $x_0=2$;
2) у точках його перетину з графіком функції $y=x$;
3) якщо дотична нахилена до осі x під кутом 135°;
4) якщо дотична паралельна прямій $y=1-x$.

138°. На рис. 85 зображено закони прямолінійного руху двох точок $x=x_1(t)$ і $x=x_2(t)$.
1) Порівняйте швидкості цих точок у моменти часу $t_1=2$ с, $t_2=3$ с.
2) Порівняйте середні швидкості цих точок на проміжку [1; 3].
3) Чи змінювала кожна з точок напрям руху? Якщо змінювала, то в який момент часу?
4) Вкажіть проміжок часу, протягом якого точки рухались в однаковому напрямі.

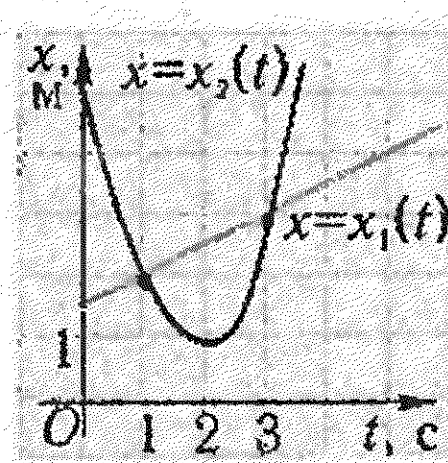


Рис. 85

139. Визначте взаємне розміщення дотичної до графіка функції $y=\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0=4$ і прямої:
1) $4y-x+4=0$; 2) $y=4x+1$.

Вправи для повторення

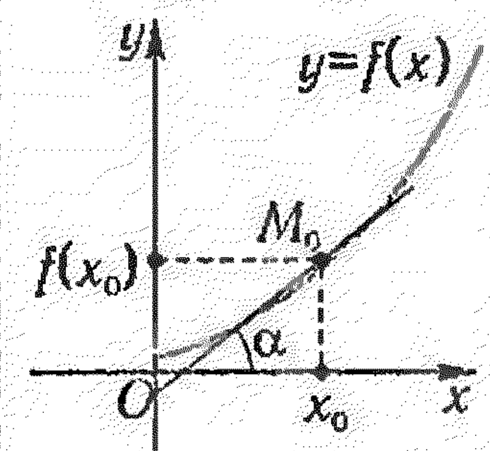
140. Побудуйте на одному рисунку графіки функцій $y=3^x$ і $y=\log_3 x$.

141. Якою є область визначення функції $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$? Побудуйте її графік.

142. Обчисліть значення функції $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x$ у точці:
1) $x=\frac{\pi}{3}$; 2) $x=-\frac{\pi}{6}$.

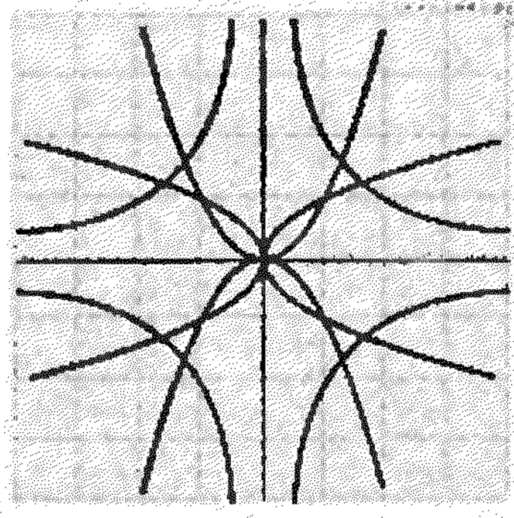
Підсумок

Означення похідної

Означення	Геометричний зміст	Фізичний зміст
Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту функції $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ у точці x_0 до приросту аргументу Δx, коли Δx прямує до нуля: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.	Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точці з координатами $(x_0; f(x_0))$: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$. 	Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 — це швидкість зміни функції в точці x_0.

Похідні найпростіших функцій

y	c	$kx + b$	x^2	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
y'	0	k	$2x$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$



§7. Диференціювання функцій

Щоб знаходити миттєву швидкість точки за законом її руху або рівняння дотичної до графіка функції, треба навчитись знаходити похідні функцій. Користуючись означенням, можна знайти похідні тільки найпростіших функцій. Похідні більш складних функцій знаходять за допомогою певних правил. Їхньому розгляду і присвячено даний параграф.

1. Правила диференціювання

У §6 ми знаходили похідні функцій, користуючись означенням похідної. Однак цей спосіб знаходження похідних часто викликає значні труднощі. Тепер ми познайомимось із правилами, які допоможуть нам, знаючи похідні двох функцій, знаходити похідні їх суми, добутку, частки.

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ — диференційовні, то справджуються наступні формули.

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.
2. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
3. $(cf(x))' = cf'(x)$, де c — деяке число.
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Перша формула справджується для суми будь-якої скінченної кількості доданків.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2+\sqrt{x}+1$ в точці $x_0 = 4$.

☐ Згідно з правилом диференціювання суми функцій маємо:

$$y' = \left(x^2+\sqrt{x}+1\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' + (1)' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y'(4) = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 8\frac{1}{4} = 8{,}25. \blacksquare$$

Відповідь. 8,25

Приклад 2. Знайти похідну функції: 1) $y = x^3$; 2) $y = x^4$.

□ 1) Для знаходження похідної функції $y = x^3$ запишемо її як добуток $y = x^2 \cdot x$. Знаючи похідну кожної з функцій $y = x^2$, $y = x$ і правило диференціювання добутку, дістанемо:

$$(x^3)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

2) $(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$. ■

Відповідь. 1) $3x^2$; 2) $4x^3$.

Знайдені у прикладі 2 результати можна узагальнити на степеневі функції з довільним натуральним показником, тобто довести формулу

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in N.$$

Приклад 3.

Знайти похідну функції $y = x^{-n}$, $n \in N$.

□ $(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{2n-n+1}} = -nx^{-n-1}$, $x \neq 0$. ■

З прикладу 3 випливає, що формула диференціювання степеневих функцій з натуральними показниками справджується і для степеневих функцій з цілими від'ємними показниками. Отже,

$$(x^k)' = kx^{k-1}, k \in Z, k \neq 0.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \text{tg}\, x$.

□ Оскільки $\text{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то, скориставшись правилом знаходження похідної від частки, одержимо:

$$(\text{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

Відповідь. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Аналогічно можна одержати формулу: $(\operatorname{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Знайдені у прикладах 1 – 4 похідні будуть у подальшому часто застосовуватись.

$$\left(x^k\right)' = kx^{k-1},\ (\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2}{2x+1}$ у точці $x = 1$.

□ Спочатку знайдемо похідну функції в довільній точці:

$$y' = \left(\frac{x^2}{2x+1}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(2x+1) - x^2\cdot(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{2x\cdot(2x+1) - x^2\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x}{(2x+1)^2}.$$

При $x = 1$ маємо: $y'(1) = \frac{4}{9}$. ■

Відповідь. $\frac{4}{9}$

Приклад 6. Кинутий вертикально вгору камінь рухається за законом $h(t) = 4 + 8t - 5t^2$, де h — висота над поверхнею землі, на яку піднявся камінь, м; t — час, с. Знайти:

1) швидкість руху каменя в момент його приземлення;
2) найбільшу висоту, на яку підніметься камінь.

□ 1) Приземлення каменя означає, що $h = 0$. Знайдемо момент часу, коли камінь упав на землю: $4 + 8t - 5t^2 = 0$. Маємо: $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{2}{5}$. Умову задачі задовольняє тільки значення $t_1 = 2$ (чому?). Обчислимо швидкість руху каменя в цей момент часу: $v(t) = h'(t) = 8 - 10t$, $v(2) = -12$ м/с. (Поміркуйте, чому швидкість виявилася від'ємною). Отже, швидкість руху каменя в момент приземлення дорівнює 12 м/с.

2) У той момент, коли камінь піднявся на найбільшу висоту, його швидкість дорівнювала 0, тобто $8 - 10t = 0$, $t = 0{,}8$ с. Знайдемо висоту при $t = 0{,}8$: $h(0{,}8) = 4 + 8\cdot 0{,}8 - 5\cdot 0{,}64 = 7{,}2$ (м). Це і є найбільша висота, на яку піднявся камінь. ■

Відповідь. 1) 12м/с; 2) 7,2 м.

Наведені вище правила диференціювання суми, добутку, частки від ділення двох функцій можна довести, користуючись означенням похідної. Доведемо, наприклад, правило диференціювання суми двох функцій.

Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовні в точці x_0. Знайдемо похідну функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0 за схемою, наведеною у пункті 3, §6.

1) Приріст цієї функції в точці x_0 дорівнює:

$\Delta y(x_0) = y(x) - y(x_0) = (f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0)) = (f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0)) = \Delta f(x_0) + \Delta g(x_0)$.

2) Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0) + \Delta g(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}.$$

3) Обчислимо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$, користуючись правилом обчислення границі суми функцій:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Оскільки x_0 — довільна точка, то маємо формулу:

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$$

(похідна суми двох диференційовних функцій дорівнює сумі похідних цих функцій).

Розглянемо ще одне правило диференціювання. Воно допоможе нам, знаючи похідну функції $y = f(x)$, знаходити похідні функцій $y = f(kx + b)$, де k і b — деякі числа.

Розглянемо спочатку окремий випадок. Нехай дано функцію $y = f(2x)$. Позначимо $2x = u$. Змінну y можна розглядати і як функцію змінної x (позначимо її через $y(x)$), і як функцію $y = f(u)$ змінної u. Легко побачити, що приріст функції $y = y(x)$ на проміжку $[x_0; x]$ дорівнює приросту функції $y = f(u)$ на проміжку $[2x_0; 2x]$, тобто на проміжку $[u_0; u]$, де $u_0 = 2x_0$. Але довжина проміжку $[2x_0; 2x]$ удвічі більша за довжину проміжку $[x_0; x]$. Тому середня швидкість зміни функції $y = y(x)$ на проміжку $[x_0; x]$ удвічі більша від середньої швидкості зміни функції $y = f(u)$ на проміжку $[u_0; u]$. Отже, швидкість зміни функції $y = y(x)$ у точці x_0 удвічі більша від швидкості зміни функції $y = f(u)$ в точці u_0, тобто $y'(x_0) = 2f'(u_0)$, де $u_0 = 2x_0$.

Аналогічні міркування можна провести для будь-якого числа k. Враховуючи, що число b не впливає на довжину проміжку $[u_0; u]$, одержимо наступне твердження.

Якщо $y(x) = f(kx + b)$, то $y'(x) = k \cdot f'(u)$, де $u = kx + b$.

Приклад 7. Знайти похідну функції:

1) $y = \sqrt{3x-1}$; 2) $y = \cos\dfrac{2x-1}{3}$.

□ 1) Нехай $3x - 1 = u$. Тоді $f(u) = \sqrt{u}$ і $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$. Згідно з одержаною вище формулою маємо: $y'(x) = 3(\sqrt{u})' = 3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$. Підставивши замість u його вираз, одержимо: $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.

2) Нехай $\dfrac{2x-1}{3} = u$. Тоді $y = \cos u$ і $y' = \dfrac{2}{3}(\cos u)' = -\dfrac{2}{3}\sin u = -\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{2x-1}{3}$. ■

Відповідь. 1) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$; 2) $-\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{2x-1}{3}$.

Контрольні запитання

1°. Яку функцію одержимо після диференціювання многочлена третього степеня; другого степеня?

2°. У якій точці: $x_1 = 10$ чи $x_2 = 100$ — функція $y = -\dfrac{1}{x} + 3x - 2$ має більшу швидкість зміни?

3. Кутові коефіцієнти дотичних до графіків функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ дорівнюють -1 і 2 відповідно. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції:

а°) $y = f(x) + g(x) + 1$; б) $y = 2f(x) - 3g(x)$;

в*) $y = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$?

4°. Який кут утворює з віссю x дотична до графіка функції $y = x^2 - x$ у точці з абсцисою $x = 0$?

5. Укажіть абсциси точок графіка функції $y = x + \sin x$, в яких дотична до цього графіка паралельна осі x.

6. М'яч кинуто вертикально вгору. Якщо вісь x напрямлено догори, то закон руху м'яча має вигляд: $x = 300t - 5t^2$, де x — координата, м; t — час, с. Опускається чи піднімається м'яч у момент часу $t = 32$ с?

7. На рис. 86 зображено графік функції $y = g(x)$. Якою є швидкість зміни у точці $x = 1$ функції:

а) $y = \dfrac{g(x)}{2}$; б) $y = -g(x)$;

в*) $y = g^2(x)$?

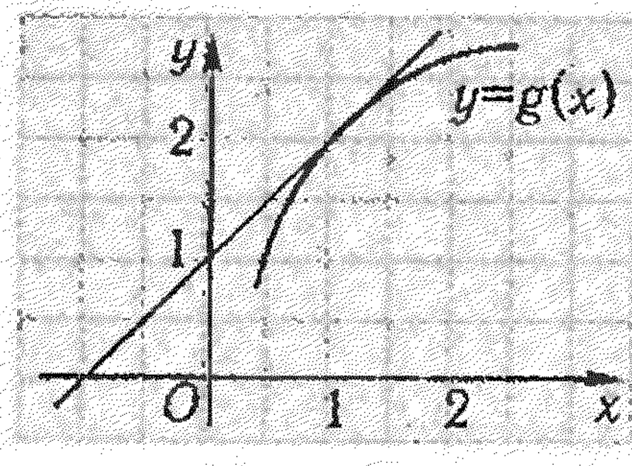


Рис. 86

2. Похідні показникових і логарифмічних функцій

У §6 були знайдені похідні деяких основних елементарних функцій. Зараз ми одержимо формули для знаходження похідних показникових і логарифмічних функцій.

Розглянемо показникову функцію $f(x) = a^x$. Середня швидкість зміни функції на проміжку $[0;\ \Delta x]$ дорівнює $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} =$ $= \dfrac{a^{0+\Delta x}-a^0}{\Delta x} = \dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. Аналогічний вираз можна одержати, якщо розглядати проміжок $[\Delta x;\ 0]$.

Похідна функції $y = a^x$ у точці $x = 0$ дорівнює границі середньої швидкості функції при Δx, що прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$.

Позначимо це число через k. Знайдемо похідну показникової функції $y = a^x$ у довільній точці x:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} =$$

$$= a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = k\cdot a^x,$$

тобто

$$(a^x)' = k\cdot a^x.$$

Показникова функція має чудову властивість: її похідна пропорційна самій функції. Швидкість зміни величини, що описується функцією $y = a^x$, пропорційна значенню цієї величини. Такий закон зміни величин називається ***законом показникового зростання або вирівнювання*** залежно від того, чи $a > 1$, чи $0 < a < 1$. За таким законом змінюється, наприклад, біологічна популяція, яка має сприятливі умови для розвитку, або маса радіоактивної речовини.

Таким чином, щоб знайти похідну функції $y = a^x$ у довільній точці, достатньо знати число k, тобто значення похідної цієї функції в точці $x = 0$. Коефіцієнт пропорційності k залежить від основи a. Для конкретної основи a коефіцієнт пропорційності можна обчислити наближено за допомогою калькулятора. У таблиці наведено такі обчислення для $a = 2{,}5$ і $a = 3$ при $\Delta x = \pm\,0{,}1$; $\pm\,0{,}01$; $\pm 0{,}001$; $\pm 0{,}0001$.

	Δx	0,1	0,01	0,001	0,0001	–0,0001	–0,001	–0,01	–0,1
$a = 2{,}5$	k	0,960	0,920	0,917	0,916	0,916	0,916	0,912	0,876
$a = 3$	k	1,160	1,100	1,100	1,100	1,100	1,100	1,090	1,040

Таким чином, при $a = 2{,}5$ коефіцієнт $k \approx 0{,}916$, а при $a = 3$ — він наближено дорівнює 1,1. Ми бачимо, що для одних значень a коефіцієнт k менший від 1, а для інших — більший від 1. Виявляється, що існує така основа показникової функції, для якої $k = 1$. Ця основа дорівнює ірраціональному числу e, яке ми ввели у першому розділі. Для показникової функції з основою e формула похідної показникової функції набуває найпростішого вигляду, а саме:

$$(e^x)' = e^x.$$

З цієї формули можна отримати наступні формули для похідних показникових функцій з довільною основою і похідних логарифмічних функцій:

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}.$$

Ці формули будуть обґрунтовані нижче.

Приклад 8. Знайти похідну функції: 1) $y = x \cdot \ln x$; 2) $y = e^{2-x}$.

☐ 1) Скориставшись правилом диференціювання добутку двох функцій, одержимо:

$$(x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

2) Виконавши очевидні перетворення, скориставшись правилом диференціювання добутку функції на число і формулою для похідної показникової функції з довільною основою, одержимо:

$$\left(e^{2-x}\right)' = \left(e^2\cdot e^{-x}\right)' = e^2\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\right)' = e^2\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{e} = e^2\cdot e^{-x}\cdot(-\ln e) = -e^{2-x}.$$ ■

Відповідь. 1) $\ln x + 1$; 2) $-e^{2-x}$.

Обґрунтуємо наведені вище формули для знаходження похідних показникових і логарифмічних функцій.

Оскільки, за основною логарифмічною тотожністю і властивостями степенів, $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}$, то можна застосувати правило диференціювання функцій виду $y(x) = f(kx + b)$ (див. п. 1). Нагадаємо це правило: $y'(x) = kf'(u)$, де $u = kx + b$. У нашому випадку $k = \ln a$, $b = 0$. Тому $\left(a^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \ln a\cdot e^{x\ln a} = \ln a\cdot a^x$. Отже, $(a^x)' = \ln a\cdot a^x$.

Зверніть увагу на те, що коефіцієнт пропорційності k, про який йшлося вище, для показникової функції $y = a^x$ дорівнює $\ln a$.

Для знаходження похідної функції $y = \ln x$ скористаємось тим, що графіки функцій $y = \ln x$ і $y = e^x$ симетричні один одному відносно прямої $y = x$ (рис. 87). Візьмемо на графіку функції $y = \ln x$ точку $B(x;\ \ln x)$. Точка $A(\ln x;\ x)$, симетрична точці B відносно прямої $y = x$, лежить на графіку функції $y = e^x$. Дотичні l_1 і l_2 до цих графіків, проведені в точках B і A, також симетричні відносно прямої $y = x$. Нехай дотична l_1 утворює з віссю x кут α. Тоді дотична l_2 утворює з віссю y також кут α. Кут, який утворює дотична l_2 з віссю x, позначимо через β.

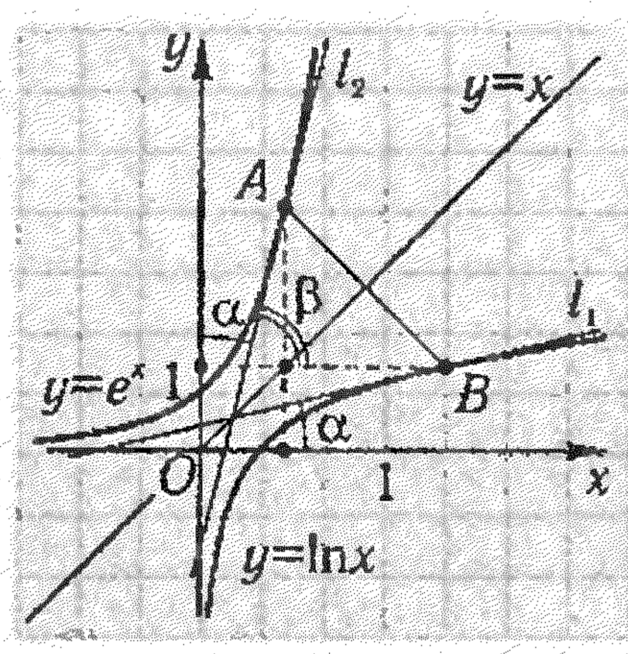


Рис. 87

Тоді $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (див. рис. 87) і $(\ln x)' = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

Але tg β, згідно з геометричним змістом похідної, дорівнює похідній функції $y = e^x$ у точці з абсцисою $\ln x$, тобто дорівнює $e^{\ln x} = x$. Отже,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Нарешті, оскільки за формулою переходу від однієї основи логарифмів до іншої $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$, то, користуючись правилом диференціювання добутку функції на число, одержимо:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Приклад 9. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = e^{2-x}$ у точці з абсцисою 2.

□ Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Оскільки $x_0 = 2$, $f(x_0) = e^{2-2} = 1$, $y' = -e^{2-x}$ (див. приклад 8, 2)), $f'(x_0) = -e^{2-2} = -1$, то рівняння дотичної має вигляд: $y = 1 - (x - 2)$, або $y = 3 - x$. ■

Відповідь. $y = 3 - x$.

Контрольні запитання

1°. Чи може похідна функції $y = a^x$ дорівнювати нулю?

2°. Чи може дотична до графіка функції $y = a^x$ в деякій точці бути паралельною осі x?

3°. Який знак має похідна функції: а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = 3^x$?

4°. В якій із точок $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, $x_3 = 100$, $x_4 = 0{,}01$ найшвидше зростає функція $y = e^x$?

5. За яких значень a похідна функції $y = a^x$ набуває додатних значень; від'ємних значень?

6. За яких значень a дотична до графіка функції $y = a^x$ у точці з абсцисою $x = 0$ утворює з віссю абсцис:
а) гострий кут; б) тупий кут; в) кут в 45°;
г*) гострий кут, менший від 45°;
ґ*) гострий кут, більший від 45°?

7°. Чому дорівнює кут нахилу до осі x дотичної до графіка функції $y = \ln x$ у точці з абсцисою $x = 1$?

8. Яка з функцій: $y = \ln x$ чи $y = \lg x$ — має більшу швидкість зміни в точці $x = 1$?

9. Укажіть, на якому з рис. 88, а)–г) зображено графік похідної функції: а) $y = e^x$; б) $y = \ln x$; в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

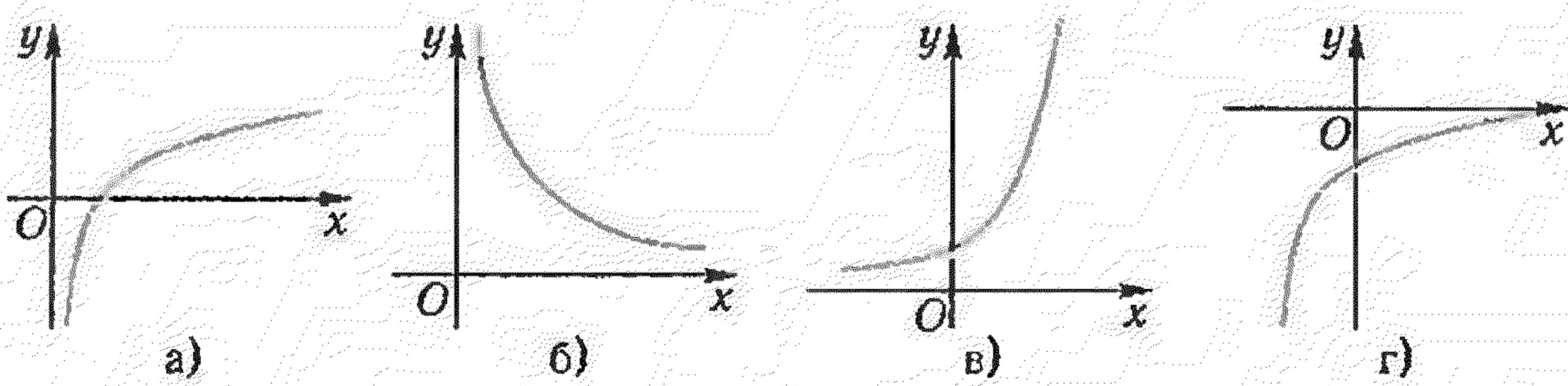


Рис. 88

Задачі

143. Знайдіть похідну функції:

1°) $y = 2x^4 - 5x^3 + 2x - 5$;

2°) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}x^2 - 5x + \frac{1}{5}$;

3°) $y = x(x^3 + 4x^2 + x - 2)$;

4°) $y = \frac{2}{x^3} + 5x - \frac{1}{x} + 3$;

5°) $y = 3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$;

6°) $y = (x^2 + 1)(5x - 3)$;

7°) $y = \left(4x^2 + x - 1\right) \cdot \frac{1 - x}{2}$;

8°) $y = \frac{2}{x + 1}$;

9°) $y = \frac{2x + 1}{4x + 1}$ у точці $x = 0$;

10°) $y = \frac{x + 4}{1 - x^2}$;

11°) $y = \frac{1 - \operatorname{ctg} x}{3}$;

12°) $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$;

13°) $y = x(\cos x + 1)$;

14) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ у точці $x = \frac{\pi}{3}$;

15) $y = \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}$;

16°) $y = \ln 3 \cdot 3^x$;

17°) $y = \frac{3^x}{2^x}$;

18°) $y = \ln\frac{1}{x}$;

19°) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ у точці $x_0 = 1$;

20°) $y = \lg x + 2x$;

21) $y = \ln(-x)$; 22) $f(x) = \log_2(3-2x)$ у точці $x_0 = 1$;
23) $y = 10^{2x-1}$.

144°. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ дорівнює:
1) 1; 2) 3?

145°. Знайдіть швидкість зміни величини x у момент часу $t = 3$, якщо величина змінюється за законом:

1) $x = 1 - 0{,}1^t$; 2) $x = 2\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^t\right)$.

146. Під яким кутом до осі абсцис нахилена дотична до графіка функції $y = x^2 \ln x$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$?

147. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 3\cos x + 2\sin x$ у точці з абсцисою:

1) $x = 0$; 2) $x = \frac{\pi}{2}$; 3) $x = \frac{\pi}{4}$.

148. У яких точках дотична до графіка функції $y = \frac{x+2}{x-2}$ утворює з віссю x кут 135°?

149. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 3x + 2$:
1) у точці з абсцисою $x = 0$;
2) у точках його перетину з віссю абсцис;
3) у точках його перетину з графіком функції $y = x^2 - 1$.

150. Матеріальна точка рухається вздовж координатної прямої за законом $x = \frac{t^4}{2} - t^2$, де x — координата, м; t — час, с. Знайдіть:
1°) залежність швидкості точки від часу;
2°) моменти часу, коли швидкість точки дорівнює нулю;
3) швидкість точки у той момент часу, коли вона знаходилась у початку координат;
4*) прискорення руху точки в момент часу $t = 1$.

151. Матеріальна точка виконує гармонічні коливання за законом $x = 2\sin \pi t$, де x — координата точки; t — час.

1) Знайдіть швидкість руху в моменти часу: $t_1 = \frac{1}{6}$; $t_2 = \frac{1}{4}$; $t_3 = 1$.

2) У які моменти часу змінюється напрям руху точки?
3) У які моменти часу точка має найбільшу швидкість?
4*) Доведіть, що прискорення руху пропорційне координаті точки. Чому дорівнює коефіцієнт пропорційності?

152*. Точка рухається прямолінійно за законом $x = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 1$, де x — координата точки, м; t — час, с ($t \geq 0$).
1) Знайдіть прискорення у момент часу 3 с.
2) У який момент часу прискорення дорівнює нулю? З якою швидкістю рухається точка в цю мить?

Вправи для повторення

153. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{5x}{3x+1}$; 2) $y = \dfrac{x-2}{4x^2-1}$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{3}}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

154. Дослідіть функцію на парність і непарність:

1) $y = 2x - \dfrac{4}{x}$; 2) $y = \sin x \cdot \cos x$;
3) $y = e^{-2x} + e^{2x}$; 4) $y = x^3 + 1$.

155. Укажіть найменший додатний період функції:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; 3) $y = \dfrac{\cos x}{2}$; 4) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

156. Які з наступних функцій зростають у своїй області визначення?

1) $y = \log_{0,5} x$; 2) $y = e^x$; 3) $y = 1 - x$;
4) $y = \sqrt{x+2}$; 5) $y = \sqrt{x^2}$.

Підсумок

Правила диференціювання

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x),$$

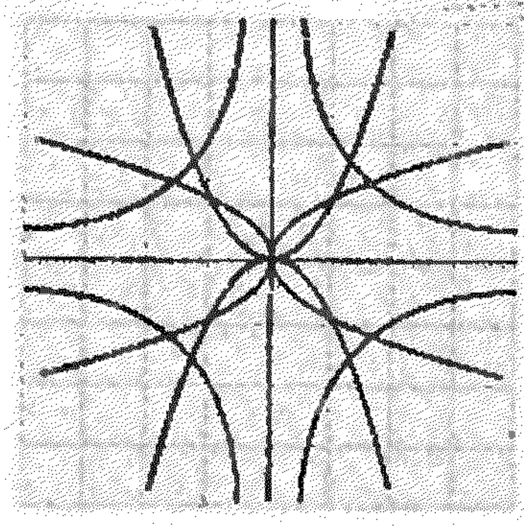
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

$$(f(kx+b))' = kf'(u), \text{ де } u = kx + b.$$

Похідні елементарних функцій

y	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$
y'	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x \ln a$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$



58. Дослідження функцій і побудова їхніх графіків за допомогою похідної

З наявних способів задання функції найбільшу наочність має графічний, що робить його незамінним засобом при розв'язуванні різних задач. Тому для аналітично заданої функції часто будують її графік. Графіки функцій можна будувати за точками. Проте випадково вибрані точки (нехай навіть близько розміщені одна від одної) не дають змоги врахувати важливі властивості функції. Тому будувати графік треба не за довільними точками, а за характерними, «опорними». При цьому важливо мати уявлення про поведінку функції на проміжках між опорними точками та ін. Навчити знаходити характерні точки функції і будувати її графік є головною метою даного параграфа.

1. Ознаки сталості, зростання та спадання функції

При побудові графіка функції дуже важливо вміти знаходити проміжки зростання, спадання і сталості функції, або ж, інакше кажучи, проміжки її монотонності. Неважко побачити, що існує зв'язок між зростанням, спаданням, сталістю функції і кутами між дотичними до її графіка та віссю абсцис. Якщо функція $y = f(x)$ зростає, то дотичні до її графіка утворюють з віссю x гострі кути α (рис. 89), тому $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$. З геометричного змісту похідної випливає, що $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, тобто $f'(x) \geq 0$. Якщо ж функція $f(x)$ спадає, то кути α є тупими (рис. 90) і $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) \leq 0$. У сталої функції кут між дотичними до її графіка

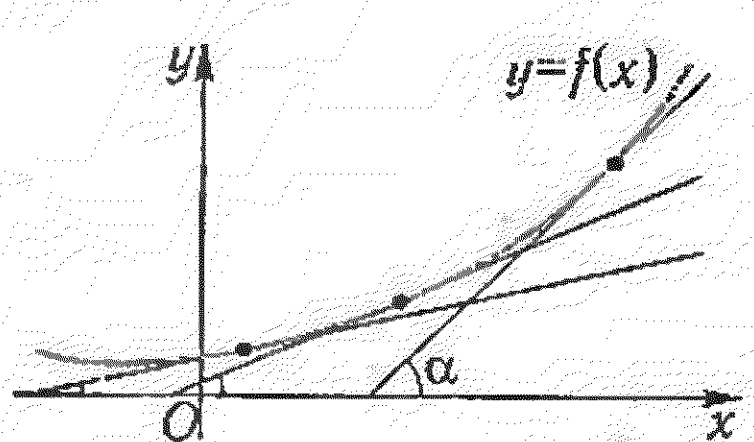


Рис. 89

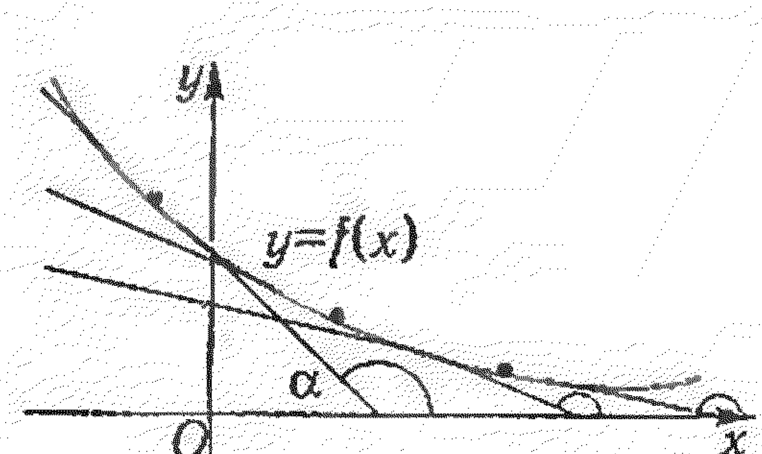


Рис. 90

і віссю x дорівнює нулю, тобто $f'(x) = \mathrm{tg}\alpha = 0$. Отже, можна зробити наступний висновок.

Якщо функція зростаюча, то її похідна є невід'ємною; якщо функція спадна, то її похідна є недодатною; для сталої функції похідна дорівнює нулю.

Таким чином, за властивостями функції можна визначити знак її похідної. І — навпаки: за знаком похідної можна характеризувати поведінку самої функції.

Нехай $f'(x) > 0$. Ми знаємо, що $f'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x: $f'(x) = \mathrm{tg}\alpha > 0$. Отже, дотична у кожній точці графіка утворює з додатним напрямом осі абсцис гострий кут α. Це можливо тільки у тому випадку, коли графік функції із зростанням аргументу піднімається вгору, тобто функція зростає.

Аналогічно одержимо, що коли $f'(x) < 0$, то функція спадає. Наведені міркування підводять нас до наступної теореми.

Теорема 1 *(ознака монотонності функції).*

Якщо на деякому інтервалі похідна функції додатна, то функція зростає на цьому інтервалі, а якщо похідна — від'ємна, то функція спадає на цьому інтервалі.

Це твердження має простий механічний зміст.

Нехай $x = x(t)$ — закон руху матеріальної точки вздовж координатної прямої. Якщо $x'(t) > 0$, тобто $v(t) > 0$, то це означає, що точка рухається у додатному напрямі осі. Отже, її координата збільшується, тобто $x(t)$ є зростаючою функцією.

Так само розглядають випадок, коли $x'(t) < 0$.

З наведених вище міркувань випливає, що проміжки зростання і спадання функції збігаються з проміжками знакосталості її похідної.

Якщо $x'(t) = 0$ при $t_0 < t < t_1$, то це означає, що швидкість точки $v(t) = x'(t)$ дорівнює нулю на цьому проміжку, тобто точка не рухається. Отже, її координата не змінюється: $x(t)$ = const, якщо $t_0 < t < t_1$. Це дає підстави сформулювати наступну теорему.

Теорема 2 *(ознака сталості функції).*

Якщо на деякому інтервалі похідна функції тотожно дорівнює нулю, то функція стала на цьому інтервалі.

Якщо функція диференційовна у своїй області визначення та її похідна тільки в скінченній кількості точок може набувати значення 0, то інтервали монотонності функції можна знайти за такою схемою:

1) вказати область визначення функції;
2) знайти точки, в яких похідна функції дорівнює нулю;
3) розбити область визначення функції знайденими точками на інтервали;
4) визначити знак похідної на кожному з інтервалів.

Останню дію можна виконати, наприклад, обчисливши значення похідної у будь-якій точці проміжку. Якщо на розглянутому інтервалі похідна функції додатна, то на ньому функція зростає, а якщо від'ємна — спадає.

Приклад 1. Знайти інтервали зростання і спадання функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

□ Дана функція визначена і диференційовна на всій числовій осі. Знайдемо її похідну: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Для знаходження нулів похідної розв'яжемо рівняння $6x^2 - 6x - 12 = 0$. Одержимо $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Точки x_1 і x_2 розбивають область визначення функції на інтервали $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; +\infty)$. Визначимо знак похідної на кожному з них. Квадратний тричлен $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ є додатним на інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(2; +\infty)$ та від'ємним на інтервалі $(-1; 2)$. Отже, $f'(x) > 0$ на проміжках $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$ і функція $y = f(x)$ зростає на кожному з цих проміжків. На інтервалі $(-1; 2)$ функція спадає, оскільки $f'(x) < 0$ на цьому проміжку. ■

Відповідь. $f(x)$ зростає на кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$ і $(2; +\infty)$, $f(x)$ спадає на інтервалі $(-1; 2)$.

Коли функція неперервна на проміжку $[a; b]$ і зростає (спадає) на інтервалі $(a; b)$, то вона зростає (спадає) і на проміжку $[a; b]$, тобто точки a і b можна приєднувати до інтервалу монотонності функції.

Так, розглянута у прикладі 1 функція спадає на проміжку $[-1; 2]$, а зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[2; +\infty)$.

Похідну часто застосовують при розв'язанні рівнянь. Якщо функція монотонна, то пряма $y = a$ або не перетинає графік функції, або перетинає його в єдиній точці (рис. 91).

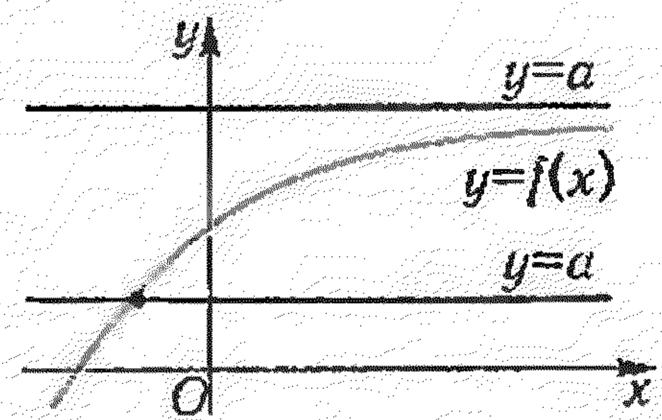


Рис. 91

Нехай функція $y = f(x)$ є монотонною. Тоді рівняння $f(x) = a$, згідно із сказаним вище, має не більше ніж один корінь. Монотонність функції можна встановити за допомогою похідної.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^3 - 3x^2 + 15x - 26 = 0$.

□ Функція $y = x^3 - 3x^2 + 15x - 26$ є зростаючою у своїй області визначення $(-\infty; +\infty)$, оскільки її похідна $y' = 3x^2 - 6x + 15 = 3(x^2 - 2x + 5) > 0$ (доведіть самостійно, що квадратний тричлен $x^2 - 2x + 5$ є додатним). Отже, дане рівняння має не більше ніж один корінь. Неважко перевірити, що $x = 2$ є коренем даного рівняння. ■

Відповідь. 2.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos x = 1 - 2x$.

□ Легко помітити, що $x = 0$ – корінь даного рівняння, бо $\cos 0 = 1$ і $1 - 2 \cdot 0 = 1$. Чи розв'язали ми вже рівняння? Безумовно ні: ми могли не помітити інших коренів. Тому зупинитись на цьому кроці — це означає зробити грубу помилку. Доведемо, що інших коренів рівняння не має. Подамо рівняння у вигляді: $\cos x + 2x - 1 = 0$ і розглянемо функцію $y = \cos x + 2x - 1$. Ця функція зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки її похідна $y' = -\sin x + 2$ набуває додатних значень на всій числовій прямій. Відтак, рівняння має не більш одного кореня. Але один корінь уже знайдено. Отже, дане рівняння має один корінь $x = 0$. ■

Відповідь. 0.

Контрольні запитання

1°. Які з наступних функцій зростають у своїх областях визначення:

а) $y = e^x + x$; б) $y = e^x - x$; в) $y = x^2 + x$; г) $y = 1 - 2x^3$?

2°. Для функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 92, укажіть інтервали, на яких $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.

3°. Відомо, що $f'(x) = x(x + 1)$. Укажіть проміжки, на яких функція $y = f(x)$ спадає (зростає).

4. На рис. 93 зображено графік похідної функції $y = g(x)$. Укажіть проміжки зростання функції $y = g(x)$.

5. Відомо, що $f'(x) = g'(x)$. Яким є графік функції $y = f(x) - g(x)$?

6. Парна диференційовна функція зростає на проміжку $(0; +\infty)$. Який знак має її похідна на проміжку $(-\infty; 0)$?

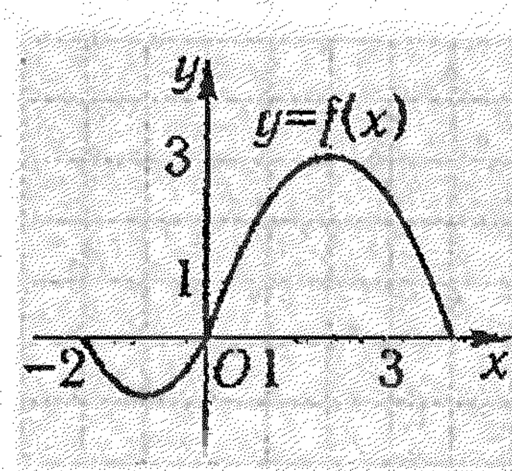


Рис. 92

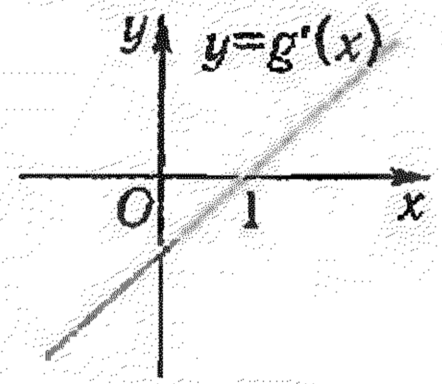
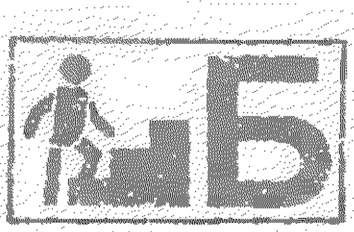


Рис. 93

2. Екстремуми функції



При дослідженні функції важливу роль відіграють точки, які відокремлюють проміжки зростання функції від проміжків спадання. Так, для функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 94, це точки x_1, x_2, x_3. Дослідимо поведінку функції в околах цих точок.

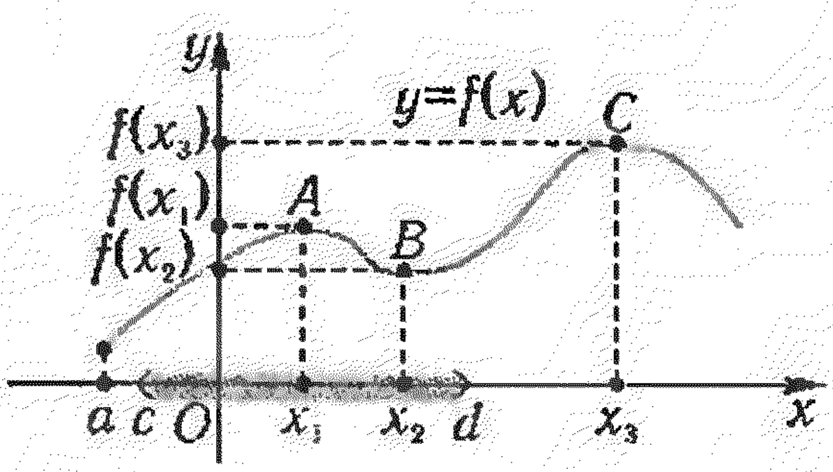


Рис. 94

Неважко помітити, що значення функції у точці x_1 більше від значень функції в сусідніх точках. Інакше кажучи, для всіх $x \neq x_1$ з деякого околу точки x_1 виконується нерівність $f(x) < f(x_1)$. Аналогічно функція веде себе в околі точки x_3. Точки, подібні до x_1, x_3, називаються ***точками максимуму функції***.

Точка x_0 називається точкою максимуму функції $y = f(x)$, якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Максимум — від латинського maximum — найбільше.

Значення функції у точці x_2 менше від усіх «сусідніх» значень функції, тобто можна знайти такий окіл точки x_2, що для всіх $x \neq x_2$ з цього околу буде виконуватись нерівність $f(x) > f(x_2)$.

Точка x_0 називається точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

***Мінімум** — від латинського minimum — найменше.*

Для точок максимуму та мінімуму є загальна назва — *точки екстремуму*, чи *точки локального екстремуму*.

***Екстремум** — від латинського extremum — крайнє, останнє.*

***Локальний** — від латинського localis — місцевий, обмежений.*

Використовуючи термін «локальний», ми цим самим підкреслили, що наявність екстремуму функції в точці x_0 залежить тільки від поведінки функції поблизу цієї точки. Справді, для функції $y = f(x)$ (див. рис. 94) нерівність $f(x) < f(x_1)$ виконується на інтервалі $(c; d)$, але не виконується на всій області визначення. Наприклад, $f(x_3) > f(x_1)$. Може навіть трапитись, що значення функції у точці мінімуму буде більшим від значення функції у точці максимуму, подібно до того, як западина в горах може бути вищою над рівнем моря, ніж невелика вершина.

З'ясуємо тепер, як можна знайти точки екстремуму функції. Розглянемо спочатку ***функцію, диференційовну у своїй області визначення.*** Зверніть увагу на те, що на рис. 94 в точках графіка A, B, C дотичні до графіка функції паралельні осі x. Отже, якщо диференційовна функція має екстремум у точці x_0, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю. Однак, не завжди з того, що похідна в точці x_0 дорівнює нулю, випливає, що x_0 — точка екстремуму. Наприклад, похідна функції $y = x^3$ при $x = 0$ дорівнює нулю, але ця точка не є точкою екстремуму функції (рис. 95).

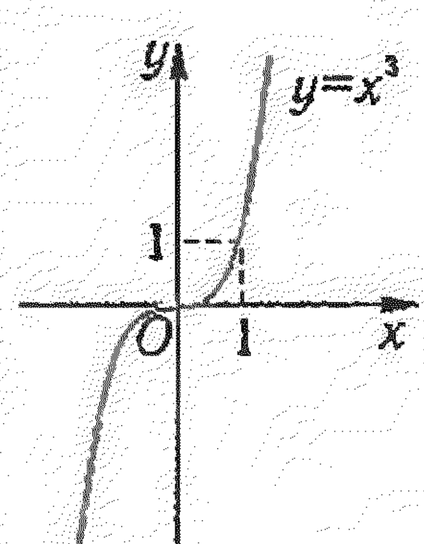


Рис. 95

Виникає питання, як з «підозрілих» точок, тобто з точок, в яких похідна дорівнює нулю, вибрати точки екстремуму. Неважко помітити, що коли «підозріла» точка відокремлює проміжок зростання функції від проміжку спадання, то вона обов'язково буде точкою екстремуму. Ми вже знаємо умови зростання і спадання функції на інтервалі – вони пов'язані зі знаком похідної на цьому інтервалі. Застосовуючи їх, одержимо наступне твердження.

Теорема 3 *(про достатню умову екстремуму).*

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і точка x_0 з цього проміжку.

1. Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$ і $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$.

2. Якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; x_0)$ і $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0; b)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$.

Часто теорему 3 формулюють так.

Якщо в точці x_0 похідна змінює свій знак, то ця точка є точкою екстремуму.

Ця теорема має просту механічну інтерпретацію. Нехай $x = x(t)$ — закон прямолінійного руху матеріальної точки, де, як завжди, x – координата точки в момент часу t. Якщо $x'(t) > 0$ при $t < t_0$, то це означає, що швидкість точки $v(t) = x'(t)$ додатна, і напрям її руху збігається з напрямом осі. Отже, координата точки зростає при $t < t_0$. Оскільки, за умовою, при $t > t_0$ $v(t) = x'(t) < 0$, то точка з моменту часу t_0 починає рухатись у зворотному напрямі, її координата спадає. Таким чином, у момент часу t_0 кордината точки є найбільшою в деякому околі точки t_0. Аналогічно можна інтерпретувати твердження 2. Щоб знайти точки екстремуму диференційовної функції, потрібно:

1) знайти похідну функції;
2) знайти «підозрілі» точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю;
3) дослідити знак похідної зліва і справа від розглядуваної точки;
4) спираючись на теорему 3, зробити відповідні висновки.

Приклад 4. Знайти точки максимуму та мінімуму функції $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5$.

□ Функція визначена і диференційовна на всій числовій прямій. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3).$$

Похідна дорівнює нулю у точках $x = 0$, $x = 1{,}5$, тобто ці точки є «підозрілими» на екстремум. Перевіримо, чи змінює похідна знак у цих точках.

На інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; 1{,}5)$ похідна від'ємна, а на $(1{,}5, +\infty)$ – додатна (рис. 96). Тобто $x = 1{,}5$ – точка мінімуму функції, а в точці $x = 0$ екстремуму нема. ■

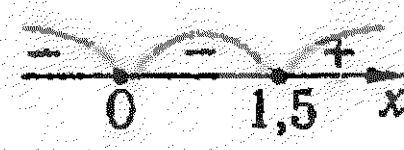
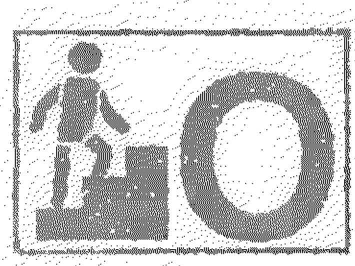


Рис. 96

Відповідь. $x = 1{,}5$ — точка мінімуму функції, точок максимуму немає.



Ми знаходили проміжки монотонності функції та її точки екстремуму, припускаючи, що функція диференційовна в своїй області визначення. Однак, як ми знаємо, функції, які описують складні процеси, можуть мати точки, в яких похідна не існує. Наприклад, на рис. 97 зображено закон руху м'яча, що падає на підлогу і пружно відскакує від неї (h — висота м'яча над підлогою, t – час). Як бачимо, в точках t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 функція $h = h(t)$ має мінімуми, але похідна в цих точках не існує (ці точки є точками злому графіка).

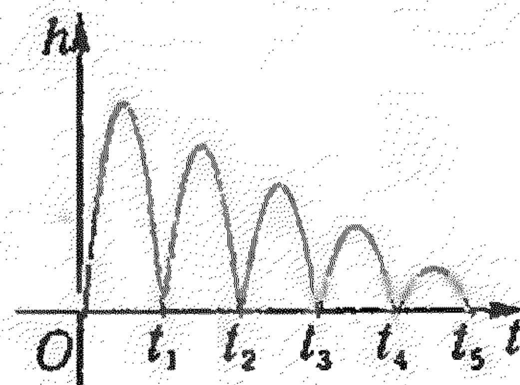


Рис. 97

Розглянемо докладніше такі функції, тобто неперервні в області визначення, але такі, що мають в області визначення точки, в яких похідна не існує. До таких функцій відносяться, наприклад, функції $y = |x|$, $y = \sqrt[3]{x}$. Точка $x = 0$ є, згідно з означенням, точкою мінімуму функції $y = |x|$ (рис. 98). Однак у цій точці похідна функції не існує — ця точка є точкою злому. Отже, функція може мати екстремуми не тільки в тих точках, де похідна дорівнює нулю, але і в точках, де похідна не існує.

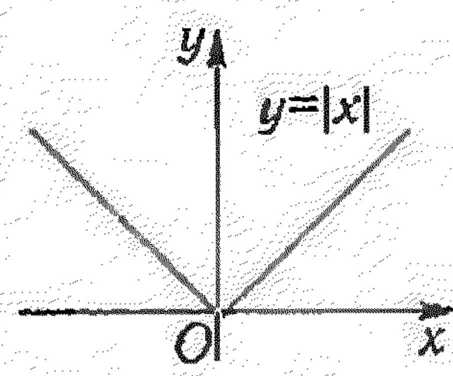


Рис. 98

Точки з області визначення функції, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками функції.

Не кожна критична точка функції є її точкою екстремуму. У цьому ми переконались, розглядаючи вище функцію $y = x^3$. Для функції $y = \sqrt[3]{x}$ точка $x = 0$ є критичною, оскільки похідна

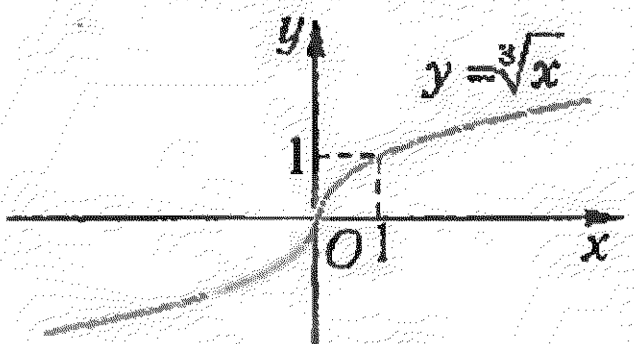


Рис. 99

$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ не існує в цій точці. Однак вона не є точкою екстремуму (рис. 99).

Не є точкою екстремуму і точка x_0 для функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 100, хоча вона є критичною точкою функції.

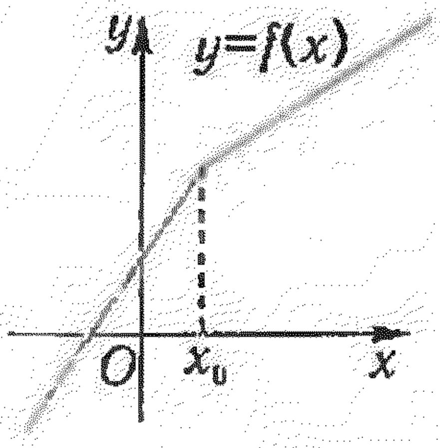


Рис. 100

Якщо критичні точки неперервної функції задовольняють умови теореми 3, то вони обов'язково є точками екстремуму функції. Схема знаходження точок екстремуму в цьому випадку аналогічна схемі, наведеній вище для диференційовних функцій. Різниця полягає тільки в тому, що в пункті 2) необхідно знаходити не тільки точки, в яких похідна дорівнює нулю, але і точки, в яких функція не має похідної.

Приклад 5. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = (x + 1)|x|$.

□ Областю визначення функції є всі дійсні числа. Якщо $x > 0$, то $f(x) = x^2 + x$ і $f'(x) = 2x + 1 > 0$. Якщо $x < 0$, то $f(x) = -x^2 - x$ і $f'(x) = -2x - 1$. Похідна функції дорівнює нулю при $x = -\frac{1}{2}$, тобто ця точка є критичною точкою функції. На інтервалі $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ похідна $f'(x)$ є додатною, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ — від'ємною. На рис. 101 показано знаки похідної функції. Звідси випливає, що точка $x = -\frac{1}{2}$ є точкою максимуму функції, а точка $x = 0$ — точкою мінімуму функції.

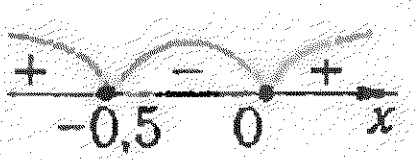


Рис. 101

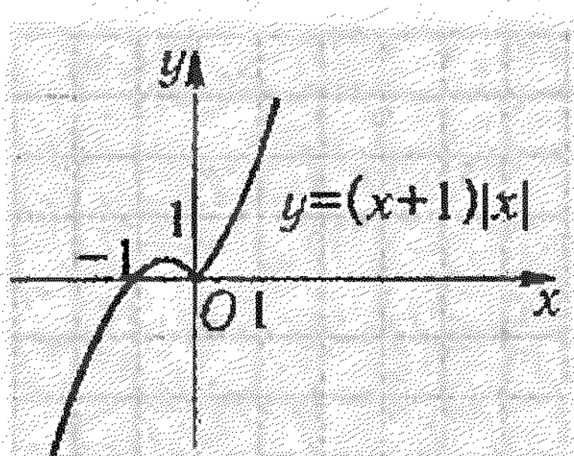


Рис. 102

Якщо побудувати графік функції $f(x) = (x + 1)|x|$ (рис. 102), то видно, що в точці $x = 0$ вона не диференційовна. ■

Відповідь. $x = -\frac{1}{2}$ — точка максимуму, $x = 0$ — точка мінімуму.

Контрольні запитання

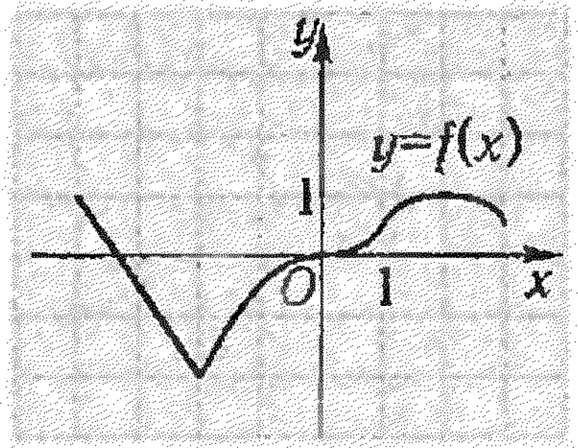


Рис. 103

1°. Укажіть за графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рис. 103, її точки екстремуму.

2°. Чи може значення функції в точці максимуму бути меншим від значення функції в точці мінімуму?

3°. Чи обов'язково точка, в якій похідна функції дорівнює нулю, є точкою екстремуму?

4°. Серед яких точок слід шукати точки екстремуму диференційовної функції?

5°. Чи може зростаюча (спадна) функція мати точки екстремуму?

6°. Похідна деякої функції має вигляд $y' = (x-2)(x+1)^2$. Вкажіть усі точки екстремуму функції. Чи є точка $x = 2$ точкою максимуму або точкою мінімуму функції?

7°. Яке найбільше число точок екстремуму може мати многочлен: а) другого степеня; б) третього степеня?

8. Чи може точка $x = 0$ бути точкою екстремуму непарної функції? А парної?

9. На рис. 104 зображено графік похідної функції $y = f(x)$. Чи має функція $y = f(x)$ точки екстремуму? Якщо має, то вкажіть, які це точки: точки максимуму чи точки мінімуму?

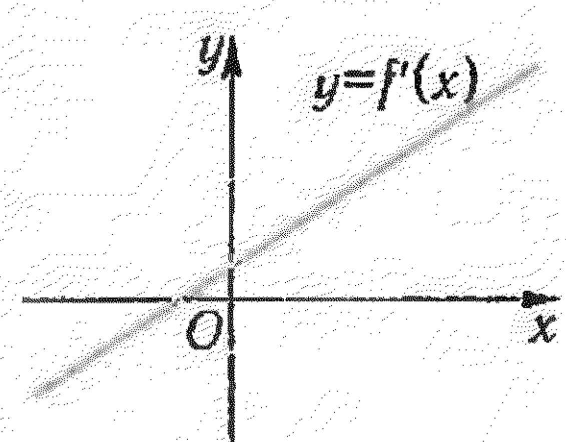


Рис. 104

3. Побудова графіків функцій

Ви вже знаєте, що побудову графіків функцій слід починати з її дослідження, тобто з установлення головних властивостей функції.

Дослідження функції доцільно проводити за такою схемою.

1) Знайти область визначення функції, якщо її не вказано.
2) Дослідити функцію на парність (непарність). Для парних і непарних функцій можна обмежитись дослідженням лише при $x \geq 0$.
3) З'ясувати, чи буде функція періодичною. Якщо функція періодична і T — її основний період, то можна обмежитись дослідженням функції на будь-якому проміжку завдовжки T.

4) Знайти точки перетину графіка функції з віссю x, тобто нулі функції, і проміжки знакосталості (якщо це не приведе до громіздких рівнянь і нерівностей).
5) Знайти проміжки зростання і спадання функції і точки екстремуму функції.
6) Обчислити значення функції в точках екстремуму.
7) Для уточнення графіка функції можна обчислити її значення у додаткових точках, наприклад, знайти точку перетину графіка з віссю y.
8) Для функцій, які мають точки розриву, необхідні додаткові дослідження в околах цих точок.

Приклад 6. Побудувати графік функції $f(x)=\frac{9}{8}(x-1)^2(x+1)$.

☐ 1) Функція визначена на всій числовій осі, тобто $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Функція не є ні парною, ні непарною, оскільки, наприклад, $f(2) \neq f(-2)$ і $f(2) \neq -f(-2)$.

3) Функція не є періодичною.

4) Нулями функції є точки $x = \pm 1$. Знайдемо проміжки знакосталості функції. Нерівність $(x-1)^2(x+1) > 0$ справджується при $x+1>0$ і $x \neq 1$. Отже, функція набуває додатних значень на інтервалах $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$. На інтервалі $(-\infty; -1)$ функція набуває від'ємних значень.

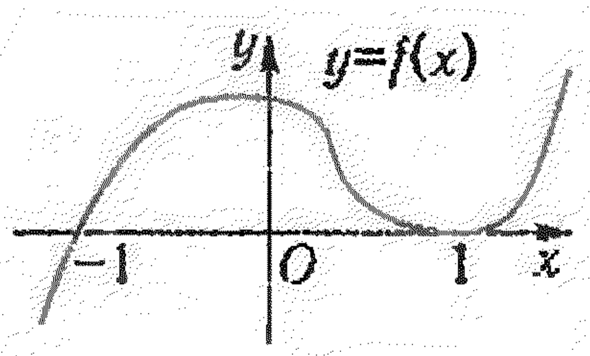


Рис. 105

На підставі цих досліджень уже можна побудувати ескіз графіка (рис. 105).

5) Уточнимо графік функції за допомогою похідної: знайдемо проміжки зростання і спадання, точки екстремуму.

$$y'=\frac{9}{8}\left(2(x-1)(x+1)+(x-1)^2\right)=\frac{9}{8}(x-1)(2x+2+x-1)=\frac{9}{8}(x-1)(3x+1).$$

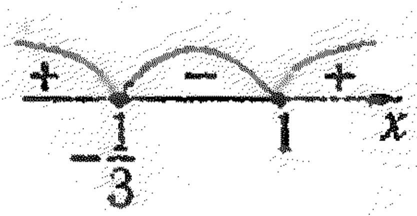


Рис. 106

$x=-\frac{1}{3}$ і $x=1$ — критичні точки функції. Знаки похідної показані на рис. 106.

Отже, функція зростає на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, $[1; +\infty)$ і спадає на проміжку $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Точка $x = -\frac{1}{3}$ — точка максимуму, а точка $x = 1$ — точка мінімуму функції.

6) $y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{8}\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2\left(-\frac{1}{3}+1\right) =$

$= \frac{9}{8}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $y(1) = 0$.

7) Графік функції перетинає вісь ординат у точці з координатами $\left(0;\frac{9}{8}\right)$.

На підставі додаткових досліджень побудуємо більш точний графік функції (рис. 107). ■

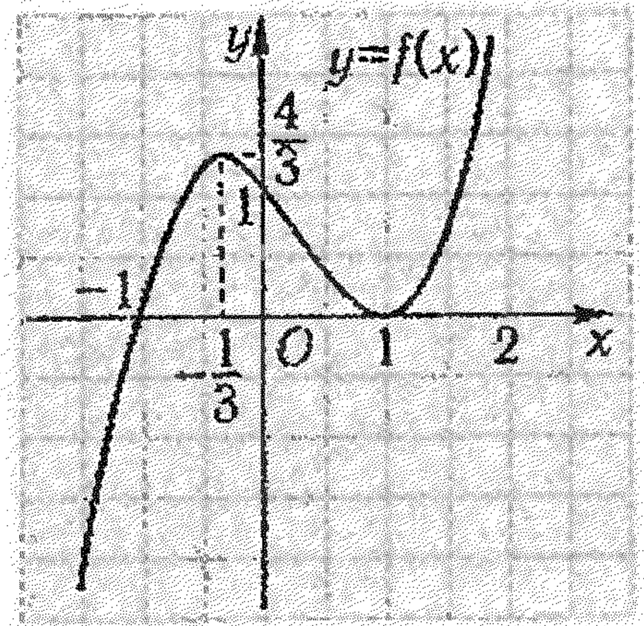


Рис. 107

Побудуємо тепер графік функції, яка має точку розриву.

Приклад 7. Дано функцію $y = x^3 + \frac{3}{x}$.

1) Побудувати її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $x^3 + \frac{3}{x} = 5$?

3) При яких значеннях a рівняння $x^3 + \frac{3}{x} = a$ має єдиний корінь?

□ 1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Оскільки $y(-x) = (-x)^3 + \frac{3}{-x} = -x^3 - \frac{3}{x} = -\left(x^3 + \frac{3}{x}\right) = -y(x)$, то дана функція є непарною. Тому її графік достатньо побудувати на інтервалі $(0; +\infty)$.

Функція є неперіодичною.

З віссю абсцис графік функції не перетинається, бо рівняння $x^3 + \frac{3}{x} = 0$ коренів не має. Якщо $x > 0$, то $y > 0$, тобто функція набуває додатних значень при $x > 0$.

Дослідимо функцію за допомогою похідної.

Рис. 108

Оскільки $y' = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$, або $y' = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}$, то критичними точками функції є точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Знаки похідної для $x > 0$ зображено на рис. 108.

На проміжку (0; 1] функція спадає, а на проміжку $[1; +\infty)$ — зростає. Точка $x = 1$ є точкою мінімуму функції. $y(1) = 4$.

Графік не перетинає осі y, бо в точці $x = 0$ функція не визначена.

Функція неперервна на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Точка $x = 0$ є точкою розриву функції. Дослідимо поведінку функції в околі цієї точки. Коли значення аргументу x наближаються до нуля з правого боку, то перший доданок x^3 прямує до нуля, а другий — стає як завгодно великим (перевірте це твердження, поклавши $x = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$ і т. д.). Графік функції наближається до осі y як завгодно близько, але не перетинає її, бо при $x = 0$ функція не визначена. Вісь y є вертикальною асимптотою графіка функції.

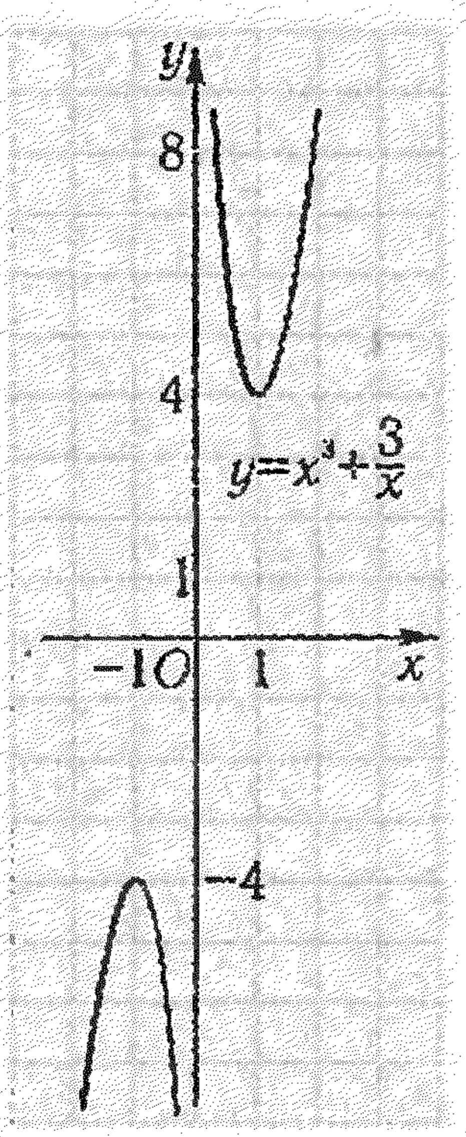


Рис. 109

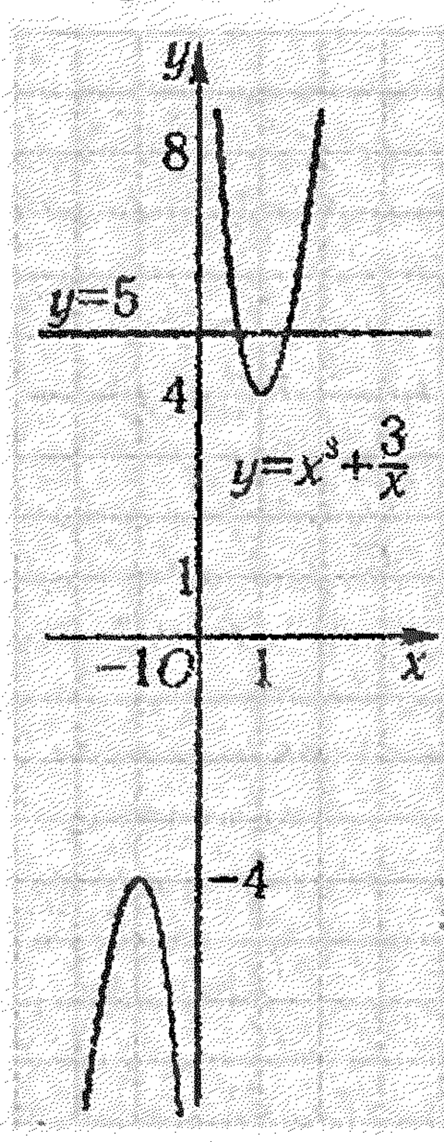


Рис. 110

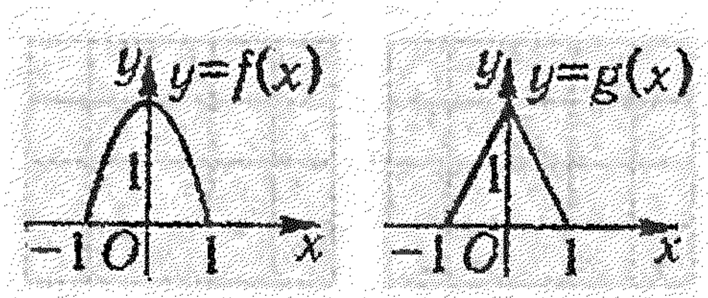
Побудуємо графік функції на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки функція є непарною, то її графік симетричний відносно початку координат (рис. 109).

2) Пряма $y = 5$ перетинає графік функції у двох точках. Отже, рівняння має два корені (рис. 110).

3) Перетинаючи графік функції $y = x^3 + \frac{3}{x}$ прямими $y = a$ (див. рис. 109, 110) побачимо, що точка перетину є єдиною лише при $a = \pm 4$. Отже, при $a = \pm 4$ рівняння має єдиний корінь. ■

Контрольні запитання

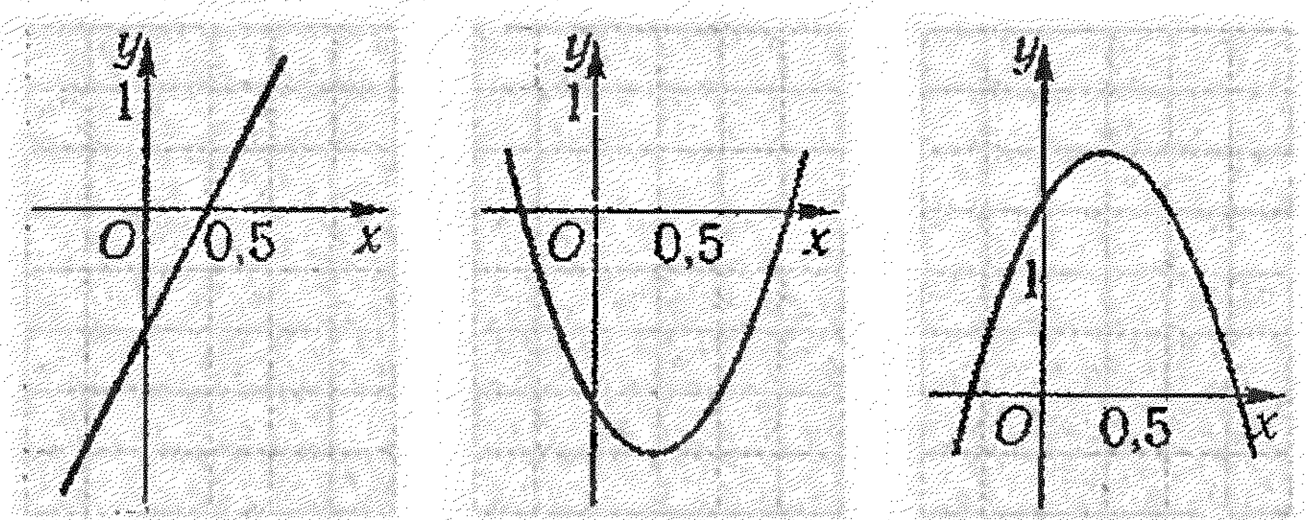
1°. На рис. 111, а)–б) зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Укажіть властивості, які є спільними для цих функцій, і властивості, якими вони відрізняються.



а) б)

Рис. 111

2. Відомо, що $f'(x) = 2x - 1$. Який із графіків функцій, зображених на рис. 112, а)–в), є графіком функції $y = f(x)$?

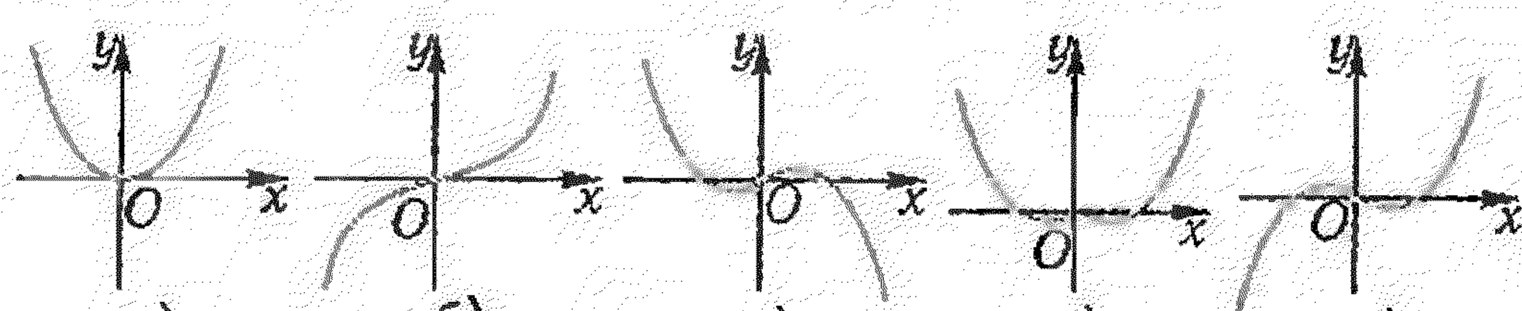


а) б) в)

Рис. 112

3. Побудуйте графік деякої функції, яка задовольняє умови:
а) $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, $f'(0) = 0$;
б) $f'(x) > 0$ при $x < 0$, $f'(x) < 0$ при $x > 0$, $f'(0)$ не існує;
в) $f'(x) < 0$ при $x \neq 0$; $f'(0) = 0$.

4. Який із графіків, зображених на рис. 113, а)–ґ), є графіком функції:
а) $y = x^3 - x$; б) $y = x^3 + x$?



а) б) в) г) ґ)

Рис. 113

4. Найбільше і найменше значення функції

Розв'язування багатьох практичних задач зводиться до визначення умов, за яких досліджувана величина набуває свого найбільшого чи найменшого значення.

Наприклад: які розміри повинен мати ящик, щоб при певній кількості матеріалу, витраченого на його виготовлення, об'єм ящика був найбільшим? Як із круглої деревини виготовити прямокутну балку з найменшими втратами матеріалу? На якій висоті над центром круглого майдану потрібно підвісити ліхтар, щоб освітлення було найкращим? Як виконати певну роботу з найменшими витратами часу?

Подібні задачі розв'язуються за допомогою похідної. Насамперед уточнимо поняття найбільшого та найменшого значень функції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку і x_0 — точка з цього проміжку.

Значення функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають найбільшим значенням функції на проміжку, якщо воно не менше від будь-якого іншого значення функції на ньому.

Отже, якщо $f(x_0)$ — найбільше значення функції на деякому проміжку, то для всіх x з цього проміжку справджується нерівність $f(x) \le f(x_0)$.

Значення функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають найменшим значенням функції на проміжку, якщо воно не більше від будь-якого іншого значення функції на ньому.

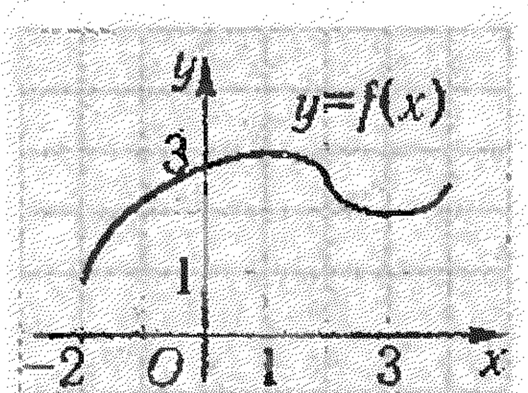


Рис. 114

Отже, якщо $f(x_0)$ — найменше значення функції на деякому проміжку, то для всіх x з цього проміжку справджується нерівність $f(x) \ge f(x_0)$.

Наприклад, найбільше значення функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 114, на проміжку $[-2; 4]$ дорівнює $f(1) = 3$, а найменше дорівнює $f(-2) = 1$.

Зверніть увагу на те, що при визначенні найбільшого і найменшого значень функції на проміжку ми порівнювали їх із усіма значеннями функції на цьому проміжку. Водночас при визначенні точки екстремуму ми по-

рівнювали значення функції в точці екстремуму тільки із значеннями функції з деякого околу цієї точки.

Якщо неперервна функція зростає на деякому відрізку $[a; b]$, то найбільшого значення вона набуває у точці b, а найменшого — у точці a (рис. 115, а). Якщо неперервна функція спадає на деякому відрізку $[a; b]$, то найбільшого значення вона набуває у точці a, а найменшого — у точці b (рис. 115, б).

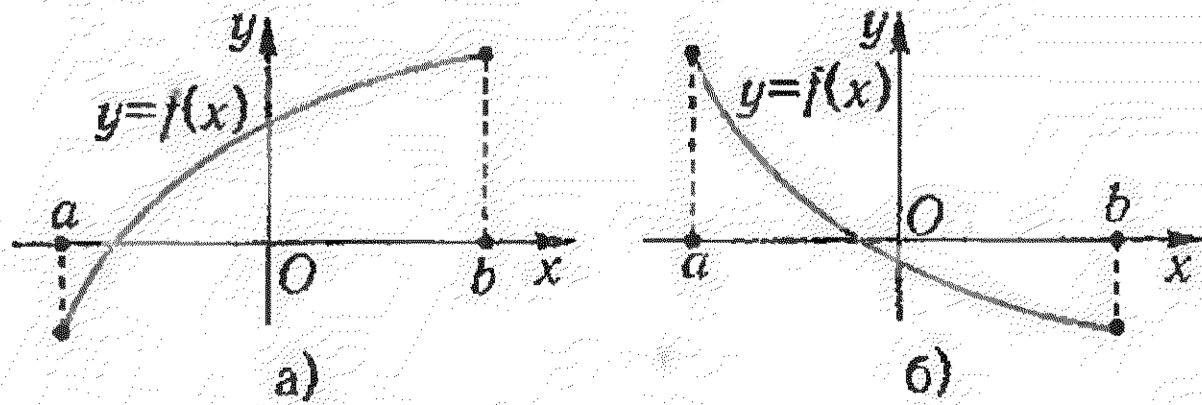


Рис. 115

Якщо неперервна функція не є монотонною на відрізку, то найбільшого або найменшого значення вона не обов'язково набуває на його кінцях. Найбільшого значення функція набуває або в точці максимуму, або на кінцях відрізка (рис. 116), а найменшого – або в точці мінімуму, або на кінцях відрізка (рис. 117).

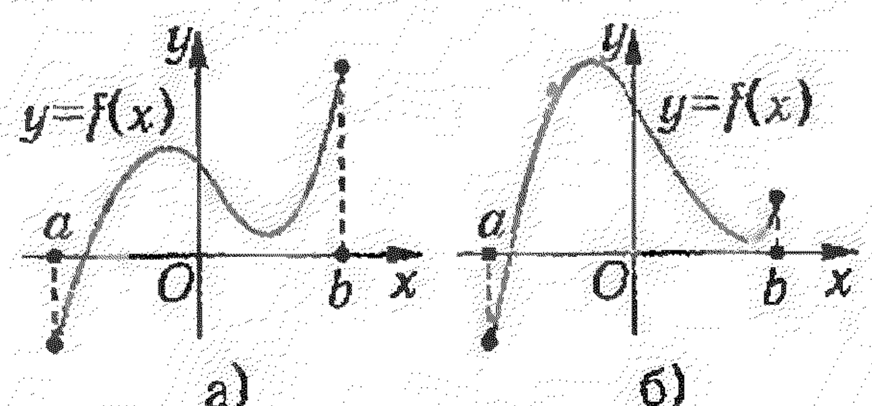


Рис. 116

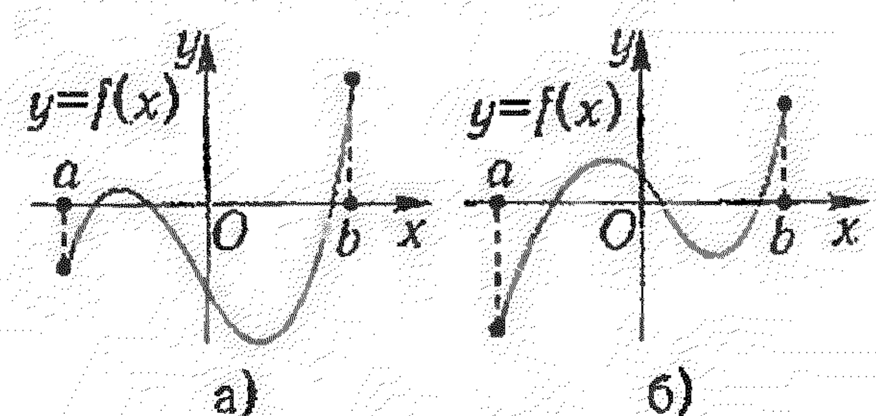


Рис. 117

Щоб знайти найбільше і найменше значення диференційовної функції на заданому відрізку, достатньо:

1) знайти точки, в яких похідна функції дорівнює нулю;
2) вибрати з них ті, які належать до заданого відрізка;
3) обчислити значення функції в цих точках і на кінцях відрізка;
4) серед отриманих значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад 8. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 2$ на відрізку $[-1; 2]$.

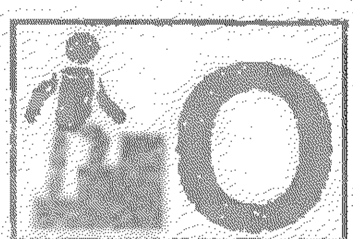
□ Знайдемо похідну функції: $f'(x) = 3x^2 + 2x + 4$. Оскільки одержаний квадратний тричлен не має нулів, то він скрізь набуває додатних значень, тобто $f'(x) > 0$. Функція зростає на проміжку $[-1; 2]$. Отже, $f(-1) = -2$ – її найменше значення, а $f(2) = 22$ — найбільше на відрізку $[-1; 2]$. ■

Відповідь. 22 і –2.

Приклад 9. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x = t^3 - 12t + 10$. Знайти найбільшу і найменшу координату точки за проміжок часу $[0; 4]$.

□ Знайдемо похідну функції: $x'(t) = 3t^2 - 12$. Нулями похідної функції є точки $t_1 = -2$ і $t_2 = 2$. Однак лише одна з них, $t = 2$, належить відрізку $[0; 4]$. Обчислимо значення функції на кінцях відрізка і в точці $t = 2$: $x(0) = 10$, $x(4) = 26$, $x(2) = -6$. Найбільша координата точки дорівнює $x(4) = 26$, найменша дорівнює $x(2) = -6$. ■

Відповідь. 26 і –6.



При розв'язанні прикладних задач спочатку перекладають задачу на мову математики, тобто будують її математичну модель. Як відомо, математичне моделювання можна зобразити як процес, що складається з трьох етапів:

1) вибір чи побудова математичної моделі для опису даної задачі;
2) дослідження побудованої моделі, тобто розв'язування математичної задачі;
3) змістовне тлумачення результатів дослідження і встановлення відповідності одержаного результату меті дослідження.

У нашому випадку для побудови математичної моделі запропонуємо таку послідовність дій.

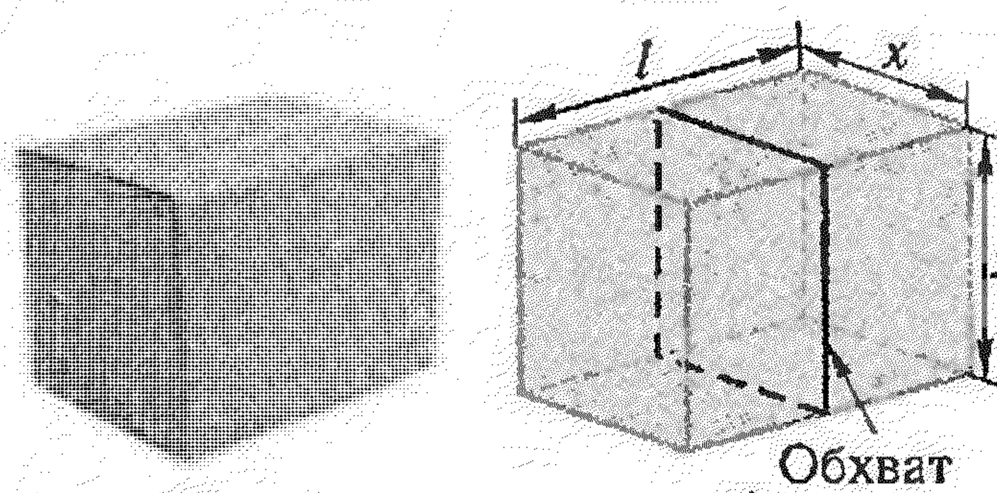
1. За умовою задачі виділити величину, яку слід оптимізувати.
2. Вибрати зручну змінну, що може бути аргументом функції, яка описує досліджувану величину.
3. Знайти аналітичний вираз для функції.
4. За умовою задачі визначити проміжок, на якому розглядають отриману функцію.

Так завершується перший етап математичного моделювання: дану задачу зведено до знаходження найбільшого або найменшого значення функції на деякому проміжку. За допомогою похідної або іншими засобами (використовуючи зростання або спадання функції або властивості квадратичної функції і т. ін.) розв'язують отриману задачу. Після цього з'ясовується, який реальний зміст має результат, отриманий у термінах функцій.

Наведемо приклади застосування описаного методу.

Приклад 10. У відділі пакування посилок приймають ящики, якщо сума їх довжини і обхвату не перевищує 150 см. Знайти розміри ящика з квадратними боками, який задовольняє цю вимогу і має найбільший об'єм.

☐ Математичною моделлю ящика для посилок (рис. 118, а) є прямокутний паралелепіпед (рис. 118, б). Оптимізувати об'єм ящика — це означає з'ясувати, при яких значеннях x і l, що задовольняють умову, об'єм паралелепіпеда буде найбільшим. Як відомо, об'єм V прямокутного паралелепіпеда з квадратною гранню $V = x^2 \cdot l$. За умовою задачі, $4x + l = 150$. Звідси $l = 150 - 4x$. Підставивши одержаний вираз для l у формулу для знаходження об'єму, отримаємо функціональну залежність: $V = x^2(150 - 4x)$, де $0 < x < \frac{150}{4} = 37{,}5$. Таким чином, необхідно знайти найбільше значення функції $V = 150x^2 - 4x^3$ на інтервалі $(0; 37{,}5)$. Знайдемо за наведеною схемою найбільше значення цієї функції на відрізку $[0; 37{,}5]$. Похідна досліджуваної функції дорівнює: $V' = 300x - 12x^2$. Похідна набуває нульового значення при $x = 0$ і $x = 25$. Оскільки $V(0) = V(37{,}5) = 0$, а $V(25) = 25^2 \cdot 50 = 31250$, то найбільше значення на відрізку $[0; 37{,}5]$, а відтак і на інтервалі $(0; 37{,}5)$, функція набуває при $x = 25$. Отже, оптимальними розмірами для ящика є $(25 \times 25 \times 50)$ см. ■



а) б)

Рис. 118

Відповідь. $(25 \times 25 \times 50)$ см.

Приклад 11. З трьох однакових дощок завширшки a см потрібно зробити жолоб, поперечний переріз якого мав би форму рівнобічної трапеції. Як це зробити, аби пропускна здатність жолоба була найбільшою?

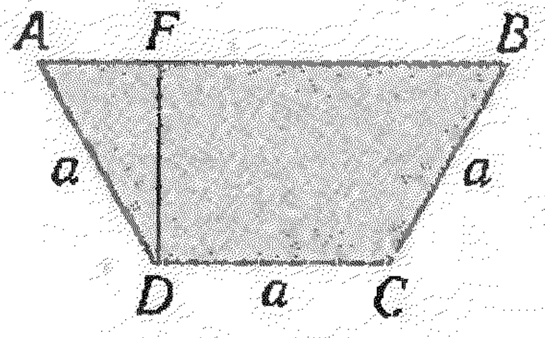


Рис. 119

☐ 1. Побудуємо математичну модель ситуації, яку розглядаємо в завданні. Пропускна здатність жолоба буде найбільшою, якщо найбільшою буде площа його поперечного перерізу (рис. 119). Тому величиною, яку необхідно оптимізувати, є площа трапеції $ABCD$. Подамо площу трапеції у вигляді функції деякого аргументу. Аргументом виберемо кут DAB при більшій основі трапеції (зрозуміло, що $AB > a$), позначивши його через x. Виразимо площу S трапеції через x і відомі величини. Оскільки $DF = a\sin x$, $AF = a\cos x$, то $S = \frac{AB + CD}{2} \cdot DF = \frac{a + a + 2a\cos x}{2} \cdot a\sin x$.

Отже, $S = a^2(1 + \cos x)\sin x$. Аргумент x змінюється на проміжку $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Таким чином, математичною моделлю даного завдання є задача: знайти найбільше значення функції $S = a^2(1 + \cos x)\sin x$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдемо найбільше значення функції $S = S(x)$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Похідна цієї функції дорівнює: $S' = a^2(\cos x + \cos 2x) = 2a^2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Розв'язавши рівняння $2a^2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$, встановимо, що на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ похідна функції лише в одній точці $x = \frac{\pi}{3}$ дорівнює нулю. Оскільки $S(0) = S(\pi) = 0$, $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} > 0$, то найбільшого значення на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $S = S(x)$ набуває при $x = \frac{\pi}{3}$. Значення $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$ буде найбільшим значенням функції і на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Таким чином, дошки треба з'єднати одна з одною під кутом 120°. ■

Відповідь. З'єднати дошки під кутом 120°.

Контрольні запитання

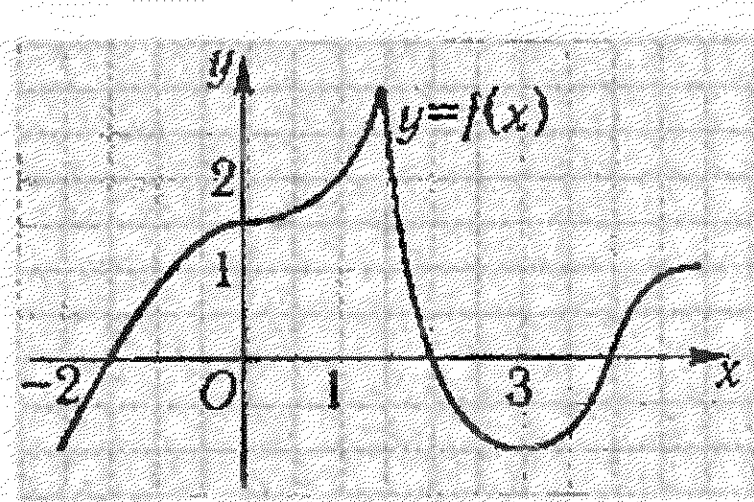


Рис. 120

1°. На рис. 120 зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть найбільше і найменше значення функції на відрізку $[-2; 2]$.

2°. Чи обов'язково найбільшого значення функція набуває в точці максимуму?

3°. Серед функцій, графіки яких зображено на рис. 121, а)–г), укажіть ту, яка найменшого значення набуває в точці мінімуму, а найбільшого – на одному з кінців відрізка.

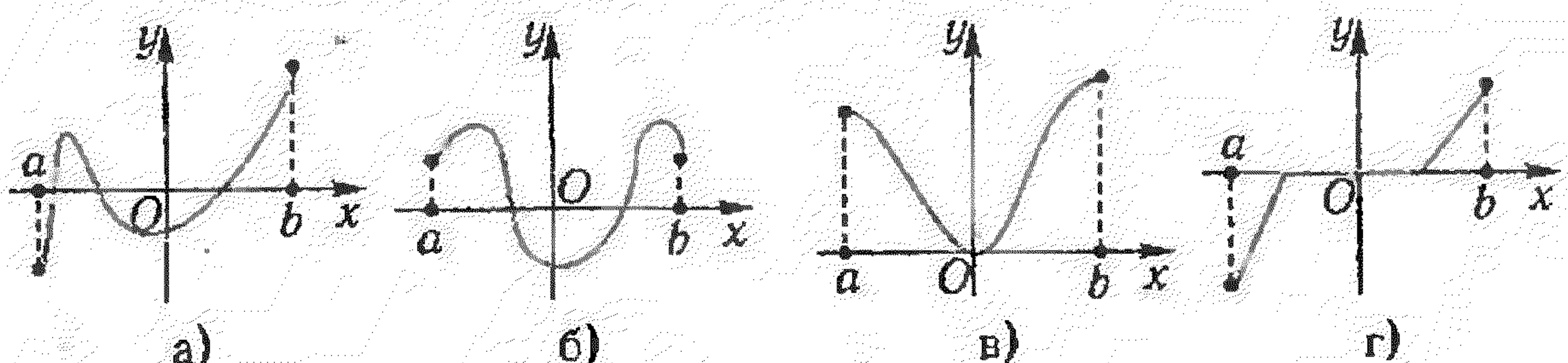


Рис. 121

4. Відомо, що $f'(x) < 0$ на проміжку $[-1; 2]$. В якій точці проміжку функція набуває найбільшого значення?

5. Похідна функції $y = f(x)$ має вигляд $f'(x) = x(x + 2)$. В яких точках слід обчислити значення функції $y = f(x)$, щоб знайти її найбільше і найменше значення на проміжку $[-3; -1]$?

6. Чи існує функція, в якої найбільше і найменше значення збігаються?

7*. Графік похідної функції $y = f(x)$ зображено на рис. 122. В якій точці функція $y = f(x)$ набуває найменшого значення?

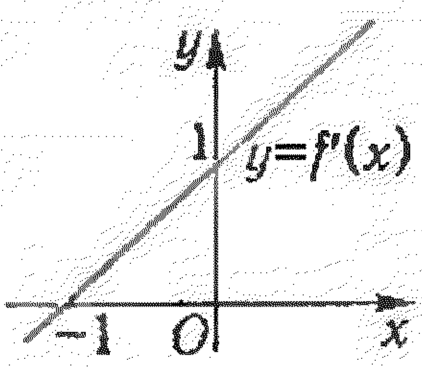


Рис. 122

Задачі

157. Доведіть, що функція $y = f(x)$ зростає у своїй області визначення:

1°) $f(x) = x^3 + 2x + 1$; 2) $f(x) = 1 + 2x + \sin x$.

158. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1°) $y = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 6$; 2°) $y = 9x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 3$;

3°) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$; 4°) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$;

5) $y = 3x^4 - 5x^3 + 2$; 6) $y = (x + 3)(x - 1)^2$;

7) $y = 1 - (x - 5)x^3$; 8) $y = e^x - x + 1$;

9) $y = xe^x$; 10*) $y = x(\ln x - 2)$;

11*) $y = \dfrac{t+1}{t^2-t+2}$.

159°. На рис. 123 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-2; 3]$.
1) Скільки коренів має рівняння $f'(x) = 0$?
2) Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$.

160. Функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[-2; 2]$. Графік її похідної зображено на рис. 124. Укажіть проміжки зростання і спадання функції $y = f(x)$.

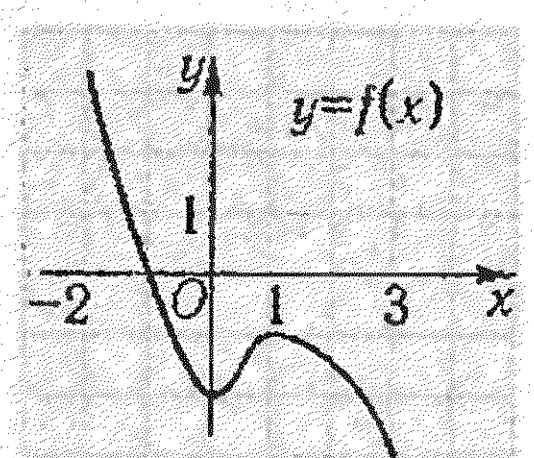


Рис. 123

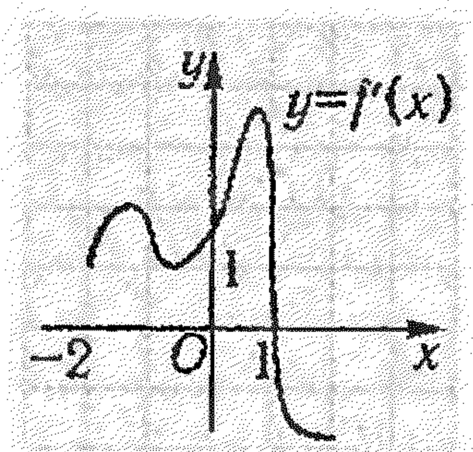
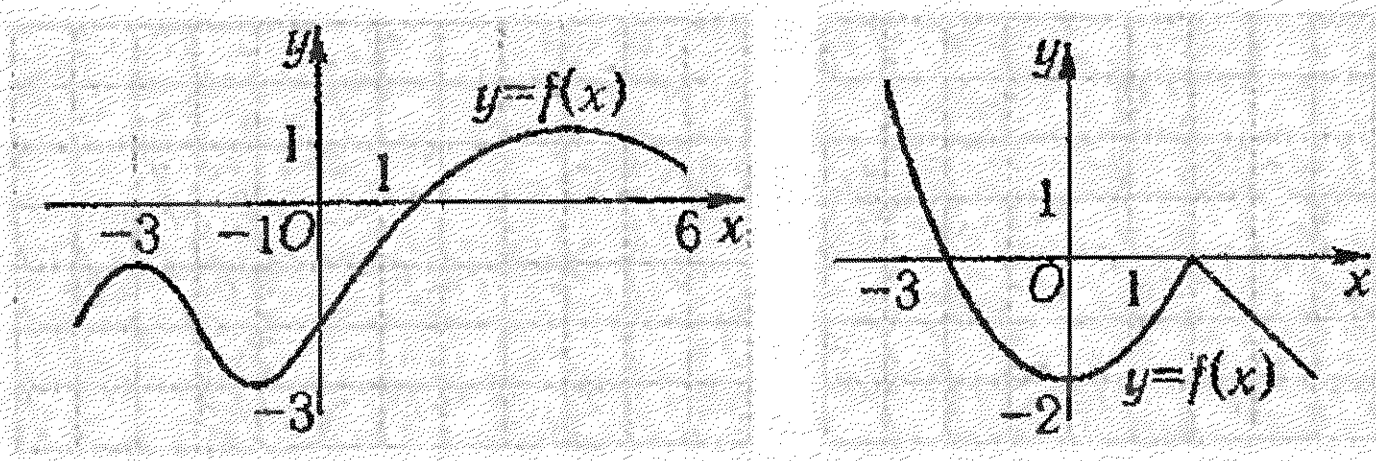


Рис. 124

161. Побудуйте графік деякої неперервної функції $y = f(x)$, що задовольняє таку умову:
1°) $f'(x) < 0$ при $x < -1$ і $f'(x) = 0$ при $x > -1$;
2) $f'(x) > 0$ при $|x| > 1$ і $f'(x) < 0$ при $|x| < 1$.

162*. Доведіть, що рівняння $4x^5 + x^3 + 5 = 0$ має єдиний корінь.

163. На рис. 125, а), б) зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть:
1°) інтервали, на яких похідна даної функції додатна;
2°) інтервали, де похідна від'ємна;
3°) точки, в яких похідна дорівнює нулю;
4°) точки екстремуму функції;
5) точки, в яких похідна не існує.



а) б)

Рис. 125

164. Знайдіть точки екстремуму функції:

1°) $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 3$; 2°) $y = x^3 + x^2 - 5x + 4$;

3°) $y = x^4 - x^3 + 7$; 4°) $y = (1 + x)e^x$;

5) $y = \ln x - 3x$; 6) $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$;

7) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$; 8) $y = 2x \cdot \ln x$;

9) $y = \dfrac{x}{4e^x}$.

165. Доведіть, що не має екстремумів функція:

1) $y = \dfrac{5}{3}x^3 + 2x^2 + x + 1$; 2) $y = 2x + \sin x$.

166*. На рис. 126 зображено графік похідної функції $y = g(x)$. Знайдіть:

1) точки екстремуму функції $y = g(x)$;

2) найбільше серед чисел $g(2)$, $g(3)$.

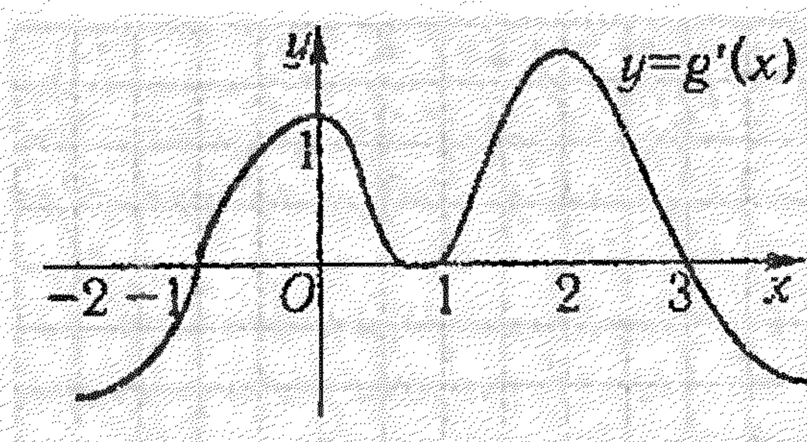


Рис. 126

167. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 3x$; 2) $y = 3x^2 - x^3$; 3) $y = x^2(2 - x)$;

4) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; 5) $y = 2x^4 - 8x$; 6) $y = x^3(3x - 4)$.

168. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x = (t-3)^3(t-1) - 1$, де x — координата, t — час ($t \ge 0$).

1) Побудуйте графік швидкості руху точки.

2) Побудуйте графік закону її руху.

169*. Скільки коренів має рівняння $x^3 - 6x^2 + 9x = 4$?

170°. На рис. 127 зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть її найбільше і найменше значення на проміжку:
1) $[0; 1]$; 2) $[2; 4]$;
3) $[5; 8]$; 4) $[0; 7]$.

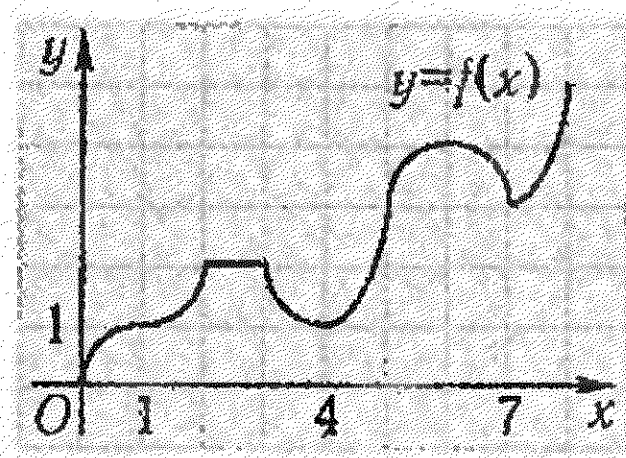
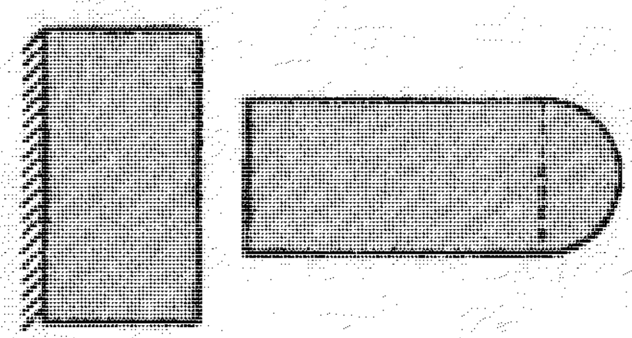


Рис. 127

171. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на даному проміжку:
1°) $y = 3x - 2$, $[-1; 3]$; 2°) $y = 2 - 3x$, $[-1; 3]$;
3°) $y = x^2 - 6x + 8$, $[1; 4]$; 4°) $y = x^2 - 6x + 8$, $[1; 2]$;
5) $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$, $[-4; 4]$; 6) $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$, $[-4; 0]$;
7) $y = \cos x + \sin x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; 8) $y = \operatorname{tg} x + 2x$, $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$;
9*) $y = xe^x$, $[-2; 0]$.

172. Матеріальна точка рухається вздовж координатної прямої за законом $x = -\dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + 2t - 5$, $t \geq 0$. Знайдіть:
1) найбільшу та найменшу координати точки за перші дві секунди руху;
2) найбільшу та найменшу швидкості точки за першу секунду руху.

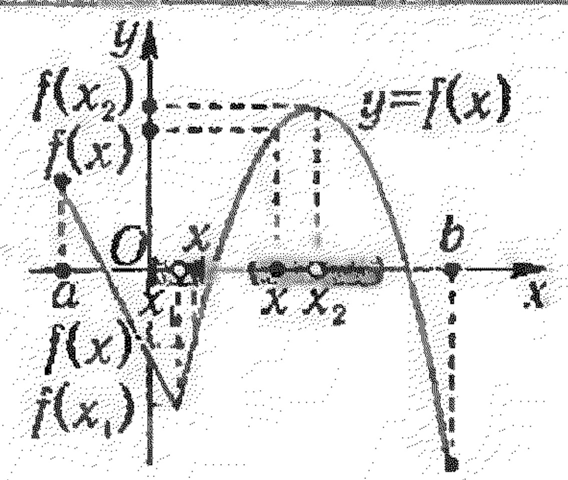
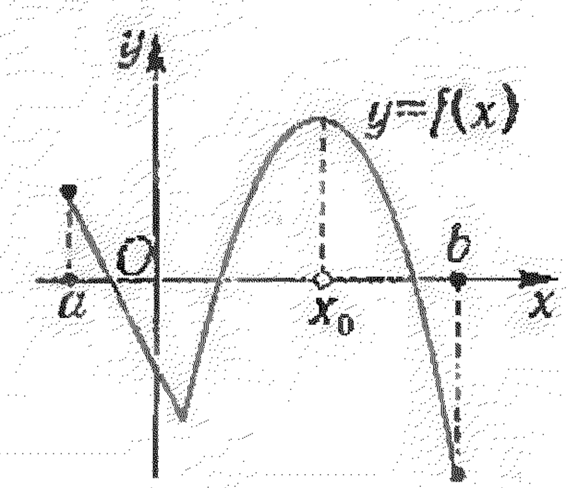
173*. Із наявного матеріалу можна зробити паркан завдовжки 320 м. Визначте:
1) як цим парканом обгородити прямокутну ділянку найбільшої площі, використавши з одного боку стінку будівлі (рис. 128, *а*);
2) як цим парканом обгородити стадіон, що є прямокутним полем з півкруговою областю, приєднаною до однієї з його сторін (рис. 128, *б*), аби площа стадіону була найбільшою?


а) б)
Рис. 128

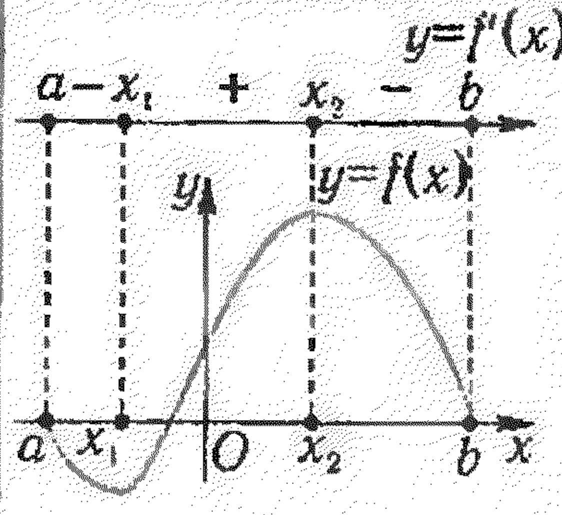
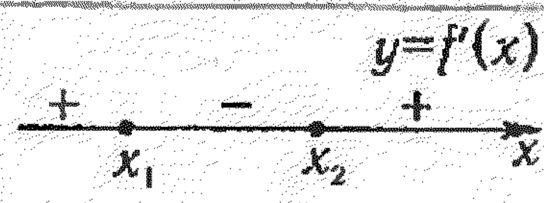
174*. Які мають бути розміри закритої коробки з квадратною основою, якщо об'єм її має дорівнювати V і на її виготовлення необхідно витратити найменшу кількість матеріалу?

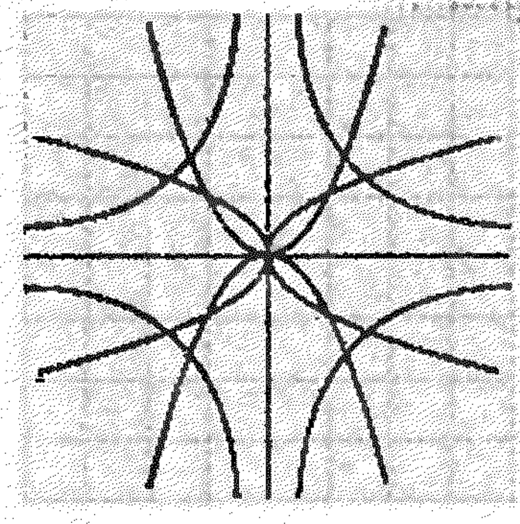
Підсумок

Головні поняття

Означення	Ілюстрація
Точка x_0 ***називається точкою максимуму функції*** $y = f(x)$***, якщо для всіх*** $x \neq x_0$ ***з деякого околу цієї точки виконується нерівність*** $f(x) < f(x_0)$. ***Точка*** x_0 ***називається точкою мінімуму функції*** $y = f(x)$***, якщо для всіх*** $x \neq x_0$ ***з деякого околу цієї точки виконується нерівність*** $f(x) > f(x_0)$.	 Точка x_1 — точка мінімуму функції $y = f(x)$. Точка x_2 — точка максимуму функції $y = f(x)$.
Нехай функція $y = f(x)$ визначена на певному проміжку і x_0 точка з цього проміжку. ***Значення функції*** $y = f(x)$ ***в точці*** x_0 ***називають найбільшим значенням функції на проміжку, якщо воно не менше від будь-якого іншого значення функції на ньому.*** ***Значення функції*** $y = f(x)$ ***в точці*** x_0 ***називають найменшим значенням функції на проміжку, якщо воно не більше від будь-якого іншого значення функції на ньому.***	$f(b)$ — найменше значення функції. $f(x_0)$ — найбільше значення функції. 

Головні твердження

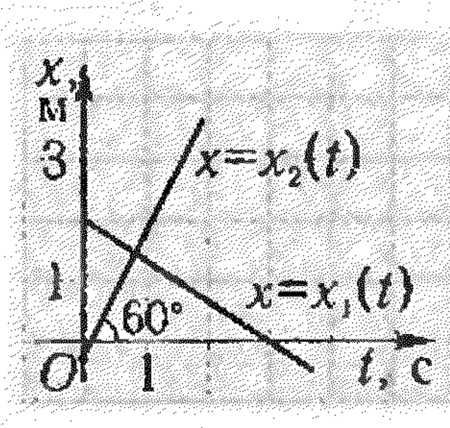
Назва теореми	Формулювання	Ілюстрація
Ознака монотонності функції	**Якщо на деякому інтервалі похідна додатна, то функція зростає на цьому інтервалі, а якщо похідна — від'ємна, то функція спадає на цьому інтервалі.**	
Ознака сталості функції	**Якщо на деякому інтервалі похідна функції тотожно дорівнює нулю, то функція стала на цьому інтервалі.**	
Достатня умова екстремуму диференційовної функції	**Нехай $f'(x_0)=0$.** **1. Якщо $f'(x)>0$ на деякому інтервалі $(a;\ x_0)$ і $f'(x)<0$ на деякому інтервалі $(x_0;\ b)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції.** **2. Якщо $f'(x)<0$ на деякому інтервалі $(a;\ x_0)$ і $f'(x)>0$ на деякому інтервалі $(x_0;\ b)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції.**	 Точка x_1 — точка максимуму функції $y=f(x)$. Точка x_2 — точка мінімуму функції $y=f(x)$.



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Похідна та її застосування»

Завдання для самоконтролю

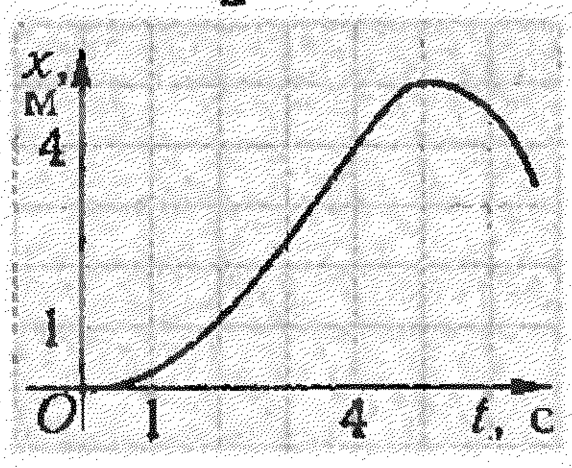
1°. На рисунку зображено графіки законів прямолінійного руху точок: а) $x = x_1(t)$, б) $x = x_2(t)$. Чи рухались точки рівномірно? Якщо рухались рівномірно, то з якими швидкостями?



2°. Яка з наступних величин змінюється рівномірно в залежності від змінної t:

а) $v = \frac{5t}{2}$; б) $s = \frac{5}{2t}$; в) $m = \frac{5t^2}{2}$?

3. На рисунку зображено графік закону прямолінійного руху точки.



а°) В який момент часу: $t_1 = 1$ с чи $t_2 = 4$ с — точка мала більшу швидкість?
б°) В які моменти часу швидкість точки дорівнювала 0?
в) Порівняйте середню швидкість точки на проміжку [0; 5] і миттєву швидкість при $t = 4$.

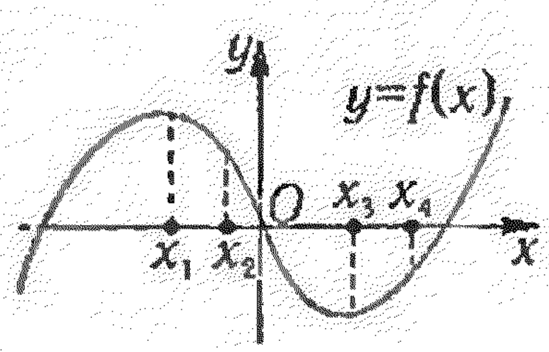
4°. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x = 4$?

5°. Який кут (тупий чи гострий) утворює з віссю x дотична до графіка функції $y = x^2 - 3$ в точці з абсцисою $x = -2$?

6. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 2\sin x$ у точці з абсцисою $x = 0$.

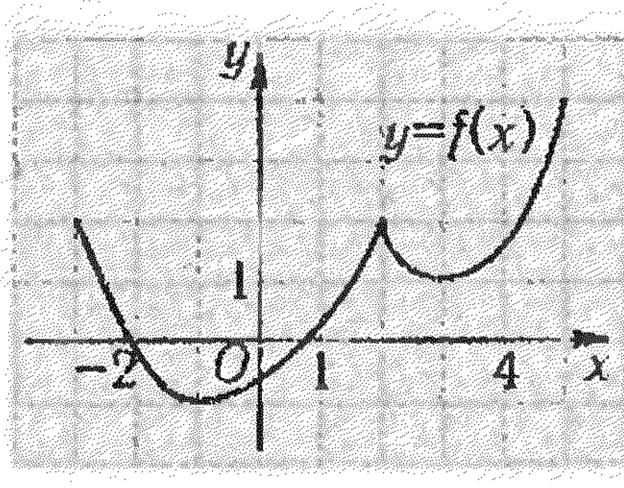
7. Чи існує точка на графіку функції $y = \frac{1}{x}$ така, що дотична до нього в цій точці паралельна: а) осі x; б) прямій $y = x$; в) прямій $y = -x$?

8°. В якій із наведених точок похідна функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку, — від'ємна?



9°. Порівняйте швидкості зміни функції $y = \ln x$ у точках $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$.

10°. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на відрізку $[-3; 5]$. Укажіть:



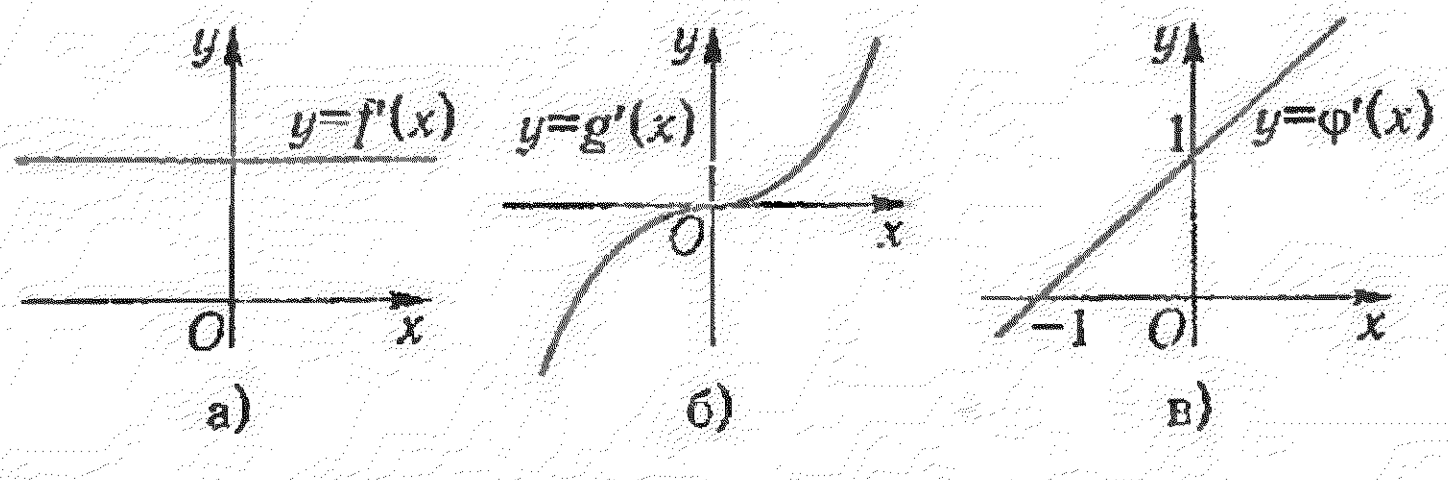
а) точки, де похідна функції дорівнює нулю;
б) точки екстремуму функції;
в) проміжки, на яких похідна функції додатна;
г) найбільше і найменше значення функції в області визначення.

11. Яка з наступних функцій зростає на всій числовій осі:

а) $y = e^x - x$; б) $y = 2 + \sin x$;

в) $y = x^3 + 2x + 1$; г) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$?

12. На рисунку зображено графіки похідних функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$. Яка з цих функцій є зростаючою?

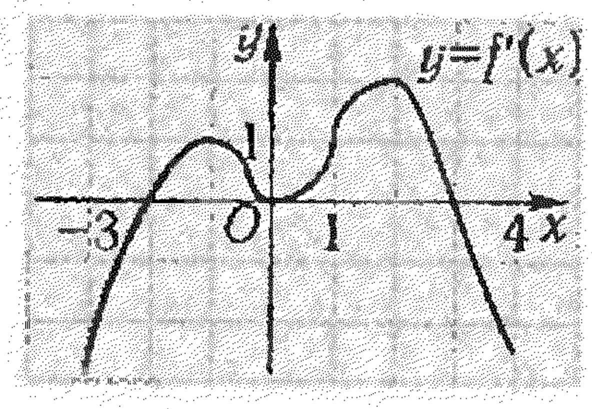


13. Відомо, що $f'(x) = (x + 1)^2(x - 2)$. Вкажіть:
а) проміжки зростання і спадання функції $y = f(x)$;
б) точки екстремуму функції $y = f(x)$.

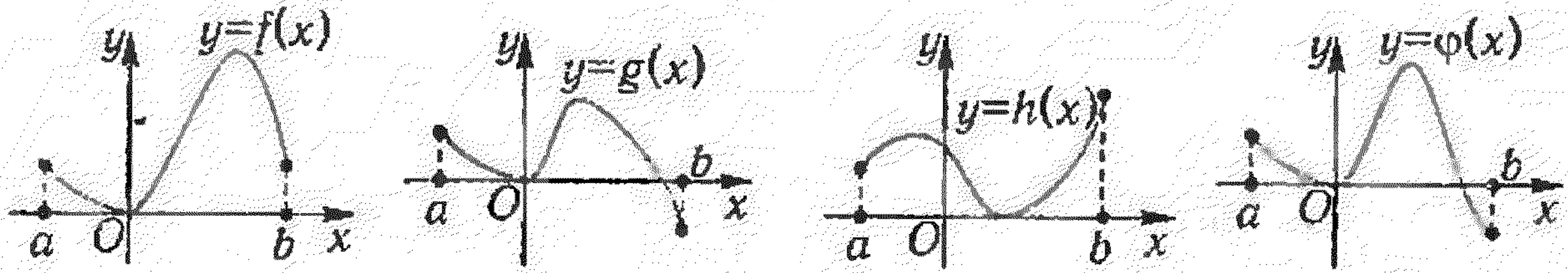
14. На рисунку зображено графік похідної функції $y = f(x)$, яку задано на проміжку $[-3; 4]$. Вкажіть:

а) проміжки зростання і спадання функції $y = f(x)$;

б) точки екстремуму функції $y = f(x)$.



15°. Серед функцій, графіки яких зображено на рисунку, виберіть ту, яка свого найменшого значення набуває в точці мінімуму, а найбільшого — на одному з кінців області визначення.

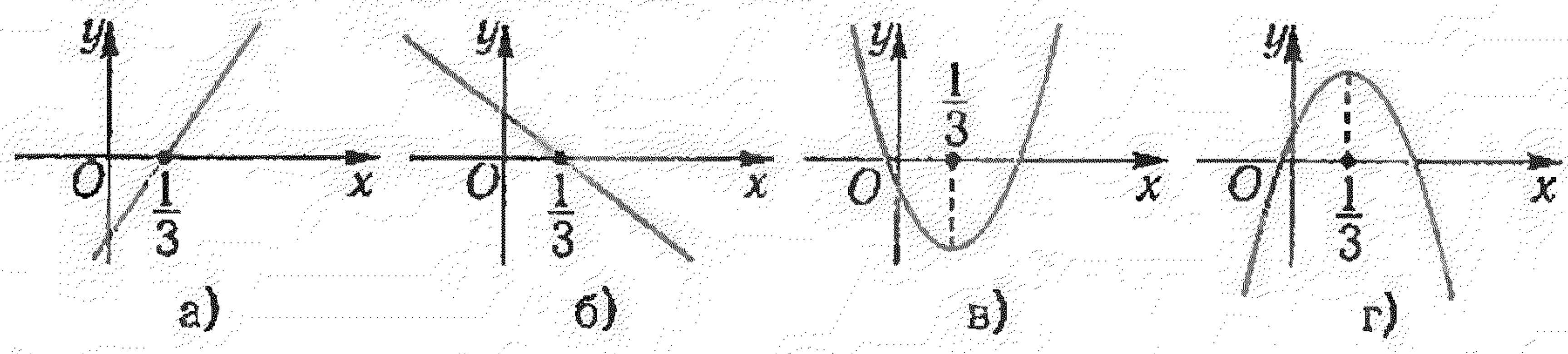


16°. Відомо, що $f'(x) = -3$ при кожному x. У якій точці проміжку $[-2; 1]$ функція $y = f(x)$ набуває найбільшого значення?

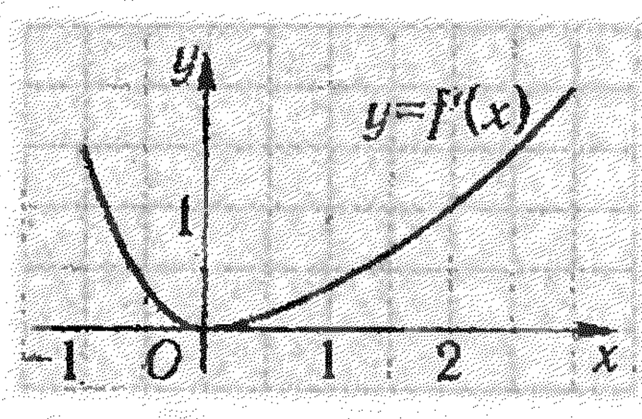
17°. Відомо, що $f'(x) = x(x+2)(x-2)$. В яких точках слід обчислити значення функції $y = f(x)$, щоб знайти її найбільше і найменше значення на проміжку $[-1; 3]$?

18°. Нехай $x = 2t^3 - 6t$ – закон прямолінійного руху точки. Вкажіть найменшу і найбільшу координати точки на проміжку часу $[0; 2]$.

19. Який із графіків, наведених на рисунку, може бути графіком функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = 3x - 1$?



20. Похідну функції $y = f(x)$ зображено на рисунку. Вкажіть найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[-1; 1]$.



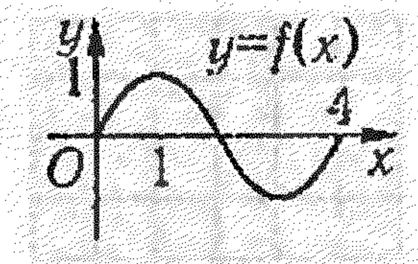
21. Яке з наступних тверджень є неправильним?

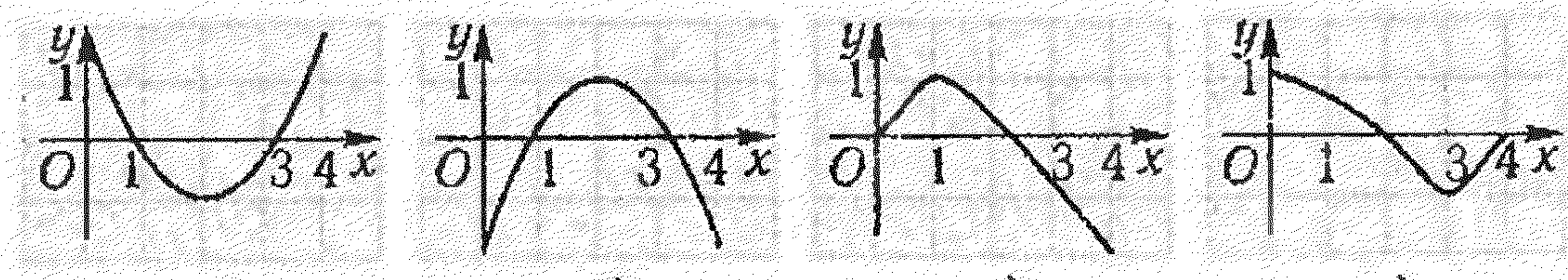
а) Найменше значення функції може і не бути її мінімумом.

б) Найбільшого і найменшого значення функція може набувати тільки у своїх точках екстремуму.

в) Існує функція, в якої збігаються її найбільше і найменше значення.

22* На рисунку справа зображено графік функції $y = f(x)$. На якому з рисунків нижче зображено графік похідної цієї функції?





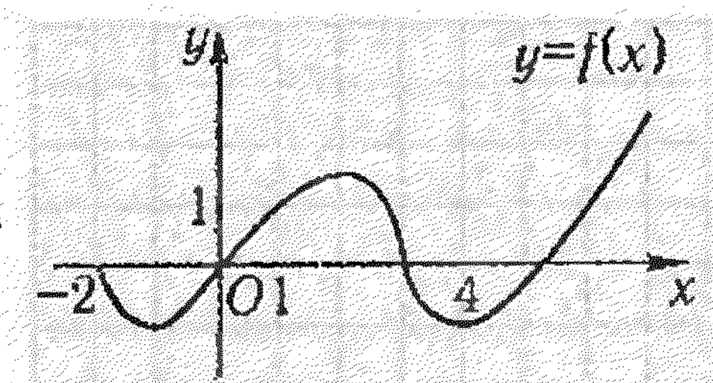
а) б) в) г)

Відповіді до завдань для самоконтролю

1. Обидві точки рухаються рівномірно. $v_1(t) = -\frac{2}{3}$, $v_2(t) = \sqrt{3}$. **2.** а). **3.** а) $t_1 = 4$ с; б) $t = 5$; в) $v(4) > v_{ср}[0; 5]$. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** Тупий. **6.** $y = 2x$. **7.** а) Ні; б) ні; в) в точках з координатами (1; 1) і (−1; −1). **8.** x_2. **9.** $v(2) > v(3)$. **10.** а) $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; б) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; в) $(-1; 2) \cup (3; 5)$; г) найбільше значення функції дорівнює 4, найменше дорівнює −1. **11.** в). **12.** $y = f(x)$. **13.** а) Функція спадає на проміжку $(-\infty; 2]$ і зростає на проміжку $[2; +\infty)$; б) $x = 2$. **14.** а) Функція спадає на кожному з проміжків $[-3; -2]$, $[3; 4]$ і зростає на проміжку $[-2; 3]$; б) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. **15.** $y = h(x)$. **16.** $x = -2$. **17.** $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. **18.** −4; 4. **19.** в). **20.** $f(-1)$. **21.** Неправильним є твердження б). **22.** а).

Зразок контрольної роботи № 3

1. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-2; 7]$. Знайдіть:



1°) в якій з точок: $x_1 = 1$ чи $x_2 = 2$ — функція має більшу швидкість зміни;

2°) точки екстремуму функції;

3°) проміжки, де похідна функції є від'ємною;

4°) найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[0; 7]$;

5) точки, в яких функція $y = f(x)$ недиференційовна;

6) знак числа $(f'(1) - f'(2)) \cdot f'(3)$.

2. Дано функцію $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Знайдіть:

1°) кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці з абсцисою $x = \frac{1}{2}$;

2°) проміжки зростання і спадання функції та її точки екстремуму;

3°) найбільше і найменше значення функції на проміжку [0; 2];

4) рівняння дотичної до графіка функції в точці перетину графіка з віссю ординат.

3. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x = 2\sin t + 1$.

1°) Якою є швидкість точки в момент часу $t = \frac{\pi}{3}$?

2) Вкажіть усі моменти часу, коли точка змінює напрям руху.

3*) Знайдіть прискорення точки в ті моменти часу, коли вона змінює напрям руху.

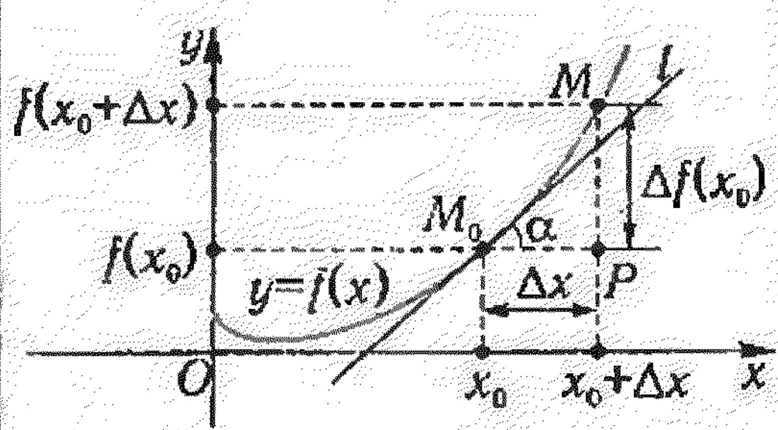
Фізичний зміст похідної

Таблиця 27

Позначення	Зміст
$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	приріст функції $y = f(x)$ у точці x_0, який відповідає приросту аргументу Δx
$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$	середня швидкість зміни функції на проміжку $[x_0; x_0 + \Delta x]$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$	швидкість зміни функції в точці x_0, або похідна функції в точці x_0

Геометричний зміст похідної

Таблиця 28

Позначення	Зміст	Геометрична інтерпретація
$M_0P = \Delta x$	приріст аргументу	
$MP = \Delta f(x_0)$	приріст функції в точці x_0	
l	дотична до графіка функції в точці M_0	
$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$	кутовий коефіцієнт дотичної l	
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	рівняння дотичної до графіка функції в точці M_0	

Правила диференціювання

Таблиця 29

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x),$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$
$$(f(kx+b))' = kf'(u),\ \text{де } u = kx+b.$$

Алгоритм знаходження інтервалів монотонності і точок екстремуму диференційовної функції

Таблиця 30

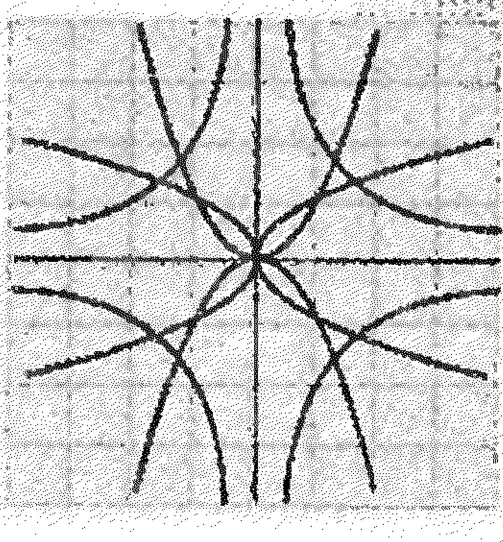
№	Зміст етапу
1	Знайти точки, в яких похідна функції дорівнює нулю.
2	Розбити область визначення функції знайденими точками на інтервали
3	Визначити знак похідної на кожному з одержаних інтервалів
4	Зробити висновок: якщо на інтервалі $f'(x) > 0$, то на цьому інтервалі функція зростає; якщо ж на інтервалі $f'(x) < 0$, то на цьому інтервалі функція спадає.

№	Зміст етапу
5	Перевірити, чи змінює похідна знак у точках, де похідна дорівнює нулю.
6	Якщо в точці похідна змінює знак з + на –, то ця точка є точкою максимуму, якщо змінює знак з – на +, то ця точка є точкою мінімуму.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень диференційовної функції на відрізку

Таблиця 31

№	Зміст етапу
1	Знайти точки, в яких похідна функції дорівнює нулю.
2	Відібрати ті зі знайдених точок, які належать заданому відрізку.
3	Обчислити значення функції в цих точках і на кінцях відрізка.
4	Найбільше з одержаних чисел є найбільшим значенням функції на даному відрізку, найменше — найменшим значенням функції на даному відрізку.



Звернення до читача

Дорогий юний друже!

Перед Вами підручник з предмета «Математика». Його головне призначення — допомогти Вам систематизувати, розширити і поглибити знання й уміння, які необхідні для математичного моделювання та дослідження процесів і явищ за допомогою функцій, рівнянь, похідної, інтеграла, ймовірності та інших математичних об'єктів, опанувати суміжними предметами (фізикою, хімією, біологією тощо). І тим самим упевнитись у могутності математичних методів для пізнання навколишнього світу і розв'язання різних проблем.

Підручник для 11-го класу складається із семи розділів. Кожному розділу передує матеріал, що вивчався раніше і необхідний для вивчення цього розділу. Його подано у вигляді таблиць. Для забезпечення готовності до вивчення матеріалу розділу наводиться діагностичний тест.

Розділи підручника поділено на параграфи, які, в свою чергу, розчленовані на пункти. До кожного пункту подано контрольні запитання, що мають забезпечити активне засвоєння основних понять і фактів пункту в їхньому взаємозв'язку.

Викладення навчального матеріалу в кожному пункті структуроване за рівнями. На першому рівні (його позначено літерою Б) викладаються основні поняття та факти теми, хоча, найчастіше, без формальних доведень. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного.

На другому рівні (його позначено літерою О) наводиться більш повне обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення, наводяться приклади його застосування. Матеріал на цих двох рівнях повністю забезпечує оволодіння предметом згідно з вимогами програми рівня стандарту.

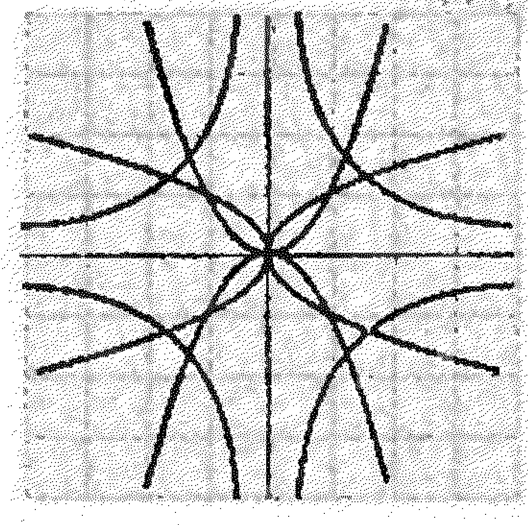
Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач відповідного рівня. Початок і кінець доведень тверджень та розв'язань прикладів позначено знаками □ і ■.

Розділ 4.

ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Даний розділ присвячено одному з основних понять математики — **інтегралу**, походження і розвиток якого тісно пов'язані з розв'язанням багатьох практичних задач, наприклад, з обчисленням площ плоских фігур, знаходженням шляху, пройденого тілом, визначенням роботи з перенесення вантажу тощо.

Якщо за допомогою похідної від координати точки за часом можна визначити швидкість руху точки, то операція інтегрування дасть змогу знайти координату точки за її швидкістю. Так само, якщо сила струму є похідною від заряду за часом, потужність — похідною роботи за часом, то за допомогою інтегрування можна обчислити заряд за даною силою струму, роботу — за відомою потужністю і т. ін.



Готуємось до вивчення теми «Інтеграл та його застосування»

Для підготовки до вивчення теми можна звернутись до розділів 1 і 3, а також використати наведений у вигляді таблиць матеріал.

Таблиця похідних

Таблиця 32

y	c	x^{α}	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$
y'	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$

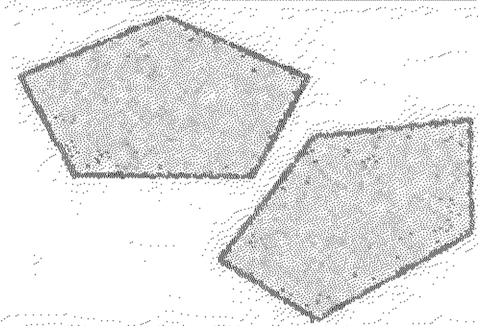
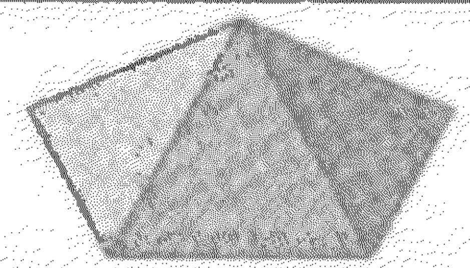
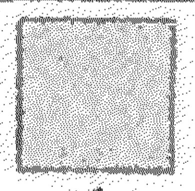
Фізичний зміст похідної

Таблиця 33

Закон зміни величини	Зміст похідної цього закону
$x = x(t)$ — закон руху точки, тобто зміна координати точки залежно від часу	$x'(t) = v(t)$ — залежність швидкості руху точки від часу
$v = v(t)$ — закон зміни швидкості руху точки залежно від часу	$v'(t) = a(t)$ — залежність прискорення точки від часу
$q = q(t)$ — закон зміни заряду, який проходить через поперечний переріз провідника, від часу	$q'(t) = I(t)$ — залежність сили струму від часу
$y = f(t)$ — закон зміни деякої величини з часом	$f'(t)$ — швидкість зміни цієї величини

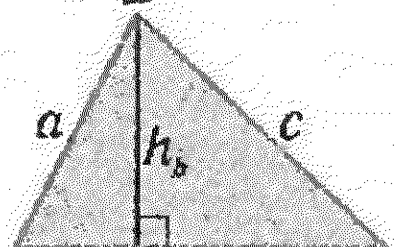
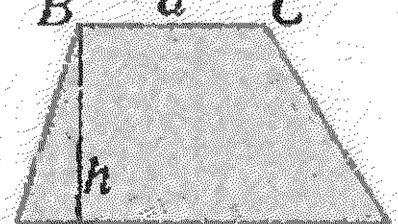
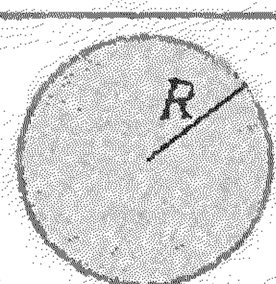
Властивості площ многокутників

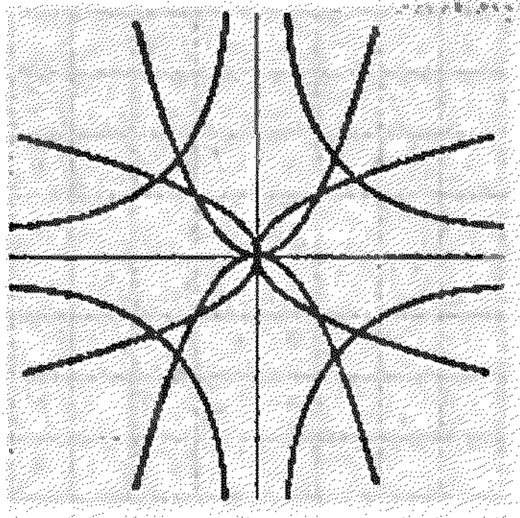
Таблиця 34

Властивість	Ілюстрація
Рівні многокутники мають рівні площі.	
Якщо многокутник складений із кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників.	
Площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці площі.	

Площі плоских фігур

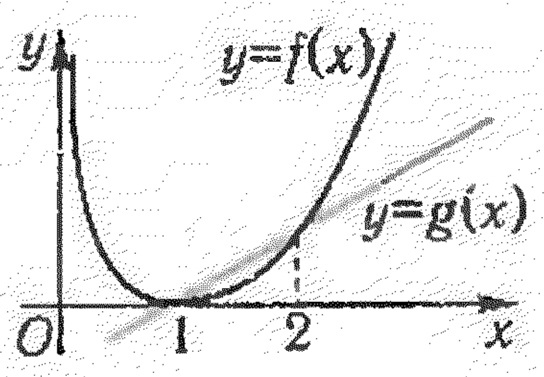
Таблиця 35

Фігура	Ілюстрація	Формула площі
Трикутник		$S=\frac{1}{2}b\cdot h_b,\ S=\frac{1}{2}ab\sin C$
Трапеція		$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$
Круг		$S=\pi R^2$



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Інтеграл та його застосування»

1. Яким є закон прямолінійного рівномірного руху точки, якщо її швидкість дорівнює 2, а координата в початковий момент часу $t = 0$ дорівнює -3?
   А. $x = 3 - 2t$. Б. $x = -2 + 3t$. В. $x = 2 - 3t$. Г. $x = -3 + 2t$.
2. Нерівномірно, залежно від змінної t, змінюється величина ...
   А. $I = I_0 t$. Б. $V = V_0(1 + 0{,}1t)$.
   В. $\rho = \rho_0(t - t_0)$. Г. $A = Nt^2$.
3. Матеріальна точка рухається вздовж координатної прямої за законом $x = -2\sin t + t$, де x — координата точки, t — час ($t \geq 0$). Якою є швидкість точки в момент часу $t = \pi$?
   А. 0. Б. 3. В. -3. Г. -1.
4. При нагріванні тіла його температура змінюється за законом $T = 0{,}5t + 2$, де T — температура, К, t — час, с. З якою швидкістю нагрівається тіло?
   А. 2 К/с. Б. 0,5 К/с. В. $0{,}5t$ К/с.
   Г. Визначити неможливо.
5. Тіло рухається вздовж координатної прямої за законом $x = \frac{1}{2}t^2 - 4t + 5$. В який момент часу його швидкість дорівнює нулю?
   А. $t = 2$. Б. $t = \frac{1}{2}$. В. $t = 4$. Г. $t = 1$.
6. На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Швидкість зміни якої з цих функцій більша в точці $x = 2$?
   А. $y = f(x)$. Б. $y = g(x)$.
   В. Однакова. Г. Визначити неможливо.



7. Яка з функцій $f(x) = 2x$ чи $g(x) = x^2$ має більшу швидкість зміни в точці $x = \frac{1}{2}$?

А. $y = f(x)$. Б. $y = g(x)$.

В. Мають однакові швидкості. Г. Визначити неможливо.

8. Серед наведених функцій укажіть функцію, похідна якої дорівнює похідній функції $y = f(x)$, якщо C — довільне число.

А. $y = C \cdot f(x)$. Б. $y = -f(x)$. В. $y = f(x) + C$. Г. $y = \frac{f(x)}{C}$.

9. Скільки функцій мають ту саму похідну?

А. Одна. Б. Дві. В. Три. Г. Безліч.

10. Якщо на деякому проміжку похідна тотожно дорівнює нулю, то...

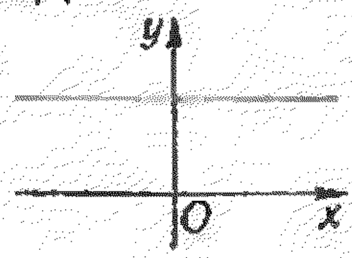
А. функція зростає на цьому проміжку.

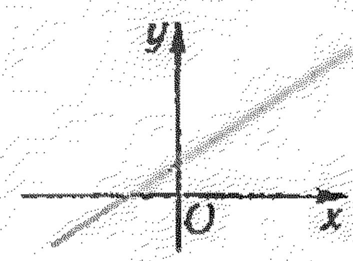
Б. функція спадає на цьому проміжку.

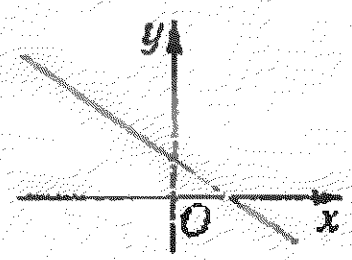
В. функція є сталою на цьому проміжку.

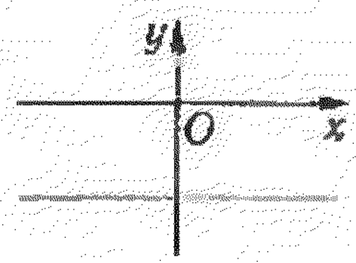
Г. про поведінку функції нічого певного сказати не можна.

11. Функція буде зростаючою, якщо графік її похідної має вигляд ...

А. 

Б. 

В. 

Г. 

12*. Похідною якої фізичної величини є швидкість руху?

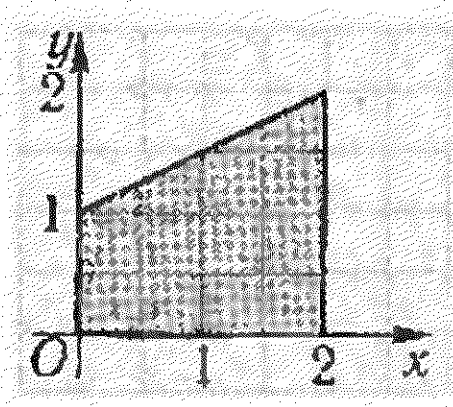
А. Закону руху. Б. Часу. В. Прискорення руху.

Г. Величини, яка відрізняється від наведених.

13*. Похідною якої фізичної величини є прискорення руху?

А. Закону руху. Б. Часу. В. Швидкості руху.

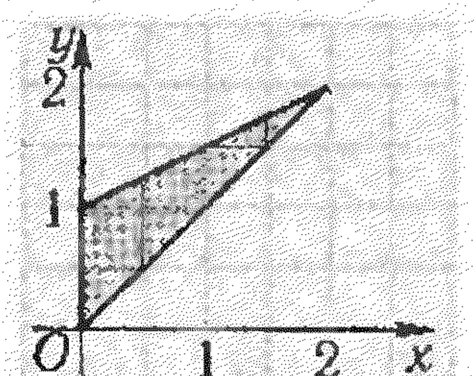
Г. Величини, яка відрізняється від наведених.



14. Чому дорівнює площа фігури, затушованої на рисунку?

А. 1. Б. 2. В. 3.

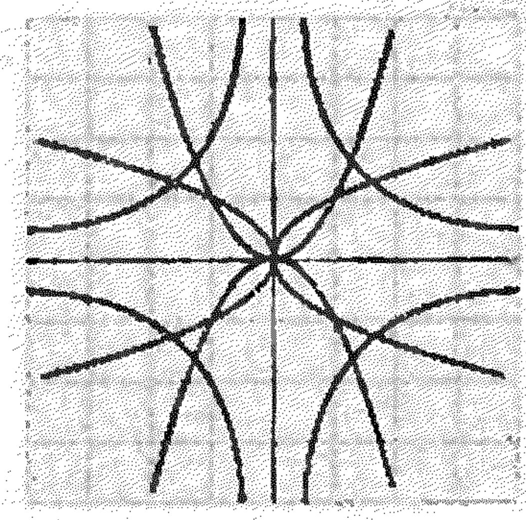
Г. Відповідь відрізняється від наведених.



15. Чому дорівнює площа фігури, затушованої на рисунку?

А. 1. Б. 2. В. 3.

Г. Відповідь відрізняється від наведених.



§ 9. Первісна

За допомогою похідної у попередньому розділі знаходили швидкість руху тіла за законом його руху, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої за рівнянням кривої. Однак нерідко доводиться розв'язувати обернені задачі: за відомою швидкістю знайти закон руху тіла, за кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої — рівняння самої кривої і т. ін. Розв'язування кожної із сформульованих задач зводиться до знаходження функції за її похідною. Даний параграф присвячено розгляду цієї узагальненої задачі.

1. Первісна функція та її головна властивість

Б

Знаходження функції за її похідною називається ***інтегруванням***. Інтегрування — дія, обернена до диференціювання. Розглянемо одну із задач, яку розв'язують за допомогою операції інтегрування.

Припустимо, що матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж координатної прямої зі швидкістю $v = 3t$. Потрібно знайти закон її руху $x = x(t)$, тобто залежність її координати від часу. Відомо, що $v(t) = x'(t)$. Таким чином, необхідно знайти функцію, похідна якої дорівнює $3t$. Неважко побачити, що такою функцією є функція $x(t) = \frac{3t^2}{2}$, бо $x'(t) = \frac{6t}{2} = 3t$. Проте задачу розв'язано не повністю: будь-яка функція, що має вигляд $x(t) = \frac{3t^2}{2} + C$, де C — довільна стала, також може бути шуканим законом руху (перевірте!). Щоб уточнити ситуацію, слід задати додаткові умови (їх ще називають початковими умовами). Наприклад, указують координату рухомої точки в якийсь момент часу. Припустимо, що в момент часу $t = 0$ точка мала координату 1, тобто $x(0) = 1$. Тоді для знаходження сталої C маємо рівняння: $x(0)=\frac{3\cdot 0}{2}+C=1, C=1.$

Тепер закон руху визначено однозначно: $x(t)=\frac{3t^2}{2}+1.$

Отже, знаючи похідну $x'(t)=v(t)$ функції $x(t)$, ми знайшли саму функцію. Функцію $x = x(t)$ називають ***первісною*** для функції $v = v(t)$.

Узагальнимо вищесказане.

Функція $y = F(x)$ називається первісною для функції $y = f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку виконується співвідношення

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $y=\cos x$ — первісна для функції $y=-\sin x$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, оскільки $(\cos x)'=-\sin x$ для всіх x з цього інтервалу.

Функція $F(x)=\sqrt{x}$ — первісна для функції $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на інтервалі $(0;+\infty)$, однак вона не є первісною цієї функції на проміжку $[0;+\infty)$, оскільки співвідношення $F'(x)=f(x)$ не виконується при $x=0$.

Задача, розв'язана на початку даного пункту, показує, що функція, яка має первісну, власне, має їх безліч. Справді, якщо $y=F(x)$ — первісна для функції $y=f(x)$, то всі функції вигляду $y=F(x)+C$, де C — довільна стала, є також первісними для $y=f(x)$. Це можна перевірити безпосереднім обчисленням, використовуючи означення первісної функції.

Крім того, якщо $y=F_1(x)$ і $y=F_2(x)$ є двома первісними для функції $y=f(x)$, то вони відрізняються на деяку сталу. Справді, похідна функції $y=F_1(x)-F_2(x)$ дорівнює нулю:

$$(F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Нагадаємо, що коли похідна функції дорівнює нулю на деякому проміжку, то ця функція є сталою на цьому проміжку. Тобто $F_1(x)-F_2(x)=C$. Цим доведено ***основну властивість первісних***, яку сформулюємо нижче.

Теорема.

Якщо $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$ на деякому проміжку, то існує безліч первісних для функції $y = f(x)$ на цьому проміжку й усі вони мають вигляд:

$$y = F(x) + C,$$

де C — довільна стала.

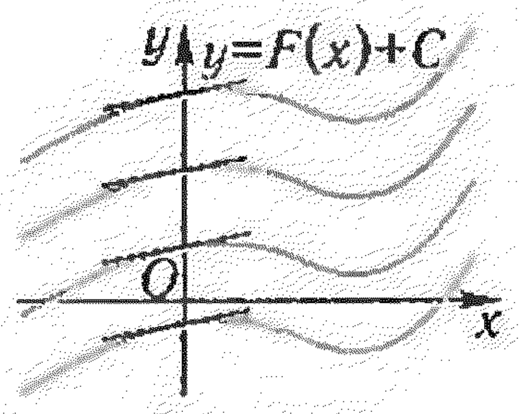


Рис. 129

Основна властивість первісних має простий геометричний зміст: графіки будь-яких двох первісних для даної функції можна отримати один з одного шляхом паралельного перенесення вздовж осі ординат (рис. 129).

Ми вже бачили, що для виділення із множини всіх первісних якоїсь однієї необхідно задати початкові умови, що визначаються координатами рухомої точки у деякий момент часу або координатами точки, через яку має проходити графік шуканої первісної.

Приклад 1. Для функції $y = \cos x$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$.

□ Легко помітити, що первісними для функції $y = \cos x$ будуть функції $F(x) = \sin x + C$, бо $(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x$. Серед цих первісних знайдемо ту, графік якої проходить через точку A, тобто для якої справджується умова: $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$. Для знаходження сталої C маємо рівняння: $\sin\frac{\pi}{6} + C = 1$. Звідси $\frac{1}{2} + C = 1, C = \frac{1}{2}$.

Отже, шукана первісна має такий вигляд: $y = \sin x + \frac{1}{2}$. ■

Відповідь. $y = \sin x + \frac{1}{2}$.

Для подальшої роботи доцільно, на основі таблиці похідних, скласти таблицю первісних для елементарних функцій на області їхнього визначення.

$y = f(x)$	0	1	x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = F(x)$	C	$x + C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\sqrt{x} + C$

$y = f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
$y = F(x)$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Перевіримо деякі з наведених формул. Наприклад, функція $y = \mathrm{tg}\, x$ — одна з первісних для функції $\frac{1}{\cos^2 x}$, бо $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Правильність інших формул для первісних перевірте самостійно.

Поняття первісної для функції має широке застосування. Воно використовується там, де за швидкістю зміни величини треба відновити закон зміни самої величини. Наприклад, за швидкістю прямолінійного руху точки потрібно встановити закон руху, за швидкістю зміни концентрації речовини — закон зміни концентрації, за швидкістю зміни біомаси популяції — закон зміни біомаси тощо. Розв'язання цих задач зводиться до пошуку первісної, яка задовольняє початкові умови.

Розглянемо детальніше застосування первісних у механіці.

Нехай матеріальна точка масою m рухається прямолінійно за законом $x = x(t)$ під дією сили $F(t)$, напрям дії якої збігається з напрямом руху. Такий рух, як відомо, описується другим законом Ньютона: $ma = F$, де a — прискорення руху: $a = \frac{dv}{dt}$. За допомогою похідної цей закон можна записати у такому вигляді: $m \cdot \frac{dv}{di} = F(t)$ або $\frac{dv}{di} = \frac{F(t)}{m}$. Звідси можна відновити закон її руху.

1. Закон інерції. Нехай матеріальна точка масою m рухається по прямій і на неї не діє сила, тобто $F(t) = 0$. Згідно з другим законом Ньютона її рух описують рівнянням

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = 0 \text{, або } \frac{dv}{dt} = 0.$$

Звідси знаходимо, що $v = \text{const}$, тобто швидкість руху — величина стала.

Це і є закон інерції, який стверджує, що ***тіло, на яке не діє сила, перебуває у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.***

2. Вертикальний рух під дією сили тяжіння. Нехай тіло масою m кинуто вгору чи вниз з висоти h_0 із швидкістю v_0. Знайдемо залежність швидкості і висоти від часу.

Спрямуємо вісь h вертикально вгору. Як відомо, на тіло діє сила тяжіння $F = -mg$, де $g \approx 9{,}8$ м/с² — прискорення вільного падіння. Тоді, згідно з другим законом Ньютона, рівняння руху має такий вигляд:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -mg \text{, або } \frac{dv}{dt} = -g.$$

Звідси $v(t) = -gt + C$, де C — деяка стала. Для того, щоб знайти її, скористаємося початковими даними: $v(0) = v_0$, тобто $v(t) = -gt + v_0$.

Тепер знайдемо залежність висоти $h(t)$, на якій знаходиться тіло, від часу. Оскільки $h'(t) = v(t)$, то функція $h(t)$ є первісною для функції $v(t) = -gt + v_0$. Таким чином, $h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + C$. Для знаходження сталої C використаємо початкову умову: $h(0) = h_0$. Тому:

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0.$$

Розглянемо окремий випадок руху, коли тіло кинули вертикально вгору з поверхні землі, тобто $v_0 > 0$, $h_0 = 0$. Тоді

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t.$$

Графіком руху є частина параболи, яка зображена на рис. 130.

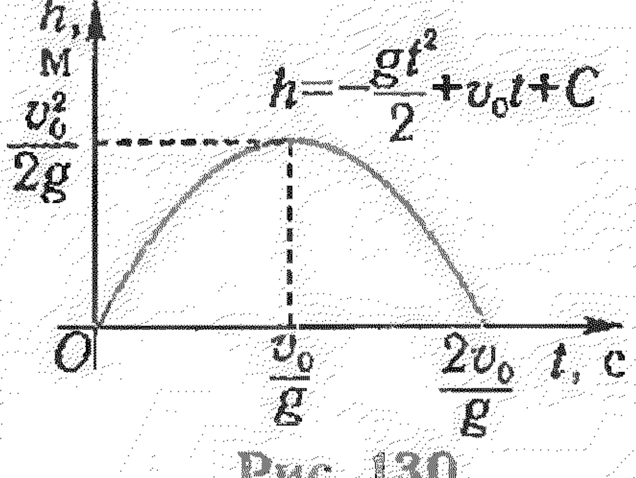


Рис. 130

Контрольні запитання

1°. Чи може функція мати одну первісну на деякому проміжку?

2°. Чи можуть перетинатися графіки первісних для тієї самої функції?

3°. Серед функцій, наведених нижче, виберіть ті, які є первісними для однієї функції:

а) $y = x^2$; б) $y = (x-1)^2$; в) $y = x^2 + 1$; г) $y = 2x^2$.

4°. Чи правильно, що первісна для довільної степеневої функції є степеневою функцією?

5. Нехай $y = F_1(x)$ і $y = F_2(x)$ – дві первісні для однієї функції $y = f(x)$. Відомо, що $F_1(1) = 3$, $F_1(3) = 1$, $F_2(1) = 5$. Чому дорівнює $F_2(3)$?

6°. Який вигляд має первісна для функції $y = \sin x$, графік якої проходить через точку $A(0;\ 0)$?

7. Нехай $y = F_1(x)$ і $y = F_2(x)$ – дві первісні для однієї функції $y = f(x)$. Який вигляд має графік функції $y = F_2(x) - F_1(x)$?

8*. На рис. 131 зображено графік первісної $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$. Укажіть: 1) нулі функції $y = f(x)$; 2) проміжки, на яких функція $y = f(x)$ набуває додатних значень.

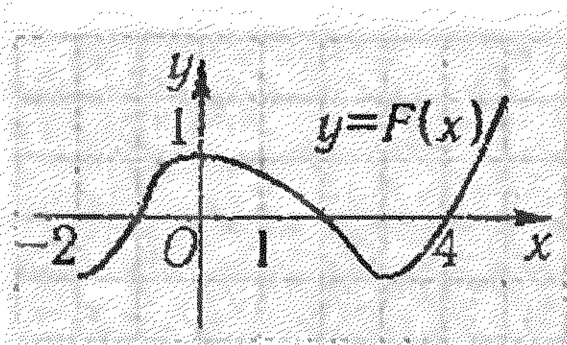


Рис. 131

9*. Первісна для функції $y = f(x)$ є зростаючою функцією. Яку властивість має функція $y = f(x)$?

2. Правила знаходження первісної

Одне з основних завдань інтегрального числення — знаходження для даної функції всіх її первісних, якщо вони існують. При знаходженні первісних користуються не лише табличними формулами, а й деякими правилами інтегрування. Ці правила дуже нагадують правила диференціювання (це і не дивно, адже операція інтегрування обернена до операції диференціювання). Відомо, що похідна суми диференційовних функцій дорівнює сумі похідних цих функцій. Ця властивість породжує відповідну властивість первісних.

Властивість 1. Якщо $y = F(x)$, $y = G(x)$ — первісні для функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ на деякому проміжку, то $y = F(x) + G(x)$ є первісною для функції $y = f(x) + g(x)$ на цьому проміжку.

Інакше кажучи, первісна для суми двох функцій дорівнює сумі первісних для цих функцій.

☐ Ця властивість безпосередньо випливає із означення первісної і відомих правил диференціювання. Справді, оскільки $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, то

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \blacksquare$$

Властивість 2. Якщо $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$ на деякому проміжку і k — стала, то $y = kF(x)$ є первісною для функції $y = kf(x)$ на заданому проміжку.

☐ Справді, якщо $F'(x) = f(x)$, то $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. ■

Приклад 2. Знайти первісні для функції $y = 3\sin x + \frac{1}{x}$ на інтервалі $(0; +\infty)$.

☐ Оскільки функція $y = -\cos x$ — первісна для функції $y = \sin x$, то, згідно з властивістю 2, функція $y = -3\cos x$ — первісна для $y = 3\sin x$. Первісна для функції $y = \frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$ — функція $y = \ln x$, тому первісними для $y = 3\sin x + \frac{1}{x}$ є функції вигляду $y = -3\cos x + \ln x + C$ (див. властивість 1). ■

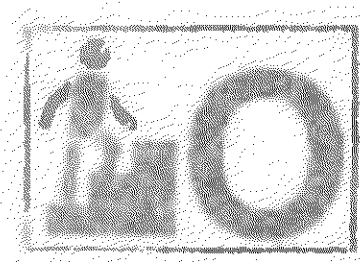
Відповідь. $y = -3\cos x + \ln x + C$.

Приклад 3. Знайти первісні для функції $f(x) = x^2 - 3x + 1$, графіки яких проходять, відповідно, через точки $A(0; -1)$ і $B\left(1; \frac{1}{3}\right)$. За допомогою якого перетворення можна отримати графік другої первісної із графіка першої первісної?

☐ Первісні для функції $y = f(x)$ мають вигляд: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + C$. Знайдемо первісну, що проходить через точку $A(0; -1)$. Для знаходження C маємо рівняння $-1 = \frac{0}{3} - \frac{0}{2} + 0 + C$, тобто $C = -1$. Отже, $F_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x - 1$. Знайдемо первісну, графік якої проходить через точку $B\left(1; \frac{1}{3}\right)$. Для знаходження C маємо рівняння $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 + C$, тобто $C = \frac{1}{2}$ і $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

Графік функції $y = F_2(x)$ можна отримати із графіка функції $y = F_1(x)$ шляхом паралельного перенесення на $\frac{3}{2}$ одиниці у напрямі осі y. ■

Відповідь. $F_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x - 1$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.



Ми знаємо, що похідна функції $y = f(kx+b)$ знаходиться за формулою $y'(x) = k \cdot f'(u)$, де $u = kx + b$. Використовуючи цю формулу, отримаємо ще одну властивість первісної.

Властивість 3. Якщо $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$, то $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для функції $y = f(kx+b)$, де $k \neq 0$, b — деякі сталі.

□ Справді, якщо $F'(x) = f(x)$, то, за правилом диференціювання функції $y = F(u)$, де $u = kx + b$, маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}(F(kx+b))' = \frac{1}{k} \cdot k \cdot F'(u) = f(u) = f(kx+b).\ ■$$

З цієї властивості випливає правило знаходження первісної для функції $y = f(kx + b)$:

1) знайти первісну $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$;
2) у виразі для функції $y = F(x)$ аргумент x замінити лінійним виразом $kx + b$;
3) отриманий вираз помножити на $\frac{1}{k}$.

Приклад 4. Знайти первісні для функції $y = (3x+1)^7$.

□ 1) Для функції $y = x^7$ первісною є функція $y = \frac{x^8}{8}$.

2) Замінимо у виразі для первісної аргумент x на лінійний вираз $(3x + 1)$: $y = \frac{(3x+1)^8}{8}$.

3) Помножимо отриманий вираз на $\frac{1}{3}$: $y = \frac{1}{24}(3x+1)^8$. Функція $y = \frac{1}{24}(3x+1)^8$ є однією з первісних для функції $y = (3x+1)^7$. За

основною властивістю первісних, шукані первісні мають вигляд: $y=\frac{1}{24}(3x+1)^8+C$. ■

Відповідь. $y=\frac{1}{24}(3x+1)^8+C$.

Приклад 5. Знайти первісні для функції $y=\frac{1}{\cos^2(5x-4)}$.

□ Для функції $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ первісною є функція $y=\operatorname{tg}x$, тому, згідно з властивістю 3 і основною властивістю первісних, шукані первісні для даної функції мають вигляд $y=\frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x-4)+C$. ■

Відповідь. $y=\frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x-4)+C$.

Контрольні запитання

1°. Відомо, що $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$. Укажіть первісні для функції:

а) $y = f(x) + 1$; б) $y = -f(x)$; в) $y=\frac{f(x)}{2}$; г*) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$.

2°. Матеріальна точка рухається нерівномірно, її швидкість змінюється за лінійним законом. Яким є закон руху точки?

3. Функції $y = F(x)$ і $y = G(x)$ є первісними відповідно для функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, причому $F(1) = 4$ і $G(1) = -4$. Якою є первісна для функції $y = f(x) + g(x)$, графік якої проходить через точку $A(1; 2)$?

4*. Матеріальна точка здійснює гармонічне коливання вздовж прямої зі швидкістю $v=3\sin(2t-1)$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. Чому дорівнює амплітуда коливання точки?

Задачі

175°. Доведіть, що функція $y=F(x)$ є первісною для функції $y=f(x)$ на заданому проміжку, якщо:

1) $F(x) = 9x^2 - 2x + 1$, $f(x) = 2(9x - 1)$, $-\infty < x < +\infty$;

2) $F(x) = 3\sqrt[3]{x}+5$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $0 < x < +\infty$;

3) $F(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $1<x<+\infty$;

4) $F(x)=xe^x$, $f(x)=(1+x)e^x$, $-\infty<x<+\infty$;

5) $F(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

176°. Знайдіть первісні для функції:

1) $y=5$; 2) $y=x^7$; 3) $y=x^{-3}$; 4) $y=\dfrac{1}{x^2}$;

5) $y=\dfrac{1}{x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 8) $y=x\sqrt{x}$;

9) $y=3^x$; 10) $y=3^{-x}$; 11) $y=e^x$.

177°. За графіком однієї з первісних $y=F(x)$ для деякої функції (рис. 132) відновіть усю множину первісних для цієї функції.

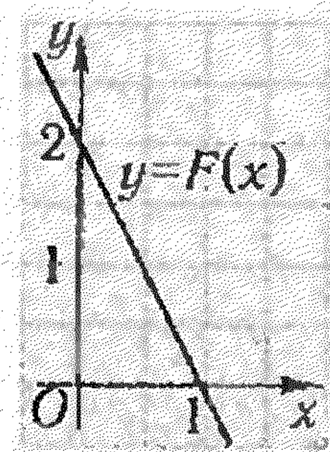


Рис. 132

178°. Знайдіть функцію $y=g(x)$, графік якої проходить через точку M, якщо:

1°) $g'(x)=1$; $M(1;1)$;

2°) $g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $M\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$; 3°) $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $M(9;-2)$;

4°) $g'(x)=e^x$; $M(\ln 3;0)$; 5) $g'(x)=\dfrac{1}{x}$; $M(-1;2)$.

179°. Знайдіть рівняння лінії, що проходить через точку A (1; –1), якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї в точці з абсцисою x дорівнює: 1) $\dfrac{1}{x^2}$; 2) $\dfrac{1}{x}$.

180°. Точка рухається вздовж осі абсцис так, що її швидкість v у довільний момент часу t задається формулою $v=t^2$. Знайдіть закон руху точки, якщо:

1) в момент часу $t=0$ точка знаходилась у початку координат;

2) в момент часу $t=1$ координата точки дорівнювала $-\dfrac{2}{3}$.

181. Точка рухається вздовж координатної прямої зі швидкістк $v=\sin t$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. Знайдіть коорди-

нату точки в момент часу $t=\frac{\pi}{2}$, якщо в момент часу $t=\pi$ вона знаходилась у початку координат.

182. Графік однієї з первісних для функції $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ проходить через точку $A(4;\ 1)$, а іншої — через точку $B\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$. Графік якої з первісних розташований вище від іншого? За допомогою якого перетворення можна отримати графік першої первісної із графіка другої?

183. Знайдіть первісні для функції:

1°) $y=\frac{u^2}{2}-3u+5$;
2°) $y=\frac{1}{x^2}-2\sqrt{x}$;
3) $y=t\sqrt[3]{t}+1$;
4°) $y=\frac{\cos x}{5}+\frac{5}{\cos^2 x}$;
5°) $y=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-1$;
6°) $y=\frac{e^x+\cos x}{3}$;
7°) $y=4x(x^2-1)$;
8°) $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$;
9°) $y=-4\cos x+5\sin x+0{,}3$;
10) $y=\frac{x^2+x-2}{x}$;
11) $y=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$;
12) $y=2^x(1{,}5^x+2^{-x})$;
13*) $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$;
14*) $y=\sqrt{2x+1}$;
15*) $y=e^{\frac{1-x}{2}}$;
16*) $y=(5x+4)^6$.

184. Знайдіть первісну для функції $y=f(x)$, графік якої проходить через точку M, якщо:

1°) $f(x)=3\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$, $M(1;-1)$;
2°) $f(x)=\frac{3}{\sin^2 x}$, $M\left(-\frac{\pi}{4};3\right)$;
3°) $f(x)=2x-5e^x$, $M(0;\ 2)$;
4°) $f(x)=1-\sin x$, $M\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$;
5°) $y=3x^2-\frac{1}{x}$, $M(e;\ e^3)$;
6) $f(x)=\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}$, $M(0;\ -3)$;

7) $f(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $M(\pi; 0)$.

185. Знайдіть функцію $y = 3f(x) + 2g(x)$, графік якої проходить через точку $A(0; 1)$, якщо:

1) $f'(x) = \frac{1}{3}$, $g'(x) = -\frac{1}{2}$; 2) $f'(x) = \frac{1}{3}$, $g'(x) = \frac{1}{2}$.

186*. Знайдіть первісну для функції $y = 2 - 3x$, найменше значення якої на проміжку $[0; 1]$ дорівнює 5.

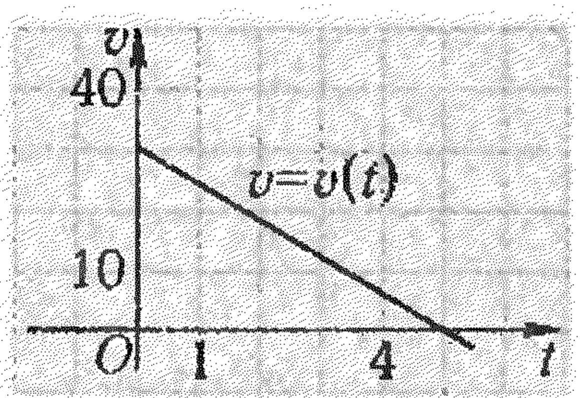
187. Матеріальна точка рухається вздовж координатної прямої зі швидкістю $v = v(t)$. Знайдіть закон її руху, якщо:

1°) $v = t^2 - 3t + 2$ і в початковий момент часу ($t = 0$) точка знаходилась у початку координат;

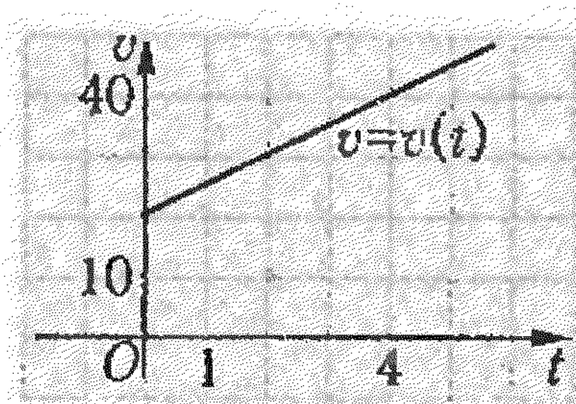
2°) $v = 1 + 3\sin t$ і в момент часу $t = \frac{3\pi}{2}$ координата точки дорівнювала $-\frac{\pi}{2}$;

3) $v = \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$ і при $t = \frac{\pi}{4}$ координата точки дорівнювала 2.

188. Матеріальна точка рухається вздовж координатної прямої зі швидкістю $v = v(t)$, графік якої зображено на: 1) рис. 133, а); 2) рис. 133, б). Знайдіть закон руху точки, якщо у початковий момент часу ($t = 0$) вона мала координату, що дорівнювала -1.



а)



б)

Рис. 133

189. Знайдіть рівняння лінії, що проходить через точку A, якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї в точці з абсцисою x дорівнює:

1°) $2x - \frac{1}{x}$ і $A(1; 5)$; 2°) $\sqrt{x} + e^x$ і $A(1; e)$; 3) $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ і $A(0; 1)$.

190*. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням $a = \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$. Знайдіть:

а) швидкість точки, якщо її початкова швидкість дорівнювала нулю;

б) закон руху точки, якщо у початковий момент часу вона мала координату $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Вправи для повторення

191. Знайдіть приріст функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 2$; 2) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -2$.

192. Для функції $y = \cos x$ знайдіть дві довільні первісні і порівняйте їхні прирости на проміжку:

1) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; 2) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $[x_1; x_2]$.

193. Швидкість тіла, що рухається вздовж координатної прямої, змінюється за законом $v = 2t + 1$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. Знайдіть прискорення руху тіла.

194. Зобразіть фігуру, обмежену лініями:

1) $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ і $y = 0$; 2) $y = 1 - x^2$ і $y = 0$;

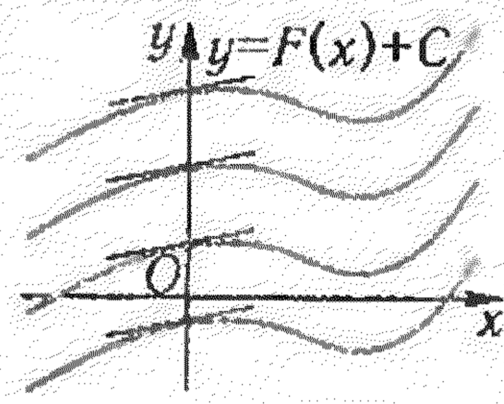
3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

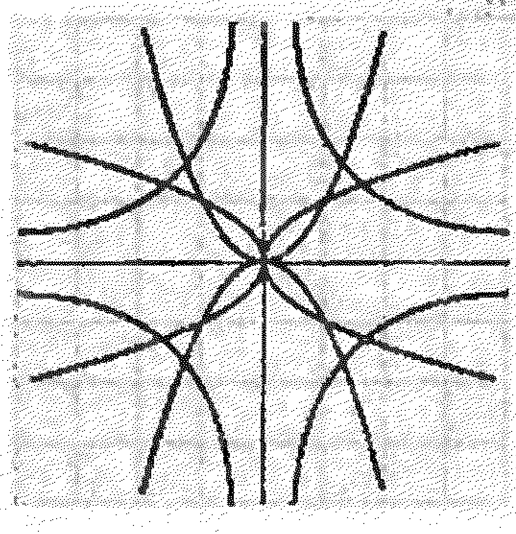
Підсумок

Головне поняття

Означення	Застосування
Функція $y = F(x)$ називається первісною для функції $y = f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку виконується співвідношення $$F'(x) = f(x).$$	Знаходження закону руху за швидкістю; швидкості — за прискоренням.

Головні твердження

Назва твердження	Формулювання, геометрична інтерпретація
Головна властивість первісної	Якщо $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$ на деякому проміжку, то існує безліч первісних для функції $y = f(x)$ на цьому проміжку й усі вони мають вигляд: $$y = F(x) + C,$$ де C — довільна стала. 
Правила знаходження первісної	1) Первісна для суми двох функцій дорівнює сумі первісних для цих функцій. 2) Сталий множник можна «виносити за знак первісної». 3) Якщо $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$, то $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для функції $y = f(kx+b)$, де $k \neq 0$, b — деякі сталі.



§10. Інтеграл

У цьому параграфі розглядається одне з основних понять математики — інтеграл, вивчаються його властивості, методи обчислення і деякі застосування в геометрії та у фізиці.

1. Фізичний і геометричний зміст інтеграла

Розв'язання багатьох прикладних задач зводиться до знаходження приросту первісної для заданої функції на деякому проміжку.

Розглянемо задачу про знаходження переміщення матеріальної точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$, за проміжок часу $[t_0; T]$.

Ми знаємо, що коли $x = x(t)$ — закон руху матеріальної точки, тобто залежність її координати від часу, то $x'(t) = v(t)$. Це означає, що функція $x = x(t)$ — одна з первісних для функції $v = v(t)$. Переміщення точки за проміжок часу $[t_0; T]$ дорівнює різниці її координат у моменти часу T і t_0, тобто $x(T) - x(t_0)$. Отже, **переміщення точки дорівнює приросту первісної для функції $v = v(t)$ на проміжку $[t_0; T]$.**

Зокрема, якщо точка протягом проміжку часу $[t_0; T]$ рухається в одному напрямі (напрямі осі x), то її переміщення збігається зі шляхом, який пройшла точка за цей проміжок часу. Наприклад, відомо, що швидкість тіла при вільному падінні виражається формулою $v = gt$, де v – швидкість, м/с; t – час, с; $g \approx 9{,}8$ м/с^2 – прискорення вільного падіння. Тоді шлях, пройдений тілом за перші 4 секунди падіння, дорівнює приросту первісної $F(t) = \frac{gt^2}{2}$ для функції $v = gt$ на проміжку $[0; 4]$, тобто $s = F(4) - F(0) = \frac{g \cdot 4^2}{2} - 0 = 8g \approx 78{,}4$ м.

Задачу про знаходження шляху, пройденого точкою, що рухається прямолінійно, можна звести до задачі про знаходження площі деякої фігури.

Розглянемо спочатку випадок рівномірного руху точки зі сталою швидкістю $v = v_0$. Графіком залежності швидкості від часу в системі координат $(t; v)$ буде пряма $v = v_0$, паралельна осі t. Шлях s, пройдений точкою за проміжок часу $[t_0; T]$, дорівнює $s = v_0(T - t_0)$, тобто площі затушованого прямокутника (рис. 134). Таким чином, шлях, пройдений точкою при рівномірному русі, дорівнює площі фігури, обмеженої графіком залежності швидкості від часу, віссю абсцис і двома вертикальними прямими $t = t_0$ і $t = T$.

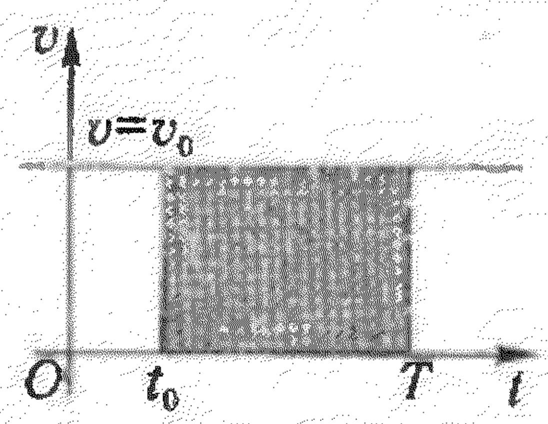


Рис. 134

Розглянемо тепер випадок нерівномірного руху. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$, графік якої зображено на рис. 135, а). Знайдемо шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[t_0; T]$. Ми вже вміємо знаходити шлях у випадку рівномірного руху. Щоб скористатися цим, розіб'ємо проміжок часу $[t_0; T]$ на менші проміжки $[t_0; t_1]$, $[t_1; t_2]$ і т. д. (рис. 135, б). На кожному з одержаних проміжків (оскільки вони невеликі) рух можна вважати рівномірним зі швидкістю, що дорівнює швидкості точки в початковий момент розглядуваного проміжку. Тоді шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[t_0; t_1]$, наближено дорівнює $v(t_0)(t_1 - t_0)$, тобто площі затушованого прямокутника з основою $(t_1 - t_0)$ і висотою $v(t_0)$ (рис. 135, в).

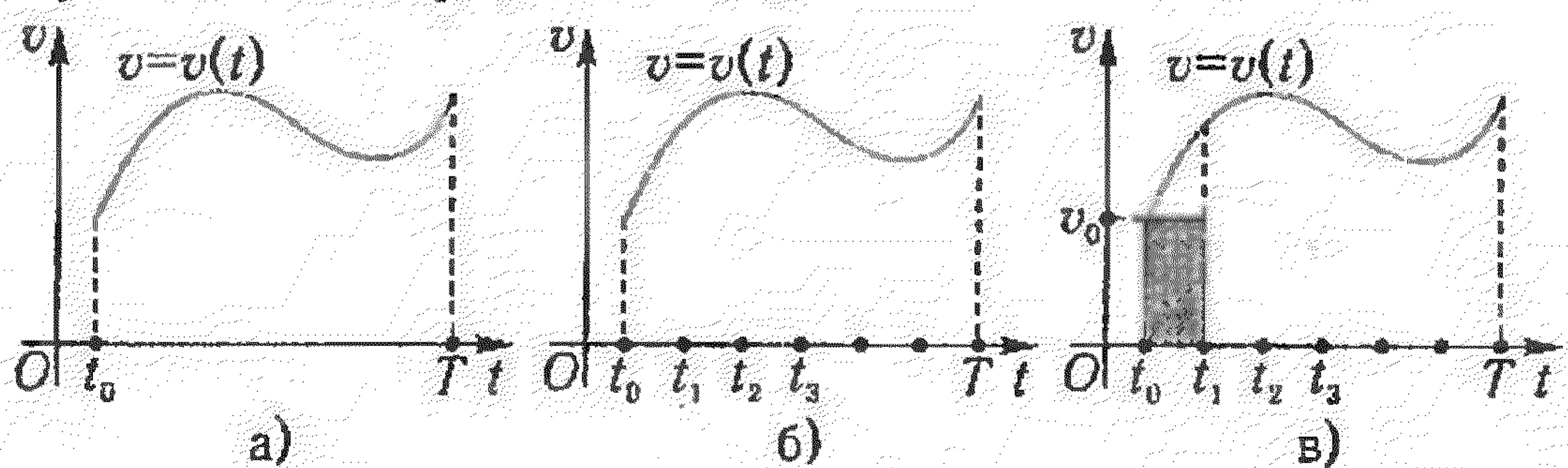


Рис. 135

Аналогічні міркування можна провести для кожного проміжку. Тому весь шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[t_0; T]$, наближено дорівнює площі затушованої ступінчастої фігури (рис. 136).

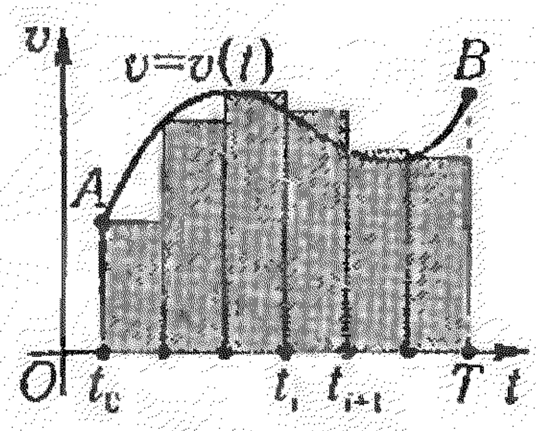


Рис. 136

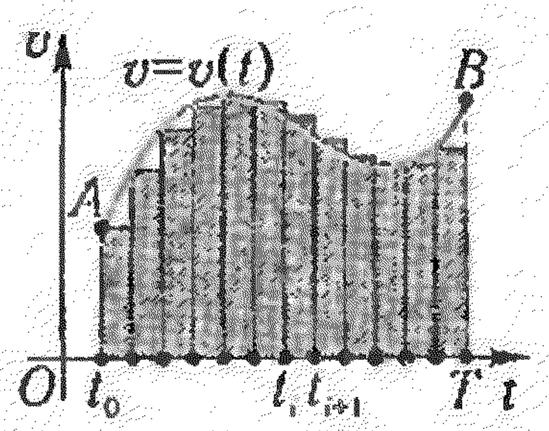


Рис. 137

Для того, щоб обчислити шлях точніше, необхідно розбити проміжок $[t_0; T]$ на більшу кількість проміжків меншої довжини (рис. 137).

З геометричних міркувань очевидно випливає, що при збільшенні кількості проміжків ступінчаста лінія наближається до графіка функції $v = v(t)$, а площа ступінчастої фігури все менше і менше відрізняється від площі фігури t_0ABT, обмеженої графіком залежності швидкості $v = v(t)$ від часу, відрізком осі $[t_0; T]$ і відрізками вертикальних прямих $t = t_0$ і $t = T$ (рис. 136, 137).

Тому природно вважати, що шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[t_0; T]$, дорівнює площі фігури t_0ABT.

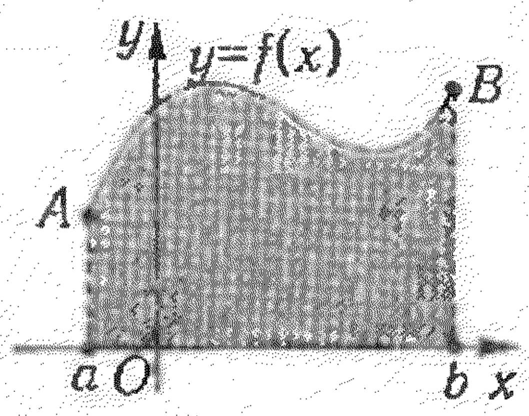


Рис. 138

Скористаємось тепер одержаним результатом для обчислення площ деяких фігур.

Нехай на проміжку $[a;b]$ задано ***неперервну невід'ємну*** функцію $y = f(x)$.

Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі x і відрізками прямих $x = a$, $x = b$, називається криволінійною трапецією (рис. 138).

Приклади криволінійних трапецій, обмежених графіками відомих функцій, подано на рис. 139.

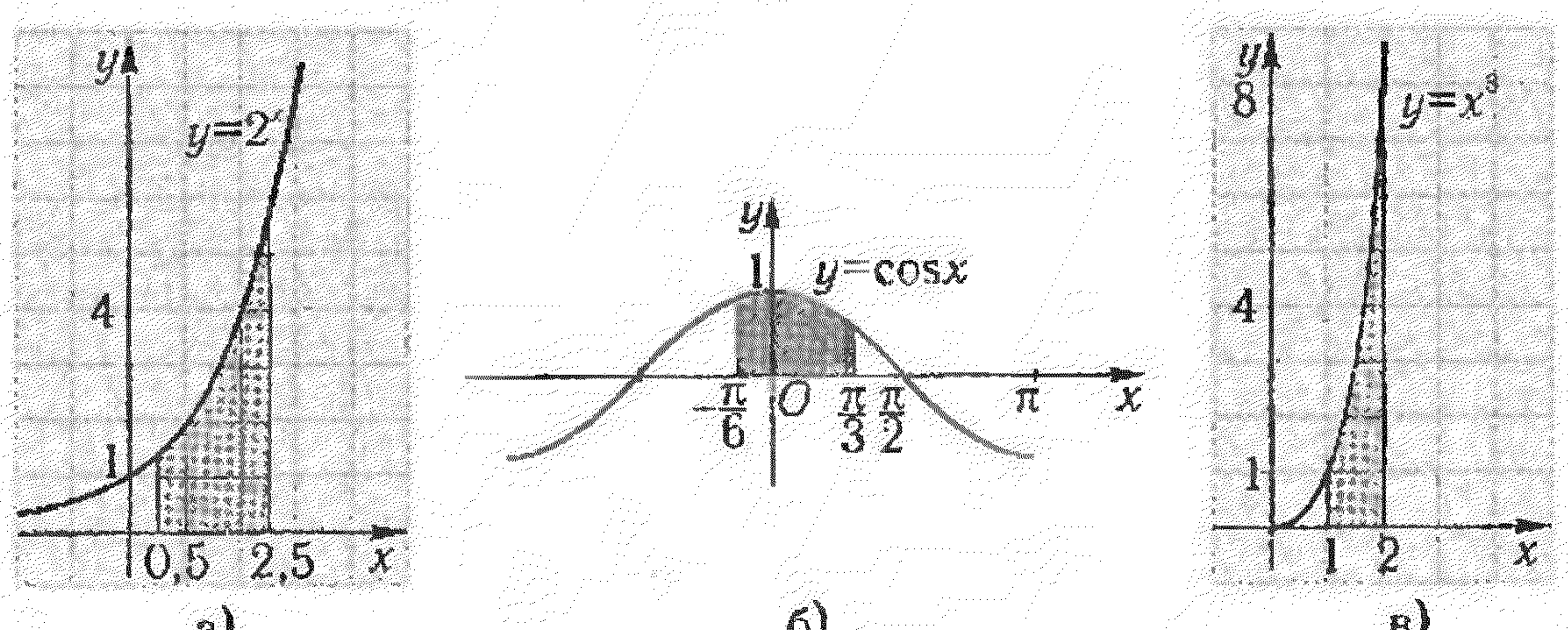


Рис. 139

Покажемо, як за допомогою первісної для функції $y = f(x)$ можна обчислити площу цієї фігури.

Якщо змінну x розглядати як час руху точки, а функцію $y = f(x)$ як швидкість руху, то площа криволінійної трапеції $aABb$ дорівнює шляху, пройденому точкою, що рухається зі швидкістю $y = f(x)$, за проміжок часу $[a;b]$. Але шлях, як показано вище, дорівнює приросту первісної для функції $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$.

Як бачимо, розв'язання обох задач звелось до знаходження приросту первісної для заданої функції. Абстрагуючись від геометричного і фізичного змісту задач, дослідимо одержану математичну модель.

Нехай неперервна функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;b]$ і $y = F(x)$ — одна з її первісних на цьому проміжку.

***Приріст первісної для функції* $y = f(x)$ *на проміжку* $[a;b]$ *називається інтегралом від функції* $y = f(x)$ *на проміжку* $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$, тобто**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Числа a, b називають відповідно ***нижньою і верхньою границями інтегрування,*** $f(x)$ — ***підінтегральною функцією,*** $f(x)dx$ — ***підінтегральним виразом,*** x — ***змінною інтегрування.***

***Інтеграл** — від латинського integer — цілий, відновлений.*

Зверніть увагу на те, що значення інтеграла не залежить від вибору первісної для підінтегральної функції.

Справді, якщо $F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$, то довільну первісну $y = \Phi(x)$ для цієї функції можна подати у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$. Тоді $\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

Для зручності запису приріст первісної $F(b) - F(a)$ часто позначають як $F(x)\Big|_a^b$: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Приклад 1. Обчислити: 1) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

□ 1) Однією з первісних для підінтегральної функції $y = x^2$ на відрізку $[-1; 1]$ є функція $y = \frac{x^3}{3}$. Отже, $\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$.

2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. ■

Відповідь. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 1.

На підставі розглянутих задач інтеграл має простий фізичний і геометричний зміст.

Інтеграл $\int\limits_{t_0}^{T} v(t)dt$ при $v(t) \geq 0$ дорівнює шляху, пройденому матеріальною точкою, яка рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$, за проміжок часу $[t_0, T]$.

Інтеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ від невід'ємної неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y = f(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Приклад 2. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^2$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

□ Зобразимо фігуру, площу якої потрібно обчислити (рис. 140). Це — криволінійна трапеція. Знайдемо її площу S користуючись геометричним змістом інтеграла:

$$S = \int\limits_{-1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) = 3. \blacksquare$$

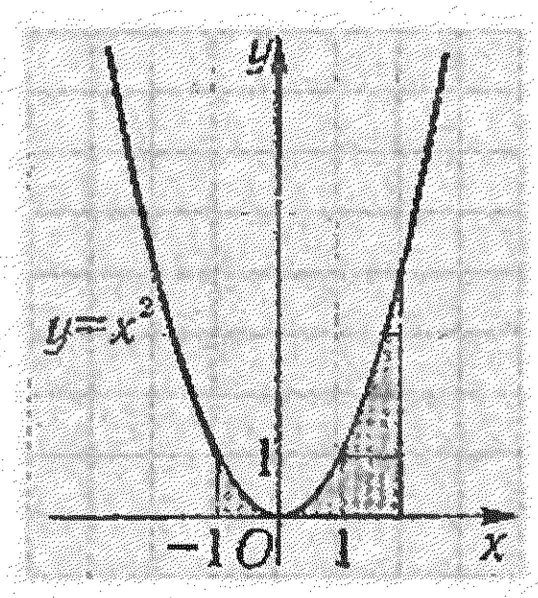


Рис. 140

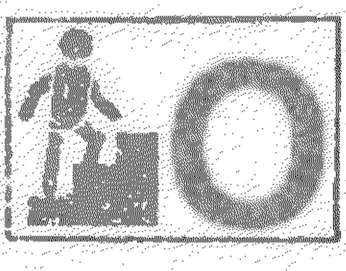
Відповідь. 3.

Приклад 3. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v = 2\sin t$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. Який шлях пройде точка за проміжок часу $[0; \pi]$?

□ Згідно з фізичним змістом інтеграла маємо:

$$s = \int_0^{\pi} 2\sin t dt = -2\cos t \,|_0^{\pi} = -2(\cos\pi - \cos 0) = 4 \text{ (м)}. \blacksquare$$

Відповідь. 4 м.



Задачі на знаходження шляху, пройденого матеріальною точкою, і площі криволінійної трапеції привели нас до розгляду сум спеціального вигляду. Справді, якщо проміжок $[t_0, T]$ поділити на n рівних проміжків завдовжки $\Delta t = \dfrac{T - t_0}{n}$, то шлях, пройдений точкою за довільний проміжок $[t_{i-1}, t_i]$, наближено дорівнює $v(t_{i-1})\cdot\Delta t$. Тоді весь шлях наближено дорівнює сумі

$$s_n = v(t_0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t.$$

Чим меншим є дробіння проміжку $[t_0, T]$, тобто чим більшим є n, тим точнішим одержимо результат. Аналогічні міркування можна навести при обчисленні площі криволінійної трапеції. Площа криволінійної трапеції на рис. 141 наближено дорівнює площі ступінчатої фігури, тобто сумі

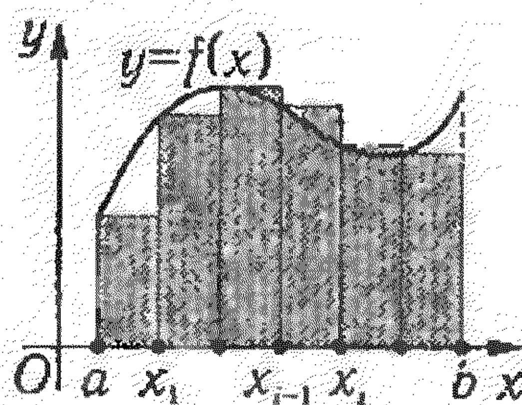


Рис. 141

$$S_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x,$$

де $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Якщо n спрямувати до нескінченності, одержимо точне значення шуканої площі. Як відомо, площа криволінійної трапеції дорівнює інтегралу $\int_a^b f(x)dx$. Отже, інтеграл дорівнює границі сум S_n при n, що прямує до нескінченності. Узагальнимо сказане.

Нехай на проміжку $[a; b]$ задано неперервну функцію $y = f(x)$. Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ на n рівних частин точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Довжина кожного отриманого відрізка дорівнює $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Сума виду $S_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x$ називається ***інтегральною сумою для функції $y = f(x)$*** на проміжку $[a; b]$.

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює границі інтегральних сум для функції $y = f(x)$ при n, що прямує до нескінченності.

На підставі цього розглядають обчислення інтеграла як деякий процес підсумовування, тобто об'єднання окремих частин у ціле. Символ інтеграла — це подовжена літера S — перша літера латинського слова «sum» (сума).

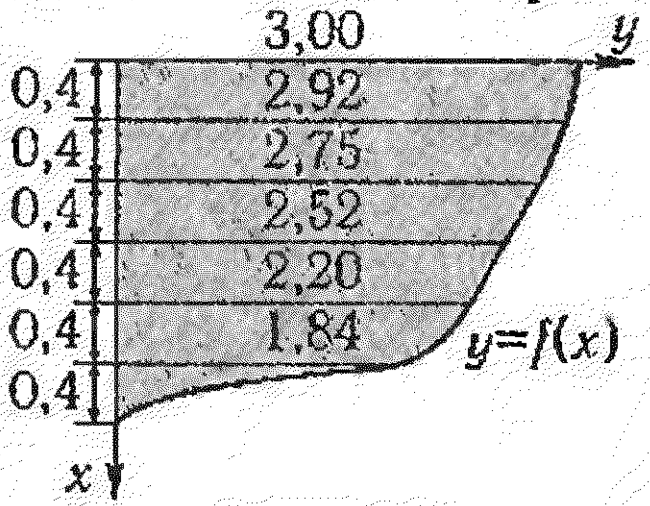


Рис. 142

За допомогою інтегральних сум наближено обчислюють різні величини. Наприклад, площу криволінійної трапеції, якщо функцію $y = f(x)$ задано графічно або за допомогою таблиці. Так, для обчислення площі поперечного перерізу судна (рис. 142) можна діяти наступним чином.

Інтеграл $\int_0^{2,4} f(x)dx$, що дорівнює половині шуканої площі S, замінюють його інтегральними сумами, спочатку виконавши потрібні вимірювання: $\frac{S}{2} \approx 3 \cdot 0,4 + 2,92 \cdot 0,4 + 2,75 \cdot 0,4 + 2,52 \cdot 0,4 + 2,2 \cdot 0,4 + 1,84 \cdot 0,4 \approx 6,1$ (м^2). Уся площа наближено дорівнює 12,2 м^2.

Контрольні запитання

1°. Які з фігур, що зображені на рис.143, а) – г), є криволінійними трапеціями? Виразіть їхні площі за допомогою інтеграла.

2°. Який геометричний зміст має інтеграл $\int_0^1 \sqrt{x}dx$?

3°. На рис. 144 зображено графік залежності швидкості тіла, що рухається прямолінійно, від часу. За який проміжок часу: [0; 1] або [1; 2] – тіло пройшло більший шлях?

4°. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно, причому швидкість руху першої точки $v = t^2$, а швидкість другої — $v = t$. Яка з точок пройде більший шлях за проміжок часу: а) [0, 1]; б) [1; 2]?

5°. Чи залежить значення інтеграла від вибору первісної для підінтегральної функції?

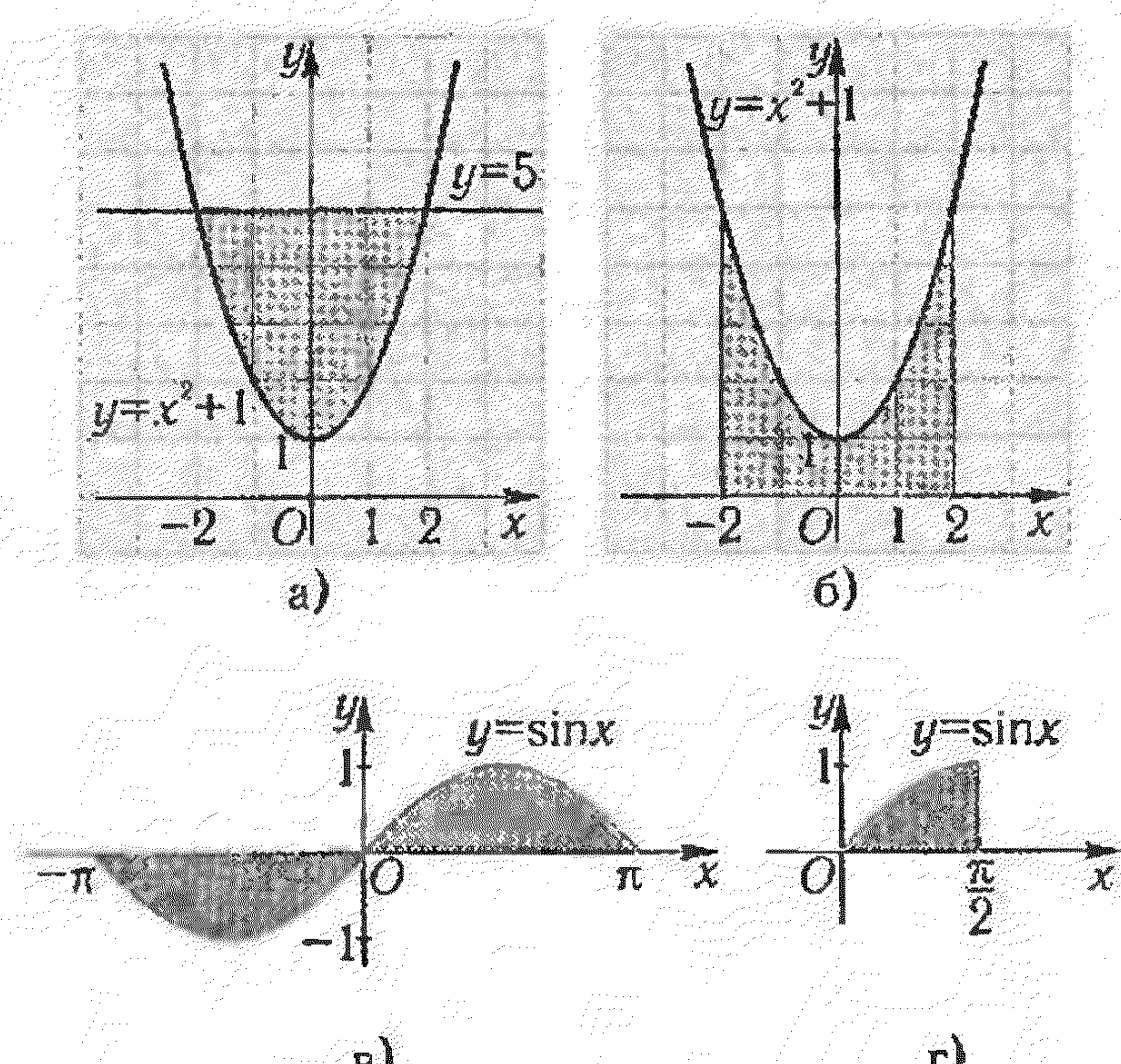


Рис. 143

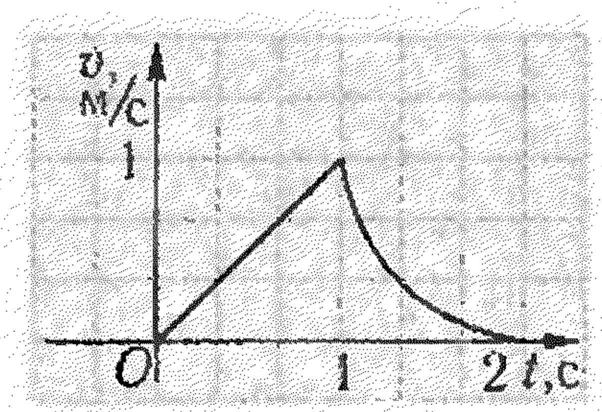


Рис. 144

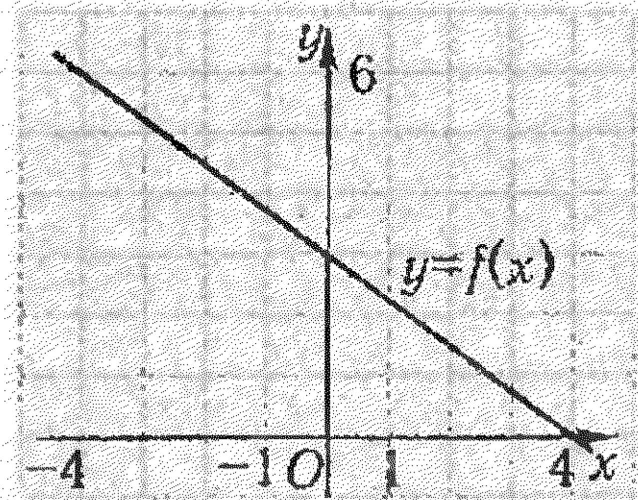


Рис. 145

6°. Чому дорівнює інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, якщо графік функції $y = f(x)$ зображено на рис. 145 і:

1) $a = 0$, $b = 4$; 2) $a = -4$, $b = 4$?

7. Відомо, що $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = 3$, $y = F(x)$ – первісна для функції $y = f(x)$ і $F(2) = 1$. Чому дорівнює значення функції $y = F(x)$ у точці $x = -1$?

8°. Чому дорівнює інтеграл $\int\limits_b^a f(x)dx$, якщо $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$?

9°. Чому дорівнює інтеграл $\int\limits_a^a f(x)dx$?

10. Чому дорівнює інтеграл $\int\limits_0^3 f(x)dx$, якщо графік первісної $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$ зображено на рис. 146?

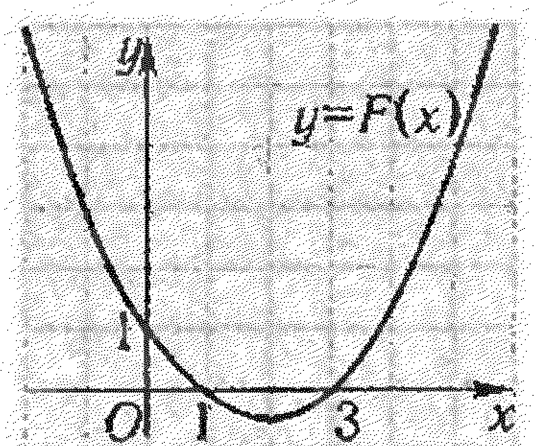


Рис. 146

2. Властивості інтеграла

Із означення інтеграла і правил знаходження первісної випливають наступні властивості інтеграла, які спрощують його обчислення.

Властивість 1. Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

☐ Справді, нехай $y=F(x)$, $y=G(x)$ — первісні для функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тоді функція $y=F(x)+G(x)$ є первісною для функції $y=f(x)+g(x)$ на цьому проміжку. Згідно з означенням інтеграла,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a)) =$$

$$=(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \ ■$$

Неважко довести, що властивість 1 справджується для суми довільної скінченної кількості доданків.

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

☐ Справді, нехай $y=F(x)$ — первісна для функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тоді $y=kF(x)$ є первісною для функції $y=kf(x)$ на даному проміжку. Згідно з означенням інтеграла, маємо:

$$\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = k(F(b)-F(a)) = k\int_a^b f(x)dx. \ ■$$

Приклад 4. Обчислити: 1) $\int_1^4 \left(9x^2-\frac{3}{2}\sqrt{x}+1\right)dx$; 2) $\int_0^1 \frac{e^{2x}-e^x}{e^x}dx$.

☐ 1) Використовуючи послідовно властивості 1 і 2 інтеграла, одержимо:

$$\int_1^4 \left(9x^2-\frac{3}{2}\sqrt{x}+1\right)dx = \int_1^4 9x^2dx - \int_1^4 \frac{3}{2}\sqrt{x}dx + \int_1^4 dx =$$

$$= 9\int_1^4 x^2dx - \frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{x}dx + \int_1^4 dx =$$

$$= 9\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^4 - \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 + x\Big|_1^4 = 3(4^3-1^3) - \left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)+(4-1) = 185.$$

2) $\int_0^1 \frac{e^{2x}-e^x}{e^x}dx = \int_0^1\left(\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{e^x}{e^x}\right)dx = \int_0^1 (e^x-1)dx =$

$= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 dx = e^x\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 = (e-1)-(1-0) = e-2$. ■

Відповідь. 1) 185; 2) $e-2$.

Деякі властивості інтеграла випливають безпосередньо з його геометричного змісту. Наприклад, врахувавши те, що площа криволінійної трапеції $aABb$ дорівнює сумі площ криволінійних трапецій $aACc$ і $cCBb$ (рис. 147), матимемо наступну властивість.

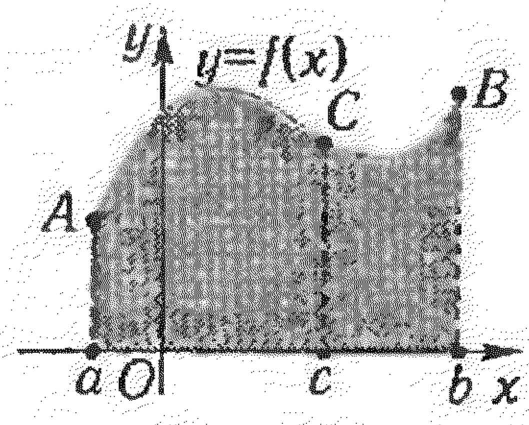


Рис. 147

Властивість 3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, **де c — деяка точка відрізка $[a;b]$.**

Ця властивість справджується і для довільної функції $y=f(x)$, а не тільки для невід'ємної.

□ Справді, якщо $y=F(x)$ — первісна для підінтегральної функції на відрізку $[a;b]$, то, згідно з означенням інтеграла, маємо:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx. \ ■$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^2 |2x-3|dx$.

□ Зауважимо, що $2x-3\le 0$ при $x\le\frac{3}{2}$ і $2x-3\ge 0$ при $x\ge\frac{3}{2}$.

Тому $|2x-3| = \begin{cases} 3-2x \text{ при } x\le\frac{3}{2}, \\ 2x-3 \text{ при } x\ge\frac{3}{2}. \end{cases}$ Щоб позбутися знака модуля в підінтегральній функції, розіб'ємо проміжок [0; 2] на два проміжки $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ і $\left[\frac{3}{2};2\right]$. Скориставшись властивістю 3 інтеграла, одержимо:

$$\int_0^2 |2x-3|dx = \int_0^{\frac{3}{2}} |2x-3|dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 |2x-3|dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3-2x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3)dx =$$

$$= \left(3x-x^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}} + \left(x^2-3x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^2 = 2,5. \blacksquare$$

Відповідь. 2,5.

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = e$, $y = 0$.

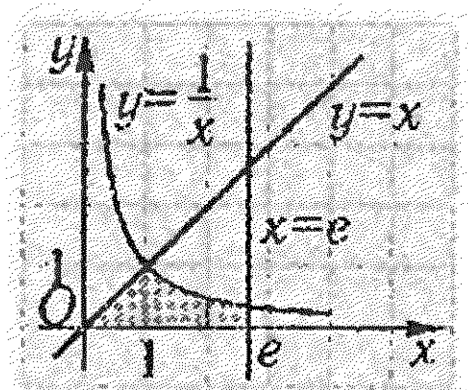


Рис. 148

□ Зобразимо фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 148). Це — криволінійна трапеція. Однак зверху вона обмежена графіком функції, яка на різних проміжках задається різними формулами:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{x} \text{ при } 1 \le x \le e. \end{cases}$$

Тоді $S = \int_0^e f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^e \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ln x\Big|_1^e = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. $\blacksquare$

Відповідь. 1,5.

Контрольні запитання

1°. Відомо, що $\int_0^a f(x)dx = 1$, $\int_0^a g(x)dx = 3$. Чому дорівнює інтеграл:

а) $\int_0^a (2f(x) - 4g(x))dx$;   б) $\int_0^a (f(x)+1)dx$?

2. Точка, рухаючись прямолінійно зі швидкістю $v = t^3$, за деякий проміжок часу пройшла шлях S. Який шлях вона пройде за той самий проміжок часу, якщо її швидкість змінюватиметься за законом $v = (2t)^3$?

3. Площа криволінійної трапеції $aABb$, зображеної на рис. 149, дорівнює S. Чому дорівнює площа криволінійної трапеції aA_1B_1b?

4. Чому дорівнює $\int\limits_0^1 f(x)dx$, якщо $\int\limits_0^2 f(x)dx = 5$ і графік функції $y = f(x)$ зображено на рис. 150?

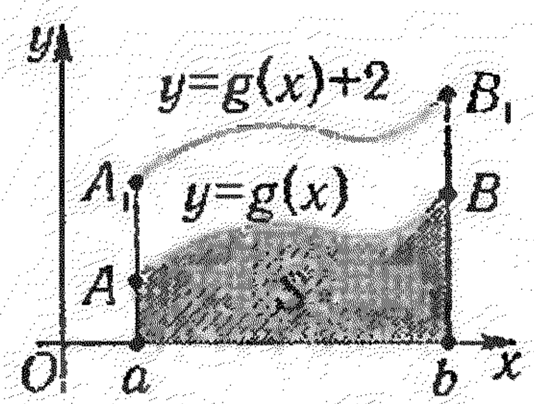


Рис. 149

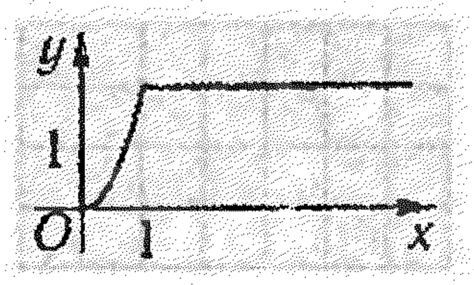


Рис. 150

Задачі

195. Обчисліть інтеграл:

1°) $\int\limits_{-1}^{2} dx$; 2°) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$; 3°) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$;

4°) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x}dx$; 5°) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 6) $\int\limits_{1}^{0} e^{2x}dx$;

7) $\int\limits_{0}^{1} x\sqrt[3]{x}dx$; 8) $\int\limits_{1}^{2} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x}\right)dx$; 9) $\int\limits_{-1}^{0} 2^x \cdot e^x dx$.

196°. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = e, y = 0$; 2) $y = 2^x, y = 0, x = -1, x = 1$;

3) $y = x^2, x = -1, x = 2, y = 0$; 4) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$.

197°. Зобразіть криволінійну трапецію, площа якої виражається формулою:

1) $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{x}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

4) $\int\limits_{0}^{2} e^x dx$; 5) $\int\limits_{1}^{2} \ln x dx$; 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}\, x\, dx$.

198°. Точка виконує гармонічні коливання зі швидкістю, залежність якої від часу виражається формулою $v = \sin t$, де v — швидкість, м/с, t — час, с. Знайдіть шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[0; \pi]$.

199°. Точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$, графік якої зображено на рис. 151.

1) Визначте, який шлях вона пройде за проміжок часу $[0; 2]$; $[0,5; 1]$; $[1; 2]$.

2) Виразіть шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[0,5; 1]$, за допомогою інтеграла.

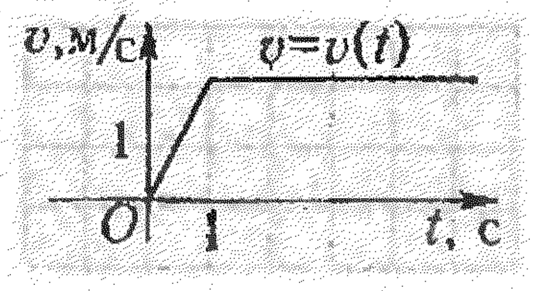


Рис. 151

200. Обчисліть інтеграл:

1°) $\int_1^4 \left(x^2 - 2\sqrt{x}\right)dx$;

2°) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$;

3°) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{2} + 4x\right)dx$;

4°) $\int_{-1}^{0} \left(e^x + 3^x - 1\right)dx$;

5°) $\int_1^e x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}\right)dx$;

6°) $\int_{-1}^{1} (2x-1)(2x+1)dx$;

7) $\int_0^1 (\sqrt{x}+1)^2 dx$;

8) $\int_2^4 (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)dx$;

9) $\int_2^{-1} \frac{1}{x}\left(1 + x + x^2\right)dx$;

10) $\int_1^2 \frac{(t+2)^2}{t}dt$;

11) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4dx}{1-\sin^2 x}$;

12*) $\int_{-1}^{1} \frac{6^x + 6}{2^x}dx$;

13*) $\int_{-3}^{1} |x|(x-2)dx$;

14*) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \le 0, \\ e^x \text{ при } x > 0; \end{cases}$

15*) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$;

16*) $\int_0^{\pi} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)dx$.

201. Швидкість точки змінюється за законом $v = 4t - t^2$, де v – швидкість, м/с; t – час, с. Знайдіть шлях, пройдений точкою
1°) за перші 2 с руху;
2°) за третю секунду руху;
3) від початку руху до моменту, коли вона змінить напрям руху.

202. Знайдіть шлях, пройдений автобусом за час від початку гальмування ($t = 0$) до повної його зупинки, якщо при гальмуванні швидкість цього автобуса змінювалась за законом $v = 20 - 4t$, де v — швидкість, м/с; t — час, с.

203. Два об'єкти почали рух по прямій одночасно з однієї точки в одному напрямі. Їхні швидкості змінювались за законами: $v = 2\cos t$ і $v = \dfrac{12t}{\pi^2}$, де v — швидкість, м/с, t — час, с.
1°) Який з об'єктів пройшов більший шлях за проміжок часу $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$?
2) Яка відстань була між об'єктами у той момент, коли перший із них уперше поміняв напрям руху?

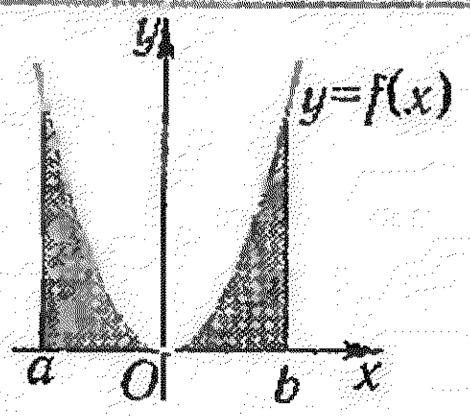
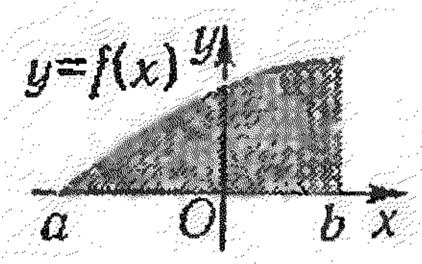
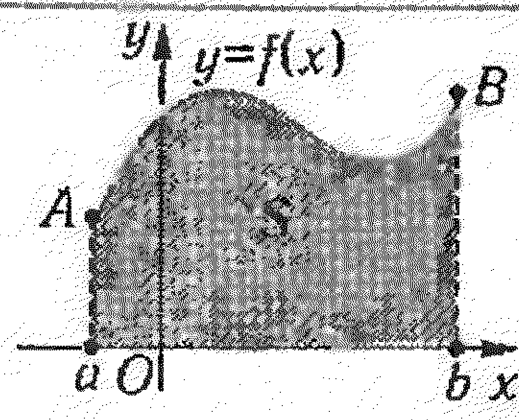
Вправи для повторення

204. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:
1°) $y = x^2 - x + 1$ і $y = 1$;
2°) $y = |2x - 3|$ і $y = 3$;
3) $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;
4*) $y = 2^x$ і $y = x + 1$.

205. Зобразіть фігури, обмежені графіками функцій, наведених у задачі 204.

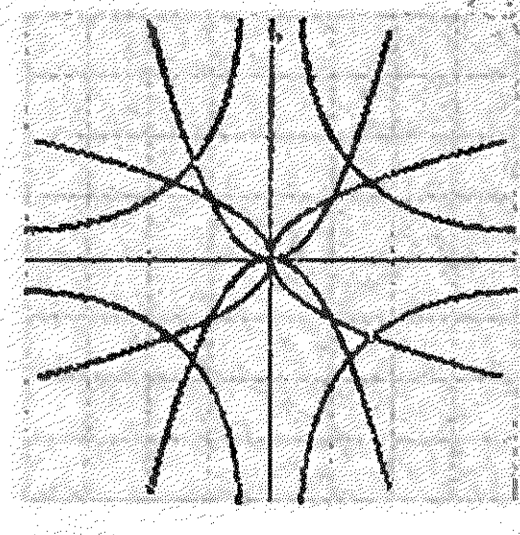
Підсумок

Головні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація
Фігура, обмежена графіком неперервної невід'ємної функції $y=f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі x і відрізками прямих $x=a$, $x=b$, називається ***криволінійною трапецією.***	 
Приріст первісної для неперервної функції $y=f(x)$ на проміжку $[a;b]$ називається ***інтегралом від функції*** $y=f(x)$ ***на проміжку*** $[a;b]$: $$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$	 $$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Головні твердження

Словесне формулювання	Символічний запис
Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій.	$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.	$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
Якщо проміжок інтегрування розбити на два проміжки, що не перетинаються, то інтеграл по всьому проміжку дорівнює сумі інтегралів за проміжками розбиття.	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



§11. Застосування інтеграла

У даному параграфі знаходяться за допомогою інтеграла площі фігур, складніших порівняно з криволінійною трапецією, а також розглядаються основні схеми застосування інтеграла для розв'язання прикладних задач.

1. Обчислення площ плоских фігур

Відповідно до геометричної інтерпретації інтеграла (§10) площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю абсцис, дорівнює:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Однак за допомогою інтеграла можна обчислювати площі не тільки криволінійних трапецій, а й складніших фігур.

У цих випадках використовують такі властивості площ:

1) якщо фігуру розбити на скінченне число фігур, які не мають спільних внутрішніх точок, то її площа дорівнює сумі площ цих фігур;

2) площа фігури зберігається при переміщенні, зокрема, при паралельному перенесенні і перетворенні симетрії відносно точки і прямої.

Обчислимо, наприклад, площу фігури $aABb$ (рис. 152, а), обмеженої графіком неперервної недодатної функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Ця фігура симетрична відносно осі x криволінійній трапеції aA_1B_1b, обмеженої лініями $y = -f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 152, б). Отже, площа $aABb$ дорівнює площі aA_1B_1b, тобто

$$S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx. \quad (2)$$

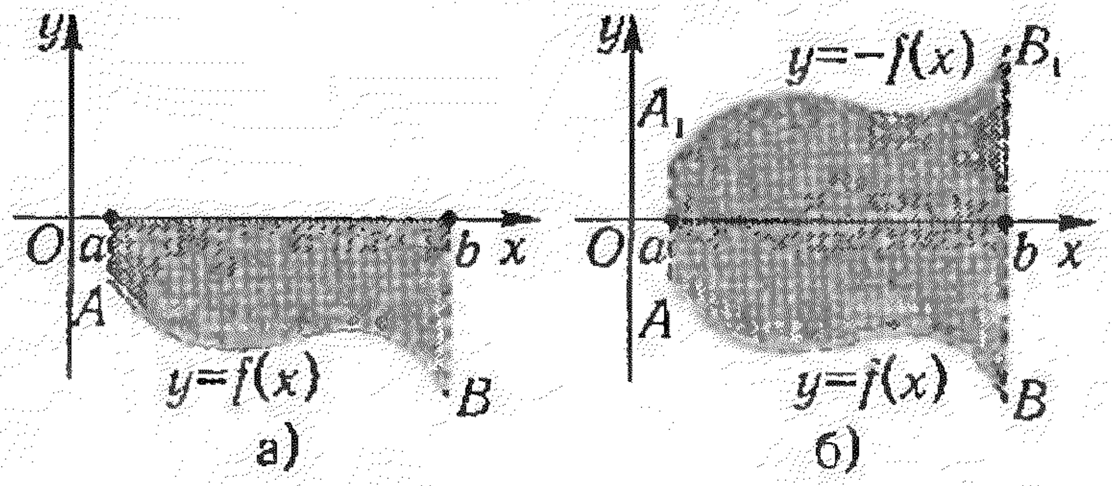


Рис. 152

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = e^x - 1$, $y = 0$, $x = -1$ (рис. 153).

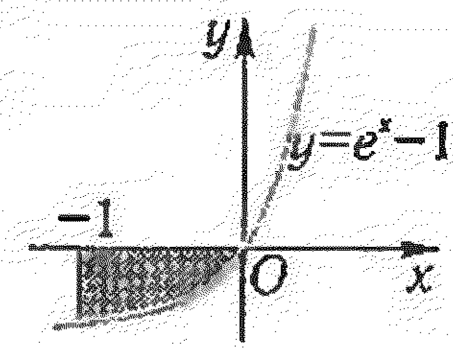


Рис. 153

□ Згідно з формулою (2), маємо:

$$S = -\int_{-1}^{0}(e^x - 1)dx = (-e^x + x)\Big|_{-1}^{0} = e^{-1}. \blacksquare$$

Відповідь. e^{-1}.

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ (рис. 154).

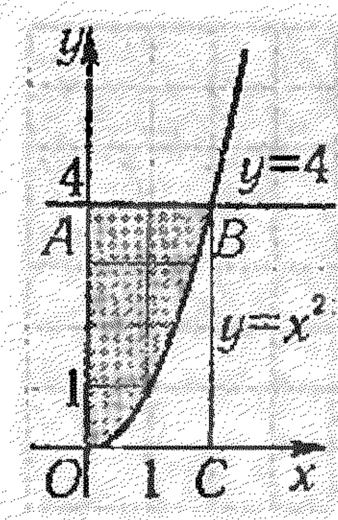


Рис. 154

□ Фігура OAB не є криволінійною трапецією, але доповнює криволінійну трапецію OBC до прямокутника $OABC$. Тому шукана площа S дорівнює: $S = S_{OABC} - S_{OBC}$. Оскільки $S_{OABC} = 8$, $S_{OBC} = \int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$, то

$$S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}. \blacksquare$$

Відповідь. $5\frac{1}{3}$.

Розглянемо фігуру, обмежену прямими $x = a$, $x = b$ і графіками неперервних функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$, таких, що $f(x) \geq g(x) \geq 0$ на відрізку $[a;b]$ (рис. 155).

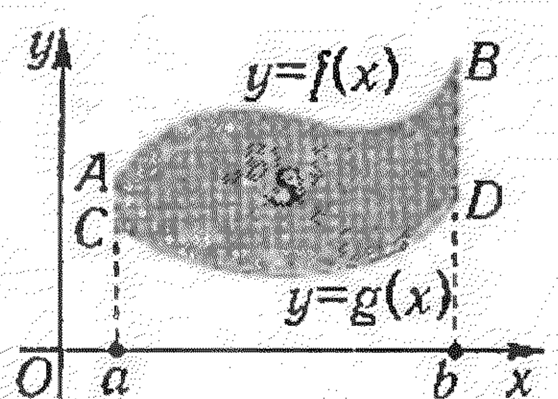


Рис. 155

Криволінійна трапеція $aCDb$ доповнює дану фігуру $CABD$ до криволінійної трапеції $aABb$. Тому, позначивши площі цих фігур відповідно через S_1, S, S_2, дістанемо: $S_2 = S + S_1$, або $S = S_2 - S_1$.

Таким чином, площу фігури $CABD$ можна обчислювати за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \quad (3)$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 4$, $y = 4 - x^2$, $x = 2$ (рис. 156).

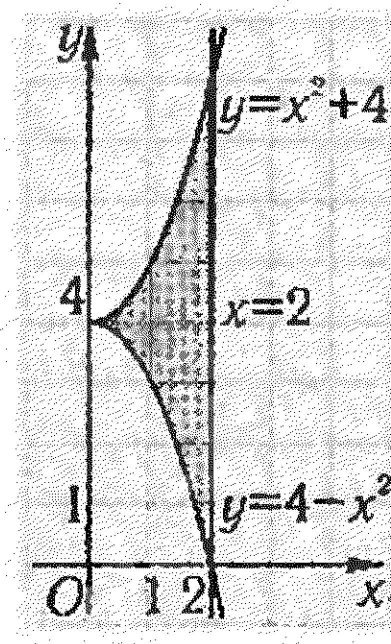


Рис. 156

☐ Згідно з формулою (3), маємо:

$$S = \int_0^2 (x^2 + 4 + x^2 - 4)dx = 2\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^2 = 5\frac{1}{3}. \blacksquare$$

Відповідь. $5\frac{1}{3}$.

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x + 10$, $y = \frac{9}{x}$ (рис. 157).

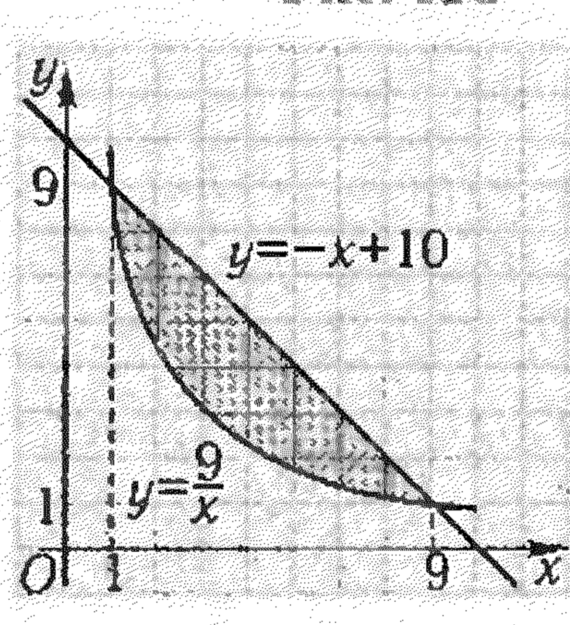


Рис. 157

☐ Щоб знайти абсциси точок перетину ліній $y = -x + 10$ і $y = \frac{9}{x}$, розв'яжемо рівняння

$\frac{9}{x} = -x + 10$; $\quad 9 = -x^2 + 10x$, $\quad x^2 - 10x + 9 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = 9$.

Скориставшись формулою (3), дістанемо:

$$S = \int_1^9 \left(-x + 10 - \frac{9}{x}\right)dx = \left.\left(-\frac{x^2}{2} + 10x - 9\ln x\right)\right|_1^9 = 40 - 9\ln 9 \approx 20{,}2. \blacksquare$$

Відповідь. $\approx 20{,}2$.

Формулу (3) можна застосувати і для обчислення площ фігур вигляду $ACDB$ (рис. 158, а), тобто фігур, обмежених прямими $x = a$, $x = b$ і графіками функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$, що є неперервними на відрізку $[a;b]$ і задовольняють нерівність $g(x) \le f(x)$.

Справді, змістимо фігуру $ACDB$ вздовж осі y на деяку відстань k так, щоб вона опинилась вище від осі x (рис. 158, б). Фігуру $A_1C_1D_1B_1$ отримаємо з фігури $ACDB$ шляхом паралельного перенесення, а тому вона має таку саму площу S. Для обчислення площі $A_1C_1D_1B_1$ застосовуємо формулу (3), тобто

$$S=\int_a^b (f(x)+k-g(x)-k)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx .$$

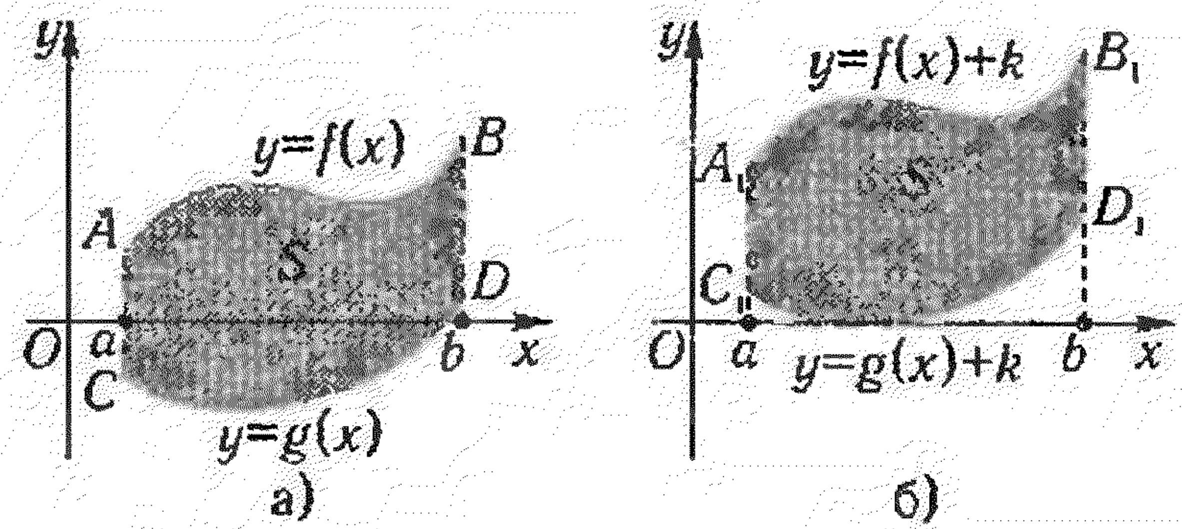


Рис. 158

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{1}{3}(x^2-4)$, $y=x$ (рис. 159).

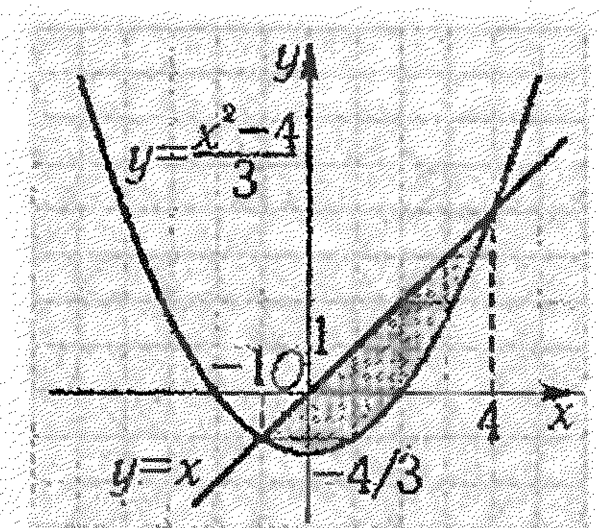


Рис. 159

□ Розв'язуючи рівняння $\frac{x^2-4}{3}=x$, знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій $y=\frac{1}{3}(x^2-4)$ і $y=x$: $x_1=-1, x_2=4$.

Згідно з формулою (3), маємо:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(x-\frac{x^2}{3}+\frac{4}{3}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{9}+\frac{4x}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{4}=6\frac{17}{18}. \blacksquare$$

Відповідь. $6\frac{17}{18}$.

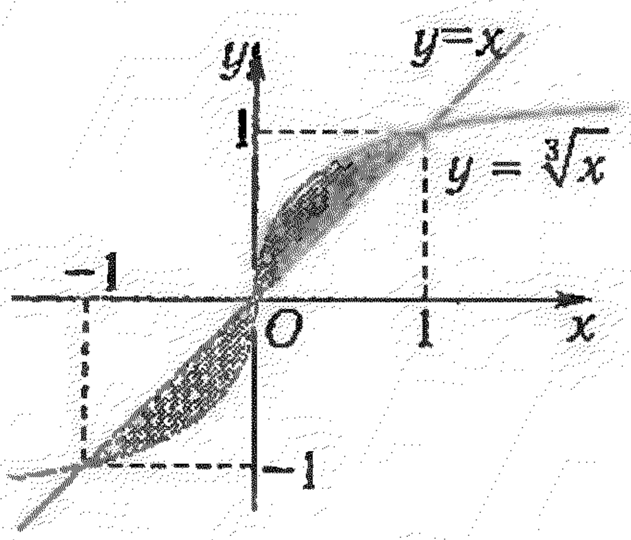


Рис. 160

При обчисленні площ слід враховувати симетрію фігури відносно осей і початку координат. Це істотно скорочує обчислення. Наприклад, при обчисленні площі фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x$ (рис. 160), достатньо обчислити площу тільки однієї її половини і результат подвоїти.

Контрольні запитання

1°. Які властивості має площа фігури?

2°. Чи правильно, що інтеграл $\int_{-1}^{1} x^3 dx$ дорівнює площі фігури, обмеженої лініями $x = -1, x = 1, \quad y = 0, y = x^3$?

3. Функція $y = f(x)$ є парною (непарною) і $\int_0^a f(x)dx = 1$. Чому дорівнює інтеграл: а) $\int_{-a}^{0} f(x)dx$; б) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$?

4. Відомо, що площа криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = 0$, $x = 2$, графіком функції $y = f(x)$ і віссю x, дорівнює 1. Чому дорівнює площа фігури, обмеженої:
а) прямими $x = 0$, $x = 2$, графіком функції $y = -f(x)$ і віссю x;
б) прямими $x = 0$, $x = 2$, графіком функції $y = f(x) + 1$ і віссю x;
в) прямими $x = 1$, $x = 3$, графіком функції $y = f(x - 1)$ і віссю x?

5. Виразіть інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ через площі фігур S_1, S_2, S_3, зображених на: а) рис. 161; б) рис 162.

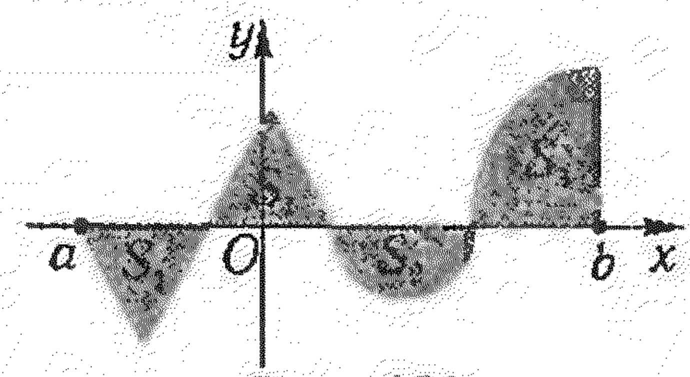


Рис. 161

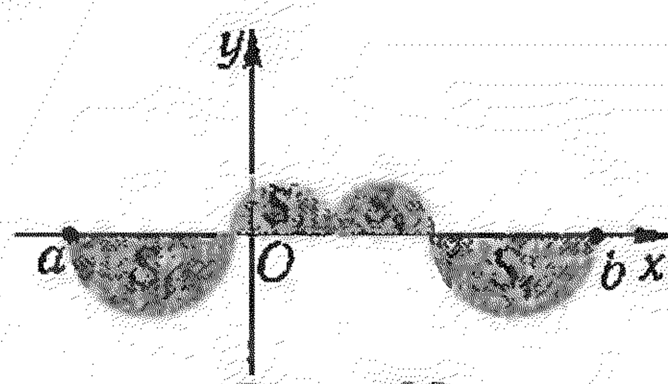
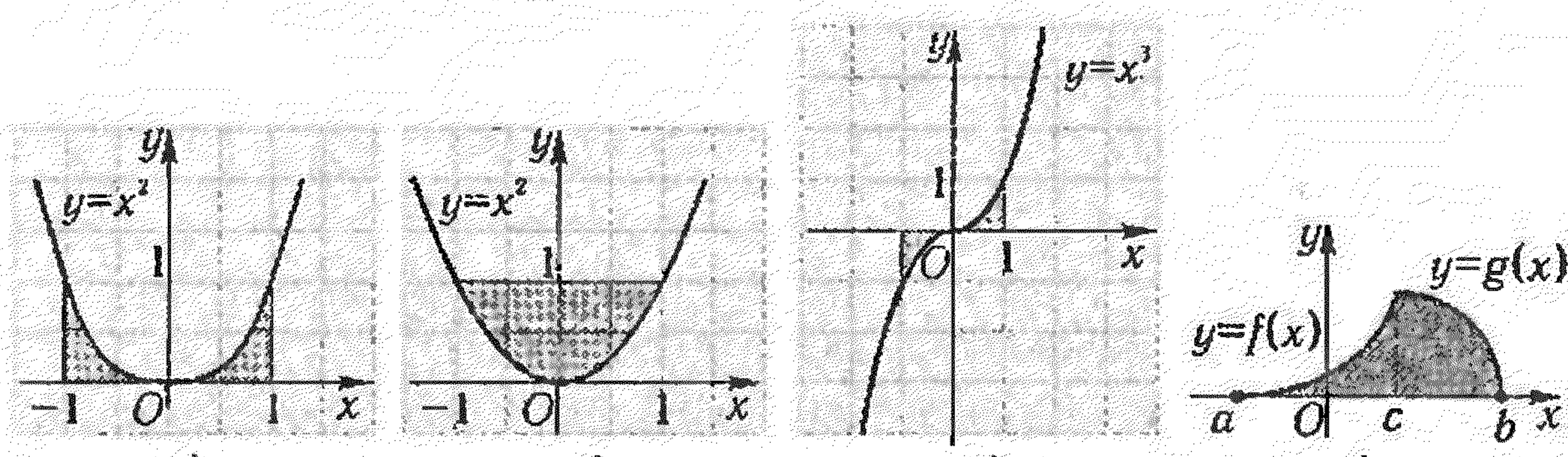


Рис. 162

6. Як доцільно обчислити площу фігури, зображеної на:
а) рис. 163, а); б) рис. 163, б); в) рис. 163, в); г) рис. 163, г)?



а) б) в) г)

Рис. 163

7. На рис. 164 зображено графіки функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, порівняйте числа: $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$.

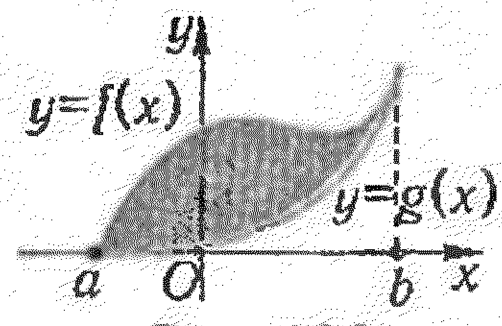
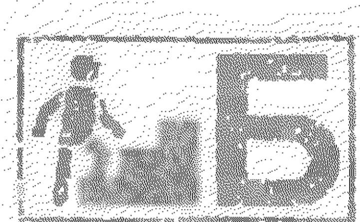


Рис. 164

8*. Чому дорівнює інтеграл:

а) $\int_{-2}^{2}\frac{x}{x^2+1}dx$; б) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$?

2. Застосування інтеграла у фізиці



Існують дві основні схеми застосування інтеграла. Перша схема ґрунтується на формулі

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Якщо відома швидкість $F'(x)$ перебігу деякого процесу (тобто швидкість зміни величини $F(x)$ з часом), то за допомогою цієї формули можна визначити, на скільки зміниться досліджувана величина за проміжок часу $[a; b]$. Формула $\int_{t_0}^{T} v(t)dt = \int_{t_0}^{T} x'(t)dt = x(T) - x(t_0)$, за допомогою якої ми знаходили переміщення точки, що рухається прямолінійно, є окремим випадком формули, наведеної вище.

Приклад 6. Шків обертається з кутовою швидкістю $\omega = \frac{t+1}{2}$, де t — час, с; ω — кутова швидкість, рад/с. На який кут повернеться шків за третю секунду обертання?

☐ Нехай $\varphi = \varphi(t)$ – кут обертання шківа за проміжок часу $[0; t]$. Тоді $\varphi'(t) = \omega(t)$ — його кутова швидкість обертання. Отже, кут повороту шківа за проміжок часу [2; 3] дорівнює:

$$\varphi(3) - \varphi(2) = \int_2^3 \varphi'(t)dt = \int_2^3 \omega(t)dt = \int_2^3 \frac{t+1}{2}dt = \frac{7}{4} \text{ (рад)}. ■$$

Відповідь. $\frac{7}{4}$ рад.

Приклад 7. Швидкість зміни концентрації речовини, що вступила в реакцію, виражається формулою $v = 3t + 1$, де v — швидкість, моль/(с·м³), t — час, с. Як зміниться концентрація речовини за час від $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$ с?

□ Якщо $c(t)$ — концентрація речовини в момент часу t, то $c'(t) = v(t) = 3t + 1$. Потрібно знайти приріст функції $c(t)$ на проміжку $[0;5]$. Згідно з наведеною формулою, маємо

$$c(5) - c(0) = \int_0^5 v(t)dt = \int_0^5 (3t+1)dt = \left(\frac{3t^2}{2} + t\right)\Bigg|_0^5 = 42{,}5 \text{ (моль/м}^3\text{)}.$$ ■

Відповідь. 42,5 моль/м³.

Друга схема застосування інтеграла ґрунтується на тому, що інтеграл дорівнює границі інтегральних сум (див. § 10). Досліджувану величину наближено подають у вигляді інтегральної суми з подальшим граничним переходом. Цей метод ми вже використовували при знаходженні площі криволінійної трапеції у § 10. Зараз за його допомогою розв'яжемо задачу на знаходження роботи змінної сили.

Задача (робота змінної сили). Матеріальна точка рухається вздовж осі x під дією сили $y = F(x)$, спрямованої вздовж цієї прямої. Знайти роботу цієї сили з переміщення точки з положення $x = a$ у положення $x = b$.

□ Якщо матеріальна точка рухається вздовж осі x під дією сталої сили F, то роботу з переміщення точки з положення $x = a$ у положення $x = b$ можна знайти за допомогою такої формули

$$A = F(b - a).$$

Якщо ж рух проходить під дією змінної сили, то для розв'язування поставленої задачі застосовують інтегральні методи.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n рівних відрізків завдовжки $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. На кожному з цих відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, сила змінюється мало. Тому наближено її можна вважати сталою, що дорівнює, наприклад, $F(x_{i-1})$. Тоді робота, яку виконує сила на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, приблизно становить $F(x_{i-1})\Delta x$, а роботу сили на всьому відрізку $[a;b]$ виражають за допомогою формули

$$A \approx \left(F(x_0)+F(x_1)+...+F(x_{n-1})\right)\Delta x.$$

Перейшовши в останній рівності до границі при $n \to \infty$, отримаємо:

$$A = \int_a^b F(x)dx. \ ■$$

Приклад 8. Яку потрібно виконати роботу, щоб розтягти пружину на 3 см, якщо сила в 10 Н розтягує пружину на 1 см?

□ Згідно із законом Гука, сила F, що розтягує пружину, пропорційна переміщенню x вільного кінця пружини, тобто $F = kx$. Для знаходження коефіцієнта k скористаємось тим, що сила в 10 Н розтягує пружину на 0,01 м: $10 = 0{,}01 \cdot k$, $k = 1000$. Тоді $F = 1000x$ і роботу знаходимо за формулою $A = \int_a^b F(x)dx$:

$$A = \int_0^{0,03} 1000x\,dx = 1000\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,03} = 0{,}45 \text{ (Дж)}. \ ■$$

Відповідь. 0,45 Дж.

Контрольні запитання

1. Який фізичний зміст має формула: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$?
2. Первісною для якої величини є: а) закон руху; б) швидкість руху?
3. Відомо, що сила струму I змінюється з часом t за законом $I = I(t)$. Виразіть за допомогою інтеграла заряд q, який проходить через поперечний переріз провідника за проміжок часу $[t_0; T]$, якщо відомо, що $I(t) = q'(t)$.

Задачі

206°. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$;
2) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;
3) $y = (x+1)^2$, $x = 0$, $x = -2$, $y = 0$;
4) $y = e^x + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
5) $y = x^2 - 1$, $y = 0$;
6) $y = -\frac{6}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$;
7) $y = \cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

207. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=\cos x$, $\left(\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{4}\right)$, $y=0$, $x=\frac{7\pi}{4}$;

2) $y=e^{-x}-1$, $y=0$, $x=1$, $x=-1$;

3) $y=-x^2+2x+10$, $y=10$;

4) $y=\sin x$, $y=2\sin x$ $(0\le x\le\pi)$;

5) $y=x^2$, $x+y=2$;

6) $y=\sin x$, $y=2\sin x$ $(-\pi\le x\le\pi)$;

7) $y=2x^2$, $y=x^2+1$;

8) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(-\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$;

9) $y=2^x$, $y=-2^x$, $x=0$, $x=1$; 10) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$;

11) $y=x^2$, $x+y=2$, $y=0$; 12*) $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$.

208*. Знайдіть площу фігури, обмеженої гіперболою $y=-\frac{1}{x}$, дотичною до неї, проведеною в точці з абсцисою $x=1$, і прямою $x=2$.

209*. Функція $y=F(x)$ є первісною для функції $f(x)=2x-4$. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=f(x)$ і $y=F(x)$, знаючи, що графік функції $y=F(x)$ проходить через точку $A(0;4)$.

210. Знайдіть площу поперечного перерізу каналу для зрошування, що має форму параболічного сегмента (рис. 165).

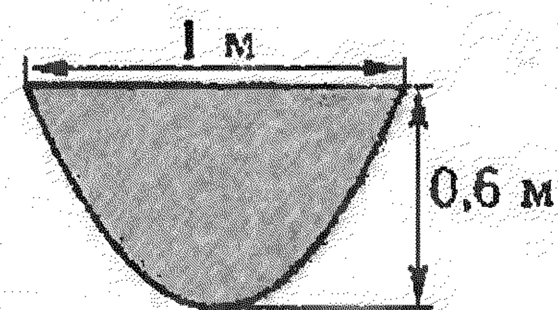


Рис. 165

211*. Серповидна опора, в якої верхній і нижній контури є параболами (рис. 166), виготовлена з 10-міліметрового плоского стального листа. Знайдіть масу цієї опори за формулою $m=\rho\cdot S\cdot d$, де $\rho=7{,}8\cdot10^3$ кг/м³ — густина сталі, S — площа перерізу опори, d — її товщина.

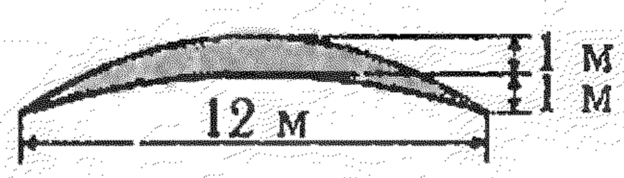


Рис. 166

212. Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v=2+t-t^2$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. Знайдіть:

1°) переміщення тіла за проміжок часу [1; 3];
2) шлях, пройдений тілом за проміжок часу [1; 3].

213°. Колесо обертається з кутовою швидкістю, що змінюється за законом $\omega = 2t + 3$, де ω — кутова швидкість, рад/с; t — час, с. На який кут повернеться колесо за проміжок часу [1; 5]?

214°. Швидкість нагрівання рідини змінюється за законом $v = 0,2t + 1$, де v — швидкість нагрівання, К/с; t — час, с. На скільки кельвінів нагріється рідина за перші 3 с?

215°. Швидкість зміни температури рідини v залежно від часу t виражається формулою $v = 3t - 2$ (температура вимірюється в °С, час — у секундах). На скільки градусів зміниться температура рідини за проміжок часу [1; 4]?

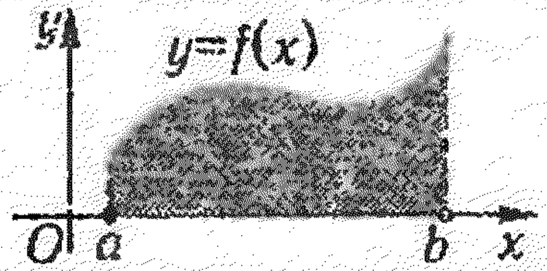
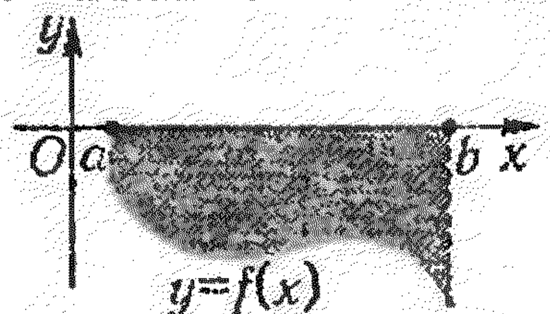
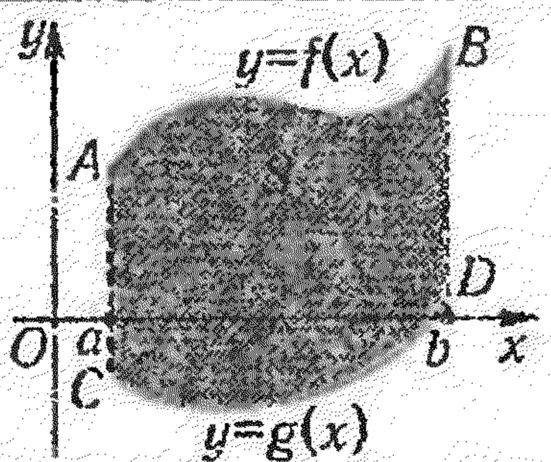
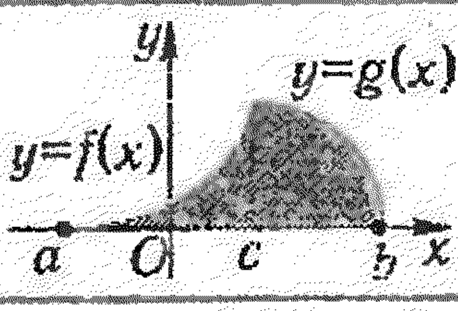
216*. Точка здійснює гармонічне коливання зі швидкістю $v = 3\sin\frac{\pi}{8}t$, де v — швидкість, м/с; t — час, с. Знайдіть:
1) переміщення точки за проміжок часу [0; 16];
2) шлях, пройдений точкою за проміжок часу [0; 16].

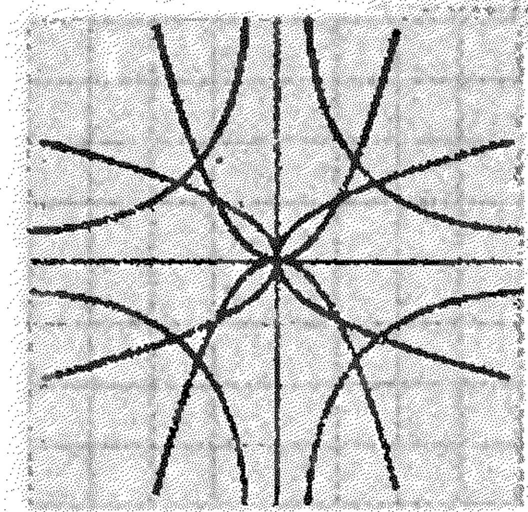
217. При стисканні пружини на 2 см виконали роботу в 40 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 3 см?

218*. Два одиничні електричні заряди розташовані на відстані 5 см один від одного. Потім один із зарядів звільняється і віддаляється від іншого під дією сили відштовхування, яка, за законом Кулона, має вигляд $F = \frac{k}{r^2}$, де r — відстань між зарядами, k — коефіцієнт пропорційності. Яку роботу здійснить сила, якщо заряд віддалиться на відстань: 1) 10 см; 2) 15 см?

Підсумок

Обчислення площ плоских фігур

Фігура	Площа
	$S=\int\limits_a^b f(x)dx$
	$S=-\int\limits_a^b f(x)dx$
	$S=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx$
	$S=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b g(x)dx$



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Інтеграл та його застосування»

Завдання для самоконтролю

1°. Чи може функція мати лише скінченну кількість первісних?

2°. Чи можуть функції, графіки яких зображено на рис. 167, бути первісними для однієї функції?

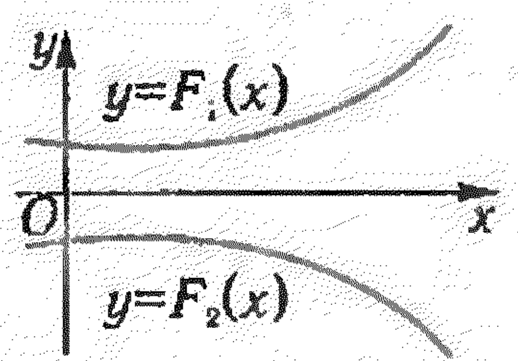


Рис. 167

3°. Знайдіть первісні для функції $y = \frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

4°. Знайдіть первісну для функції $y = \sqrt{x}$, графік якої проходить через точку $A(9; 1)$.

5°. Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, задається формулою $v = 2\sin t + 1$. Знайдіть закон руху цього тіла, якщо в початковий момент часу ($t = 0$) тіло мало координату -1.

6. Відомо, що функція $y = F(x)$ є первісною для функції $y = f(x)$. Які з функцій: 1) $y = F(x + 2)$, 2) $y = F(x) + 2$, 3) $y = 2F(x)$, 4) $y = F(2x)$ обов'язково є первісними для даної функції?

7°. Які з фігур, зображених на рис. 168, а)–г), є криволінійними трапеціями?

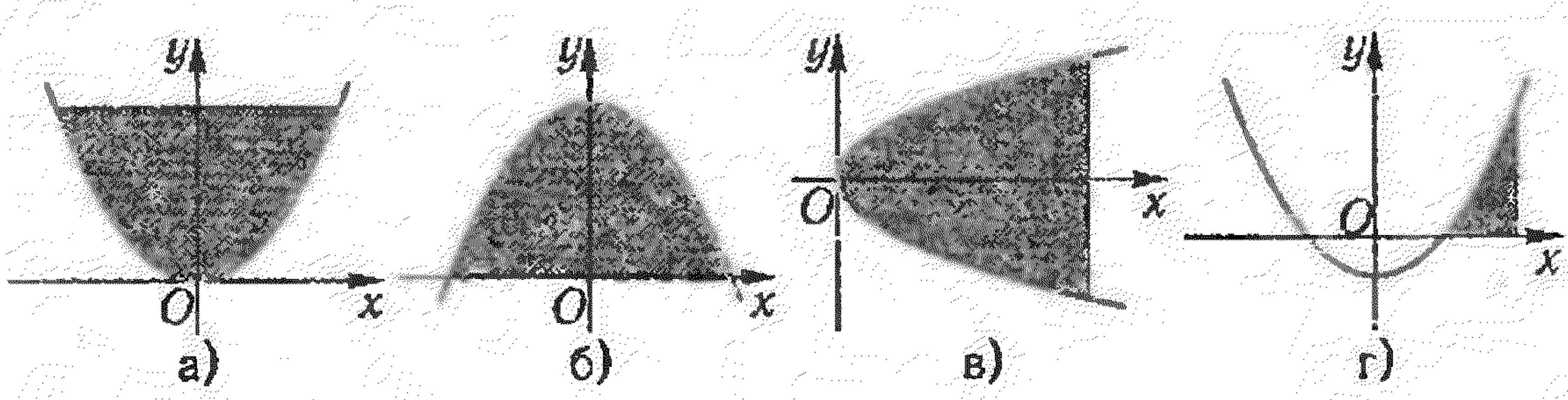


Рис. 168

8. Чому дорівнює інтеграл:

а°) $\int_0^3 f(x)dx$, якщо $\int_3^0 f(x)dx=-1$; б) $\int_a^b f'(x)dx$, якщо $f(b)=f(a)$;

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$?

9°. Чи справджується рівність:

а) $\int_0^1 dx=1$; б) $\int_{-1}^{1} e^x dx=e^{-1}-e$; в) $\int_{-e}^{-1}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{-e}^{-1}$?

10°. Який геометричний зміст має інтеграл $\int_0^3 2dx$?

11. Який шлях пройшла матеріальна точка за проміжок часу [0; 4], якщо вона рухається вздовж координатної прямої зі швидкістю $v=v(t)$, графік якої зображено на: 1) рис. 169; 2) рис. 170?

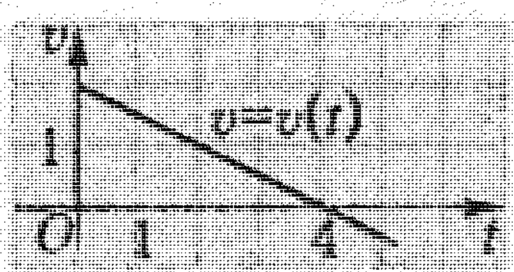


Рис. 169

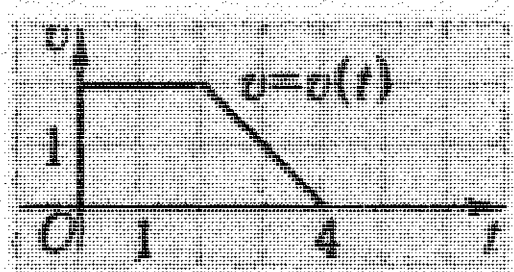


Рис. 170

12°. Точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v=t^2+1$. Який шлях вона пройшла за проміжок часу [0; 3]?

13. Зобразіть фігуру, обмежену лініями: а) $y=2^x$, $y=2$, $x=0$; б) $y=x^2$, $y=x+1$.

14. Чому дорівнює площа фігури, зображеної на:
а°) рис. 171; б°) рис. 172;
в°) рис. 173; г) рис. 174?

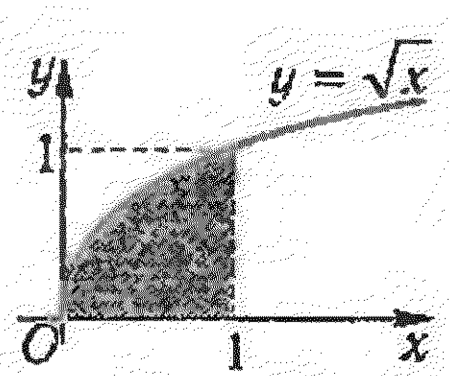


Рис. 171

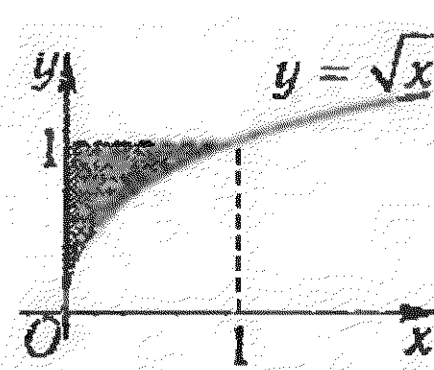


Рис. 172

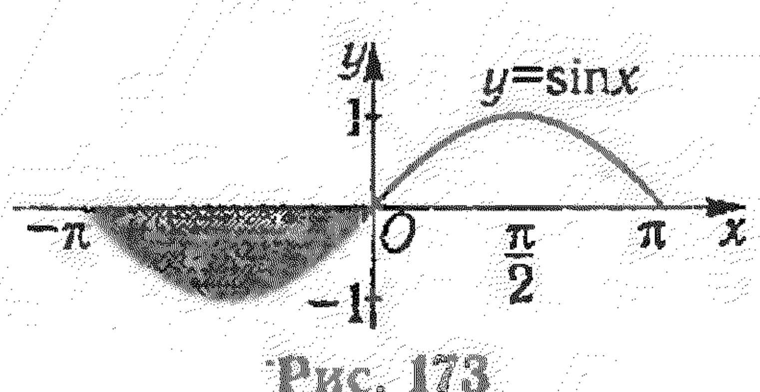


Рис. 173

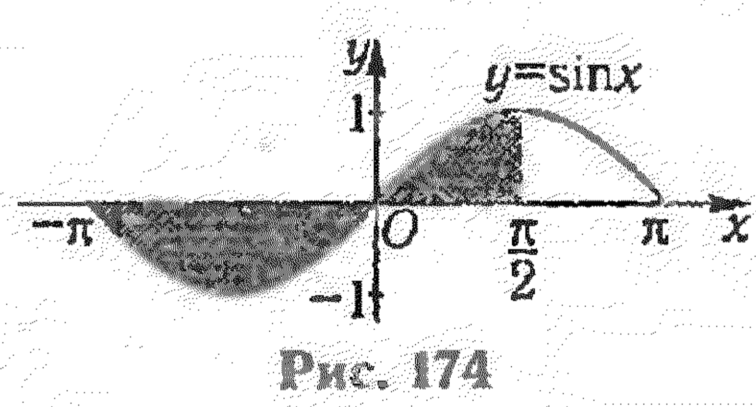


Рис. 174

Відповіді до завдань для самоконтролю

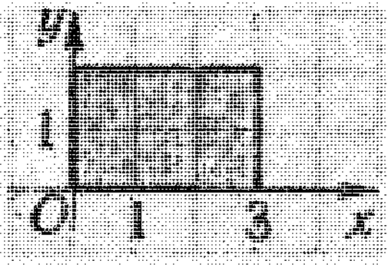


Рис. 175

1. Ні. 2. Ні. 3. $y = \ln x + C$. 4. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$; 5. $x = -2\cos t + t - 1$; 6. 2). 7. г). 8. а) 1; б) 0; в) 0. 9. Правильною є лише рівність а). 10. Площа прямокутника, зображеного на рис. 175. 11. а) 4; б) 6. 12. 12. 14. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 2; г) 3.

Зразок контрольної роботи №4

1. Обчисліть інтеграл:

1°) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{\pi}\right)dx$;   2°) $\int\limits_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right)dx$;

3) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x} - x + 2}{x}dx$;   4*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\left(1 + \operatorname{tg}^2 2x\right)dx$.

2°. Швидкість м'яча, який кинули з поверхні землі вертикально вгору, змінюється за законом $v = 15 - gt$, де v — швидкість, м/с; t — час, с; $g \approx 10$ м/с^2 — прискорення вільного падіння. На яку висоту підніметься м'яч за першу секунду?

3. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:
1°) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
2) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 3$;
3*) $y = x^2 - 1$, $y = \sin \pi x$ $(0 \le x \le 1)$, $x = 0$.

Інтеграл, його геометричний і фізичний зміст

Таблиця 36

Означення інтеграла	Геометричний зміст	Фізичний зміст
$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $y = F(x)$ — первісна для функції $y = f(x)$.	Якщо $f(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$.	Якщо $f(t) \ge 0$, то $\int\limits_{t_0}^T f(t)dt$ — шлях, пройдений точкою, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = f(t)$, за проміжок часу $[t_0; T]$.

Властивості інтеграла

Таблиця 37

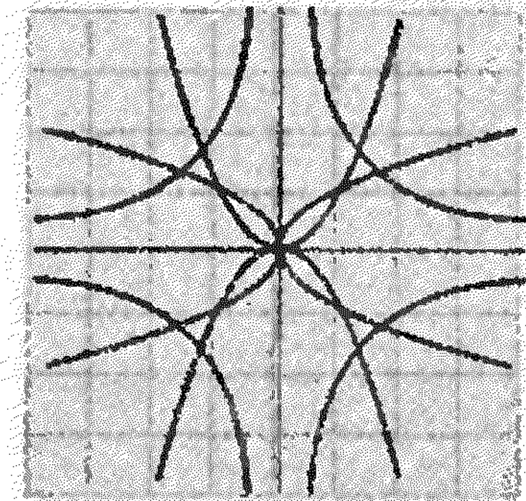
Словесне формулювання	Символічний запис
Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій.	$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.	$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
Якщо c — деяка точка відрізка $[a;b]$, то інтеграл від функції на проміжку $[a;b]$ дорівнює сумі інтегралів від тієї самої функції на проміжках $[a;c]$ і $[c;b]$.	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Похідна та інтеграл у прикладних задачах

Таблиця 38

Величина	Похідна	Інтеграл
s — переміщення, v — швидкість	$v(t)=\frac{ds}{dt}$	$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
q — електричний заряд, I — сила струму	$I(t)=\frac{dq}{dt}$	$q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
φ — кут повороту шківа, ω — кутова швидкість	$\omega(t)=\frac{d\varphi}{dt}$	$\varphi=\int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt$

Історичний коментар



Ідеї інтегрування виникли при обчисленні площ довільних фігур і поверхонь та об'ємів тіл майже 2,5 тис. років тому. Найбільших успіхів при розв'язанні таких задач досяг Архімед (бл. 287 – 212 рр. до н.е.). Його міркування пов'язані з розв'язанням конкретних геометричних задач без використання того, що в їхній основі лежить метод підсумовування як завгодно малих частин фігури. Наприклад, Архімед обчислив площу параболічного сегмента, площу поверхні і об'єм кулі, сегментів тіл, обмежених поверхнею обертання параболи, гіперболи та площиною, і багато ін. І хоча з позицій сучасної математики деякі обчислення майже тотожні, тобто зводяться до схожих інтегралів, Архімед їх розрізняє, проводячи міркування у кожному конкретному випадку спочатку. Тобто Архімед не створив нового числення, а лише побудував основи для його створення.

Творцями вчення про інтеграл є І. Ньютон (1643–1727) і незалежно від нього Г. Лейбніц (1646–1716). Зокрема, вони довели формулу, що носить їхнє ім'я, показали могутність своїх методів, розв'язавши велику кількість фізичних і геометричних задач. Символ інтеграла $\int$ ввів Г. Лейбніц.

На протязі трьох століть вчення про інтеграл розвивалось і вдосконалювалось. Ускладнювались, виходячи з практичних проблем, множини, на яких визначалась підінтегральна функція, розширювався клас функцій. Усе це вело до узагальнення поняття інтеграла, урізноманітнення задач, де він застосовувався. Так, із введенням у математику змінних величин, уведенням похідної і первісної для функцій з'явився новий тип рівнянь, які дають можливість встановлювати різні види функціональних залежностей між величинами. Йдеться про диференціальні рівняння, розгляд яких розпочався у XVII ст. Головним «споживачем» таких рівнянь була фізика.

Великий внесок у розвиток диференціальних рівнянь внесли видатні українські математики М.П. Кравчук (1892–1942), М.М.Боголюбов (1909–1992), Ю.О. Митропольський (1917–2008), Я.Б. Лопатинський (1906–1981) та багато інших.

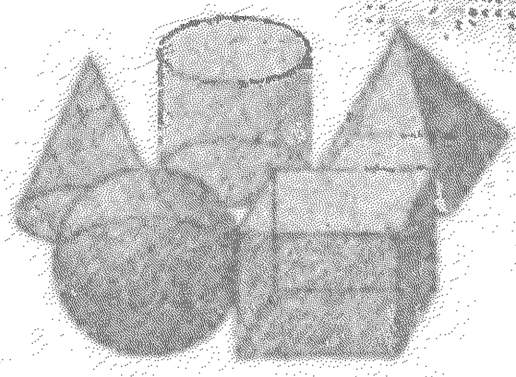
Розділ 5.

ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА І ПОВЕРХНІ

Фізичний світ вражає нас різноманіттям форм, адже кожний реальний об'єкт має свої особливості, які відрізняють його від інших. І в той же час предмети, що оточують нас, мають багато спільних рис, які при описанні їх засобами геометрії дали змогу природно виділити серед них обмежену кількість основних класів геометричних фігур. Цегла, керамічні плитки, дерев'яний брус та й самі будівлі найчастіше мають форму прямокутного паралелепіпеда. Сонце, планети, яблуко, краплю води ми описали б за допомогою геометричної фігури — кулі. Характеризуючи форму стовбурів дерев, чашки для кави, олівця, ми насамперед згадаємо прямий круговий циліндр (і, можливо, конус). Отож, виділення і вивчення важливих видів геометричних фігур і є завданням даного розділу.

Що в першу чергу бачить спостерігач, дивлячись на предмет? Звичайно, його «зовнішність». Тому вивчення будови поверхонь геометричних тіл належить до першочергових завдань. Заглянути всередину тіл допоможуть найбільш характерні перерізи. А ще цікавими і важливими в застосуваннях є властивості симетрії тіл, відношення між однаковими і різними фігурами.

Звернемо увагу на те, що раніше при введенні основних геометричних тіл віддавалась перевага конструктивному методу. При цьому ідея конструювання є важливою і глибокою. Адже зручно моделювати реальні фізичні тіла, що мають складну будову, геометричними тілами, сконструйованими з деякої кількості основних тіл.

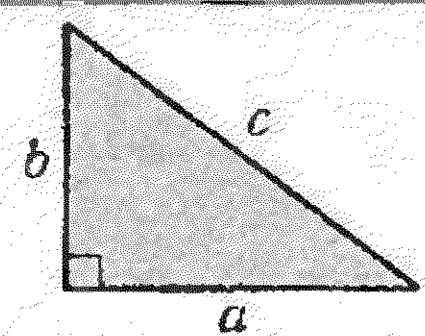
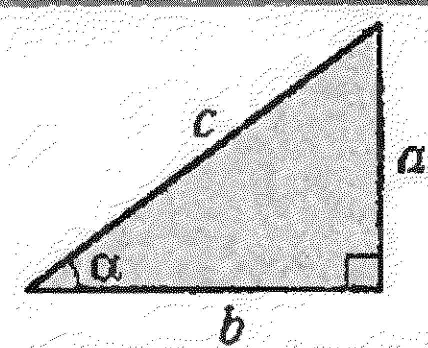
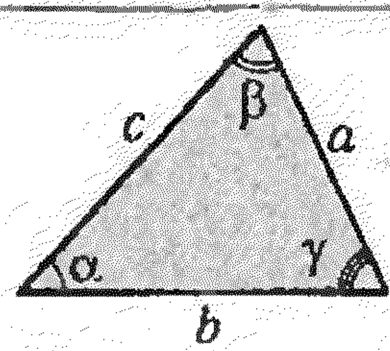


Готуємось до вивчення теми «Геометричні тіла і поверхні»

Для вивчення теми «Геометричні тіла і поверхні» знадобляться планіметричні поняття і факти, а ще відомості про паралельність і перпендикулярність прямих і площин у просторі. Для підготовки до вивчення теми наведено найважливіший матеріал у вигляді таблиць.

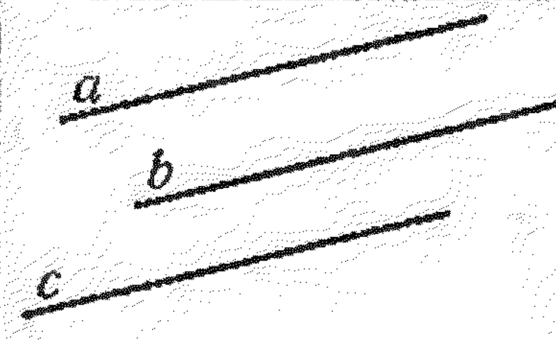
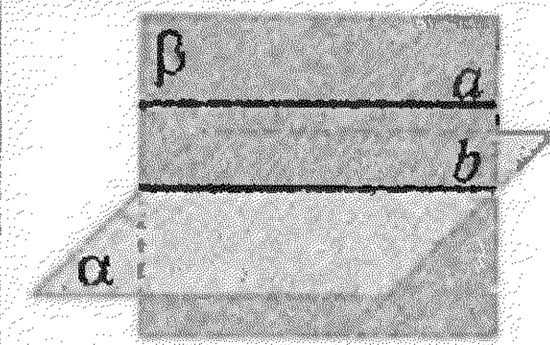
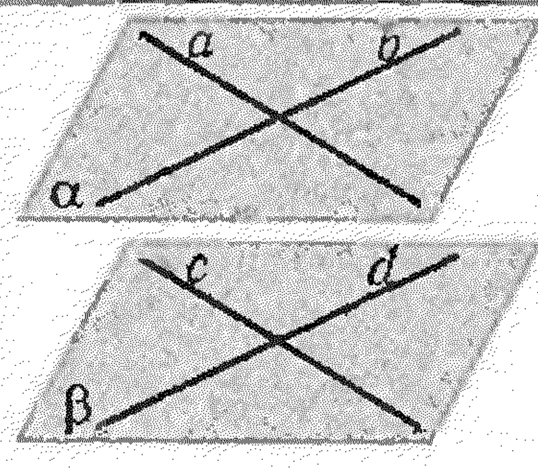
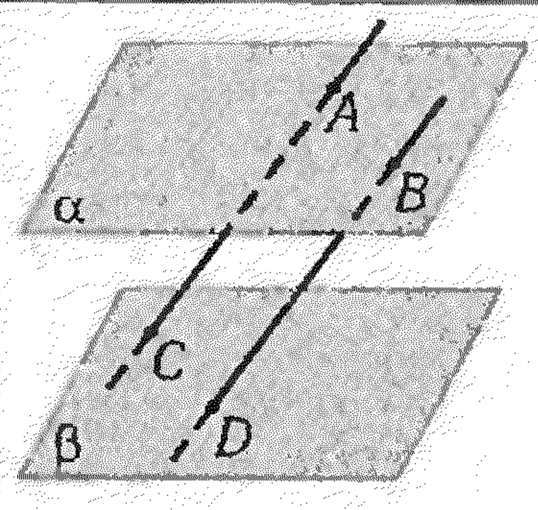
Метричні співвідношення у трикутнику

Таблиця 39

Твердження або його назва	Символічний запис	Геометрична ілюстрація
Теорема Піфагора	$c^2 = a^2 + b^2$	
Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$	
Теорема синусів	$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, де R — радіус описаного кола	
Теорема косинусів	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$	

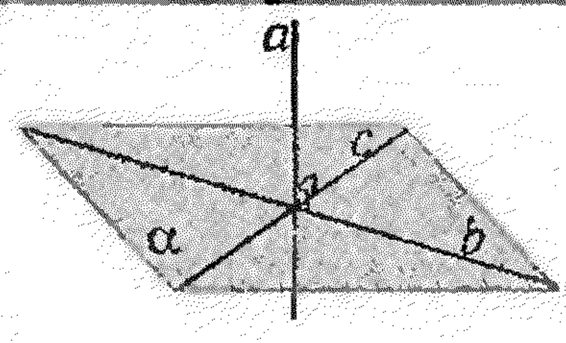
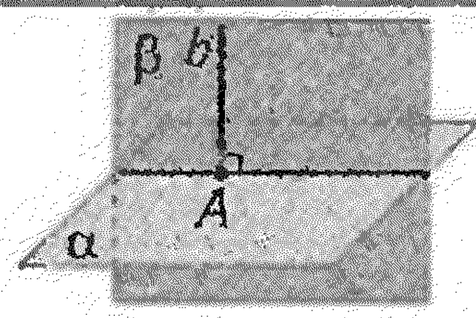
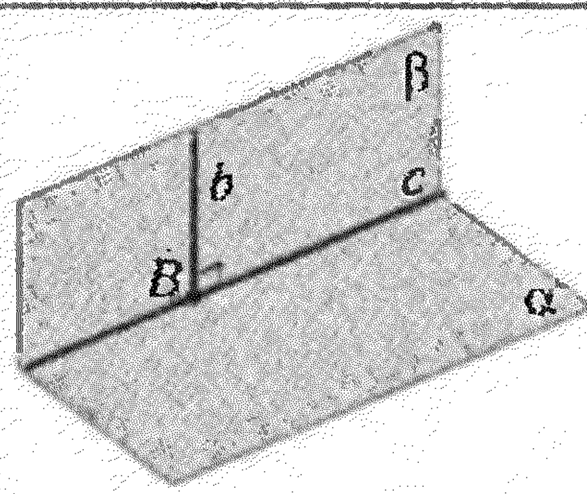
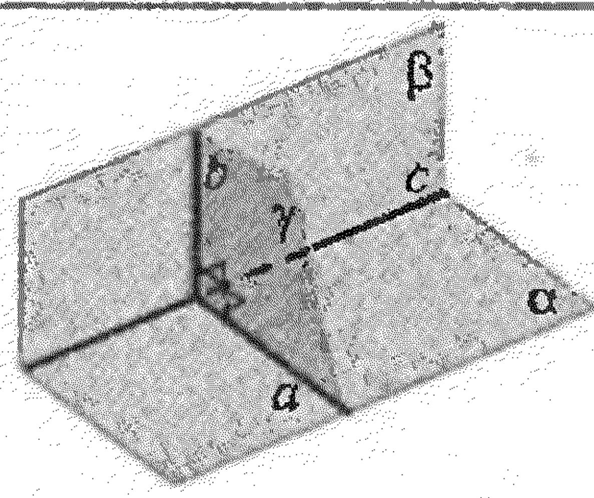
Паралельність прямих і площин у просторі

Таблиця 40

Назва твердження	Формулювання	Геометрична інтерпретація
Ознака паралельності прямих у просторі	Якщо дві прямі паралельні третій, то вони паралельні між собою.	 $a \parallel b,\ b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$
Ознака паралельності прямої і площини	Якщо пряма, що не лежить у даній площині, паралельна деякій прямій площини, то вона паралельна самій площині.	 $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$
Ознака паралельності двох площин	Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.	 $a \parallel c,\ b \parallel d \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
Про відрізки паралельних прямих, що містяться між паралельними площинами	Відрізки паралельних прямих, що містяться між паралельними площинами, рівні між собою.	 $\alpha \parallel \beta,\ AB \parallel CD \Rightarrow$ $\Rightarrow AB = CD$

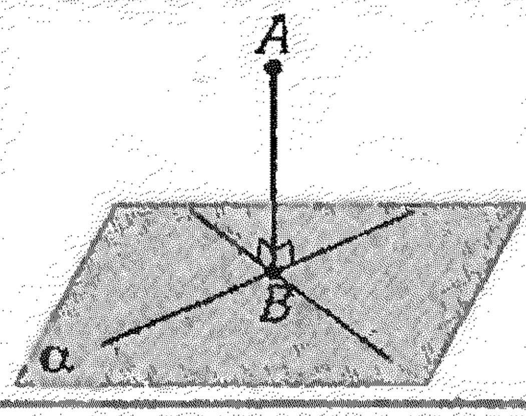
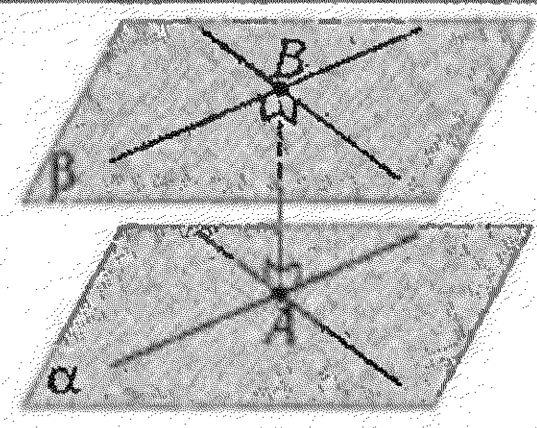
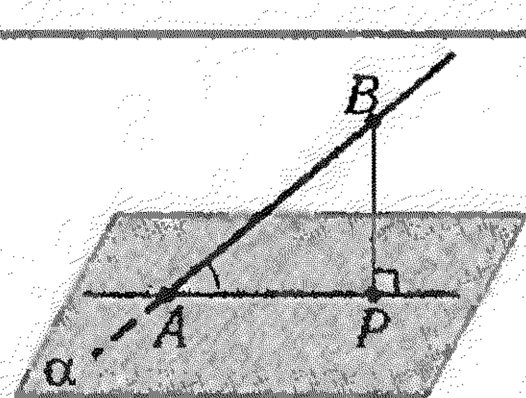
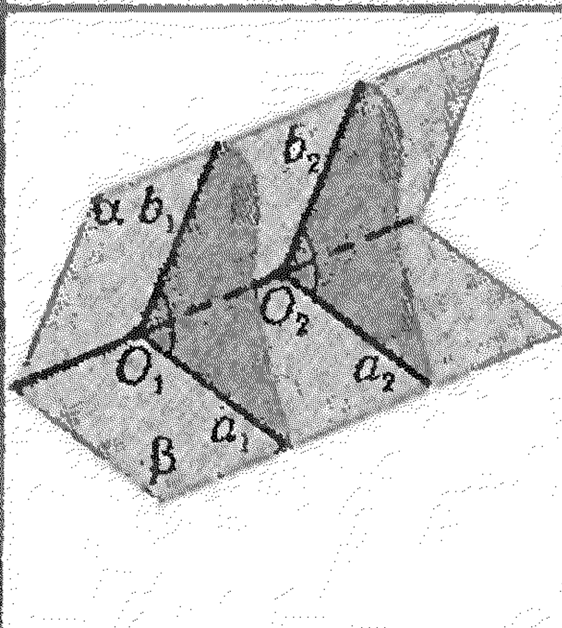
Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Таблиця 41

Назва твердження	Формулювання твердження	Геометрична інтерпретація
Ознака перпендикулярності прямої та площини	Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і належать даній площині, то вона перпендикулярна до цієї площини.	 $a \perp b, a \perp c,\ b \subset \alpha,$ $c \subset \alpha \Rightarrow a \perp \alpha$
Ознака перпендикулярності двох площин	Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.	 $b \perp \alpha, b \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$
Теорема про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин	Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, що належить одній площині і перпендикулярна до лінії перетину цих площин, перпендикулярна до другої площини.	 $\alpha \perp \beta, b \subset \beta, c = \alpha \cap \beta,$ $b \perp c \Rightarrow b \perp \alpha$
Теорема про площину, перпендикулярну до лінії перетину площин	Площина, перпендикулярна до лінії перетину двох перпендикулярних площин, перетинає ці площини по перпендикулярних прямих.	 $\alpha \perp \beta, c = \alpha \cap \beta, \gamma \perp c,$ $a = \alpha \cap \gamma, b = \beta \cap \gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow b \perp a$

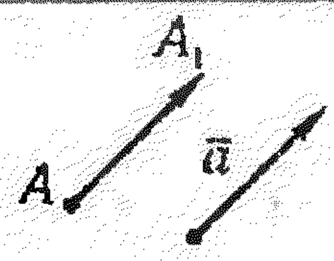
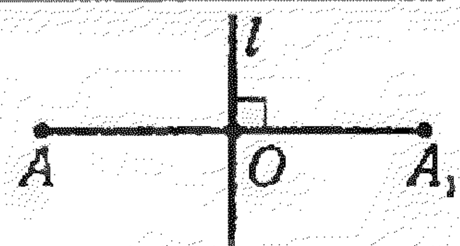
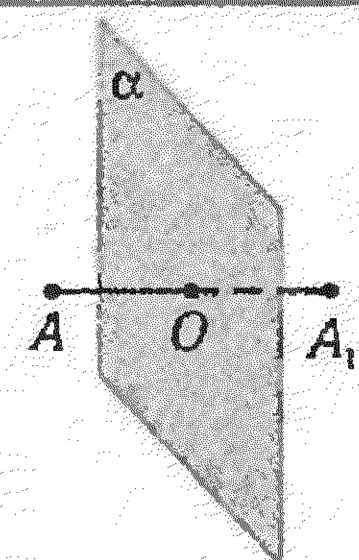
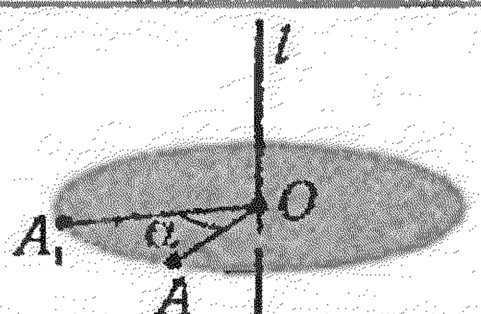
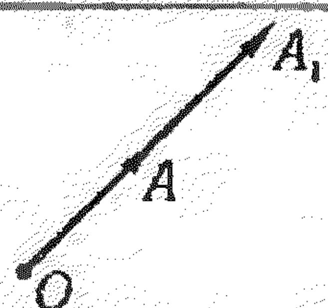
Вимірювання кутів і відстаней у просторі

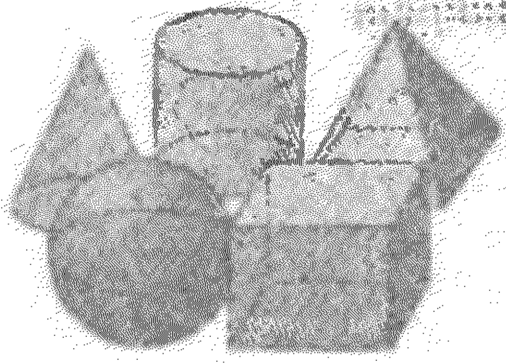
Таблиця 42

Назва твердження чи означення	Формулювання	Геометрична інтерпретація
Відстань від точки до площини	***Відстань від точки до площини*** дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини.	
Відстань між паралельними площинами	***Відстань між паралельними площинами*** дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з довільної точки однієї площини до другої площини.	
Кут між прямою і не перпендикулярною до неї площиною	***Кутом між прямою і не перпендикулярною до неї площиною*** називається кут між прямою і її ортогональною проекцією на цю площину.	
Кут між двома площинами, що перетинаються	***Кутом між двома площинами, що перетинаються***, називається кут між прямими, які утворюються при перетині даних площин третьою площиною, перпендикулярною до лінії перетину перших двох.	

Геометричні перетворення в просторі

Таблиця 43

Назва і позначення	Геометрична інтерпретація	Символічний запис
Паралельне перенесення на вектор $\bar{a}$ $T_{\bar{a}}$		$\overline{AA_1} = \bar{a} \Rightarrow T_{\bar{a}}(A) = A_1$
Центральна симетрія відносно точки O Z_0		$AO = OA_1 \Rightarrow S_O(A) = A_1$
Осьова симетрія відносно прямої l S_l		$AA_1 \perp l,\ O = l \cap AA_1,$ $AO = OA_1 \Rightarrow S_l(A) = A_1$
Симетрія відносно площини α S_α		$AA_1 \perp \alpha,\ O = \alpha \cap AA_1,$ $AO = OA_1 \Rightarrow S_\alpha(A) = A_1$
Поворот навколо осі l на кут α R_l^α		$AOA_1 \perp l,\ AO = OA_1,$ $\angle AOA_1 = \alpha \Rightarrow R_l^\alpha(A) = A_1$
Гомотетія з центром O і коефіцієнтом k H_o^k		$\overline{OA_1} = k \cdot \overline{OA} \Rightarrow$ $\Rightarrow H_o^k(A) = A_1$



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Геометричні тіла і поверхні»

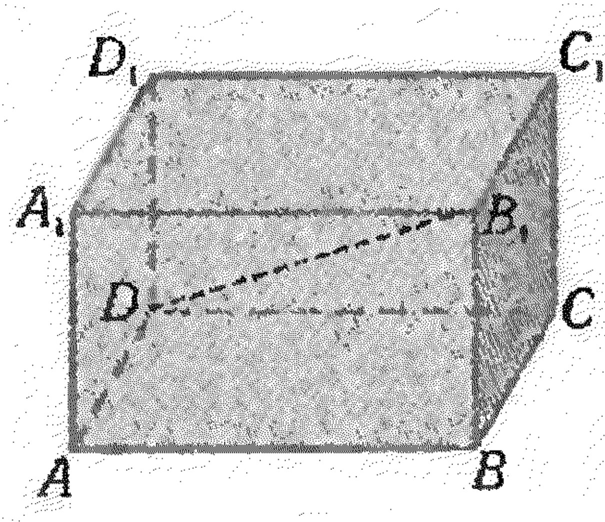
1. З однієї точки, яка розташована поза прямою, проведено до цієї прямої перпендикуляр довжиною 6 см і похилу довжиною 10 см. Довжина проекції похилої на пряму дорівнює ...
   А. 4 см. **Б.** $\sqrt{136}$ см. **В.** 8 см.
   Г. величині, яка відрізняється від наведених.
2. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює $60°$, а катет, що прилягає до нього, дорівнює 12 см. Гіпотенуза дорівнює ...
   А. $12\sqrt{3}$ см. **Б.** 18 см. **В.** $18\sqrt{3}$ см. **Г.** 24 см.
3. Два рівних відрізки точкою перетину поділяються навпіл. Кінці їх послідовно з'єднали. Отриманий чотирикутник є ...
   А. трапецією. **Б.** квадратом.
   В. ромбом. **Г.** прямокутником.
4. Визначте взаємне розміщення двох кіл, радіуси яких дорівнюють, відповідно, 4 см і 6 см, а центри віддалені один від одного на 8 см.
   А. Одне коло знаходиться всередині другого.
   Б. Перетинаються у двох точках.
   В. Одне коло знаходиться зовні другого.
   Г. Дотикаються одне до одного.
5. У колі провели хорду довжиною 8 см, яка віддалена від центра на 3 см. Діаметр кола дорівнює ...
   А. 5 см. **Б.** 12 см. **В.** 10 см.
   Г. числу, яке відрізняється від наведених.
6. Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін трикутника, є точкою перетину ...
   А. висот трикутника. **Б.** медіан трикутника.
   В. бісектрис трикутника.
   Г. серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

7. Чому дорівнює внутрішній діаметр труби, якщо її зовнішній діаметр дорівнює 100 мм, а товщина стінки — 5 мм?

А. 95 мм. Б. 90 мм. В. 80 мм. Г. 97,5 мм.

8. На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед. Як розміщені прямі DB_1 і D_1C_1?

А. Перетинаються.
Б. Мимобіжні.
В. Паралельні.
Г. Визначити неможливо.



9. Прямі a і b — паралельні. Скільки площин можна провести через пряму a паралельно прямій b?

А. Жодної. Б. Одну. В. Жодної чи одну. Г. Безліч.

10. Пряма a лежить у площині β, а пряма m паралельна прямій a і має спільну точку з площиною β. Як розміщені пряма m і площина β?

А. Пряма m лежить у площині β.
Б. Перетинаються. В. Паралельні.
Г. Можуть розміщуватися як завгодно.

11. Якщо діагоналі паралелограма паралельні деякій площині α, то площина паралелограма і площина α ...

А. мають спільні точки. Б. збігаються.
В. паралельні. Г. перетинаються.

12. Якщо одна з двох площин перпендикулярна до прямої, а друга площина паралельна цій прямій, то ці площини ...

А. перпендикулярні. Б. збігаються. В. паралельні.
Г. або паралельні, або збігаються.

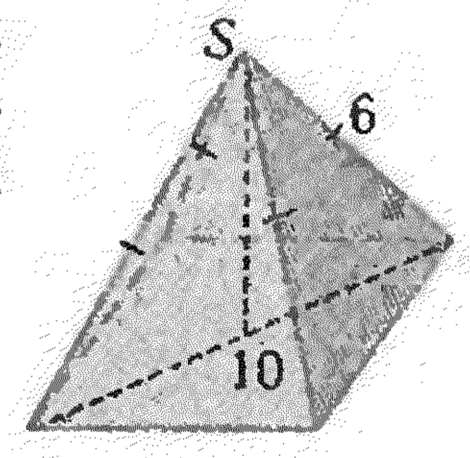
13. Телефонний дріт протягнуто від телефонного стовпа, де він прикріплений на висоті 8 м, до будинку, де його прикріпили на висоті 20 м. Відстань між стовпом і будинком дорівнює 9 м. Дріт не провисає. Його довжина дорівнює ...

А. 9 м. Б. 12 м. В. 15 м. Г. 21 м.

14. З центра O кола з радіусом 5 см проведено до площини кола перпендикуляр OA завдовжки 5 см. Під яким кутом з точки A видно діаметр кола?

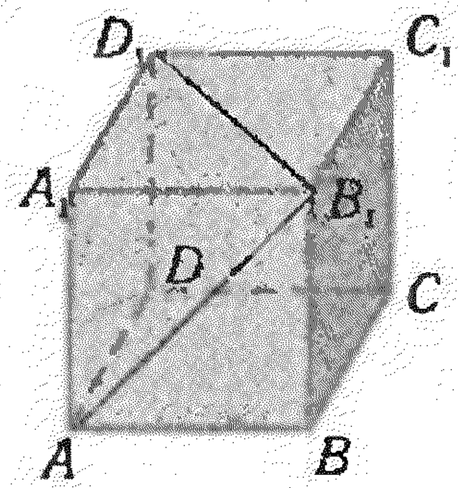
А. 30°. Б. 45°. В. 60°. Г. 90°.

15. Точка S, що не лежить у площині прямокутника з діагоналлю 10 см, віддалена від кожної з його вершин на 6 см. Відстань від точки S до площини прямокутника дорівнює ...



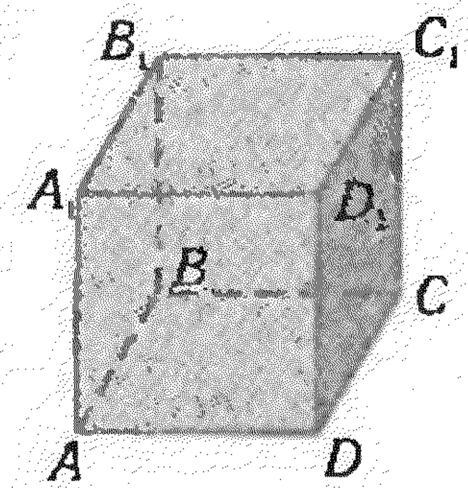
А. $\sqrt{3}$ см. Б. $\sqrt{11}$ см.
В. $\sqrt{61}$ см. Г. 4 см.

16. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чому дорівнює кут між прямими B_1A і B_1D_1?



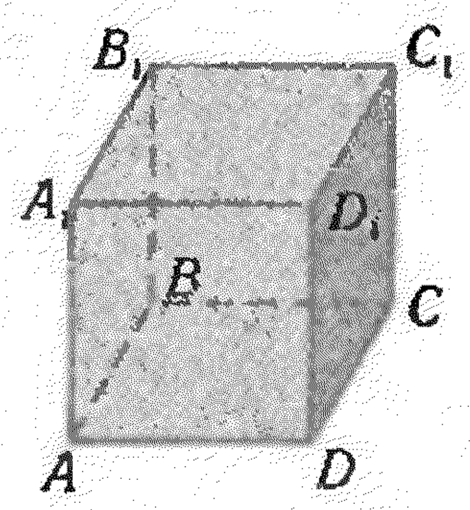
А. 90°.
Б. 60°.
В. 45°.
Г. 30°

17. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пряма BA_1 утворює із площиною D_1DA кут ...

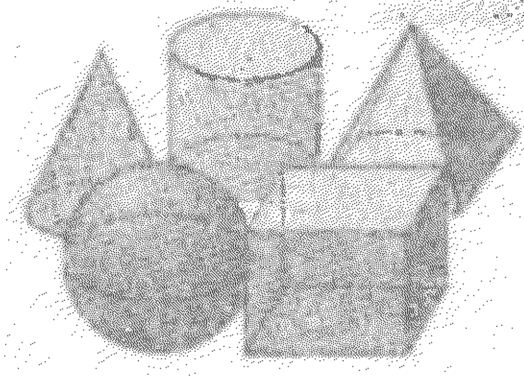


А. 30°.
Б. 45°.
В. 60°.
Г. 90°.

18. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чому дорівнює кут між площинами A_1B_1C і D_1DC?



А. 90°.
Б. 60°.
В. 45°.
Г. 30°.



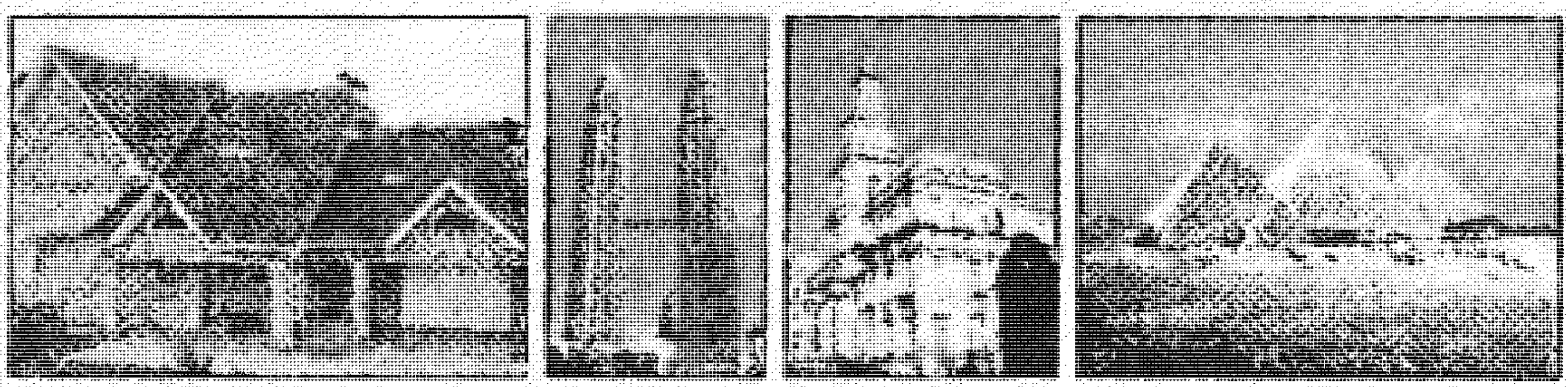
§12. Піраміди і конуси

Даний параграф присвячено розгляду двох класів фігур, представники яких вам добре відомі — це тетраедри і прямі кругові конуси. Їхня зовнішня схожість є відображенням однаковості побудови і відповідних властивостей. Дослідження будови і властивостей пірамід і конусів є головною метою параграфа.

1. Піраміди

Б

Частини багатьох споруд мають пірамідальну форму (рис.176, а–в). Безумовно, до них належать славетні єгипетські піраміди (рис. 176, г).



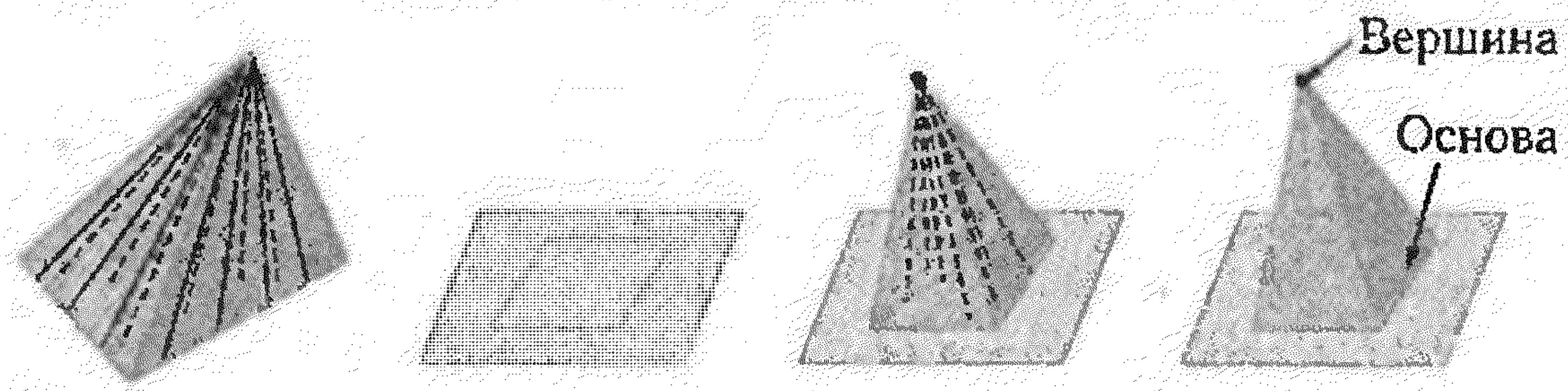
а) б) в) г)

Рис. 176

Нагадаємо деякі означення з курсу математики 10 класу стосовно пірамід та їхньої побудови.

Найпростішою пірамідою є тетраедр. Його можна розглядати як фігуру, утворену з точок відрізків, що сполучають одну з його вершин із точками протилежної грані — трикутника (рис. 177, а). Такий підхід до побудови тетраедра неважко узагальнити, замінивши трикутник на довільний многокутник.

Нехай дано многокутник і точка поза площиною цього многокутника (рис. 177, б). З'єднаємо відрізками усі точки многокутника з даною точкою (рис. 177, в). Фігура, яка складається з усіх точок побудованих відрізків, називається ***пірамідою***, даний мно-



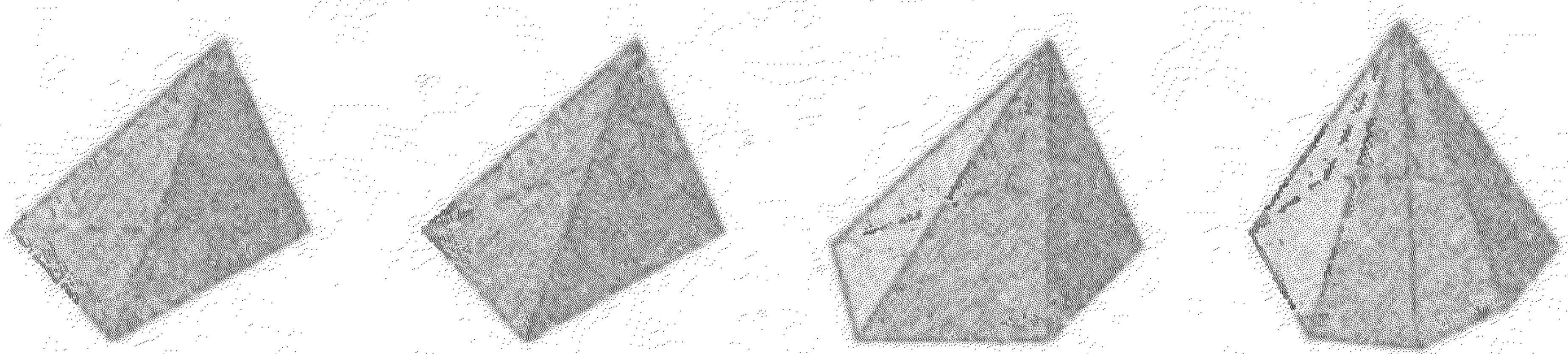
а) б) в) г)

Рис. 177

гокутник — ***основою піраміди***, а дана точка — її ***вершиною*** (рис. 177, г).

> ***Піраміда*** — *від грецького πυραμις (pyramis), мабуть, від єгипетського per me ous — бічне ребро споруди.*

Залежно від кількості сторін основи розрізняють трикутні, чотирикутні, ..., n-кутні піраміди (рис. 178, а–г).



а) б) в) г)

Рис. 178

Нагадаємо, трикутну піраміду називають ще тетраедром.

> ***Тетраедр*** — *від грецьких τετραρεζ (tetrares) — чотири, у складних словах τετρα- (tetra-) і εζρα (hedra) — основа, поверхня, сторона — чотиригранник, усі грані якого трикутники.*

Відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються ***бічними ребрами піраміди***. Сторони основи піраміди теж вважаються ребрами піраміди. Відрізки, які сполучають вершину піраміди з усіма точками довільної сторони основи, утворюють трикутник (рис. 179),

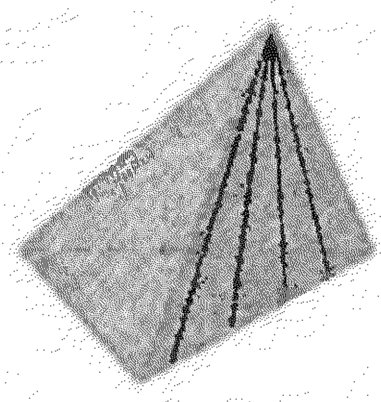
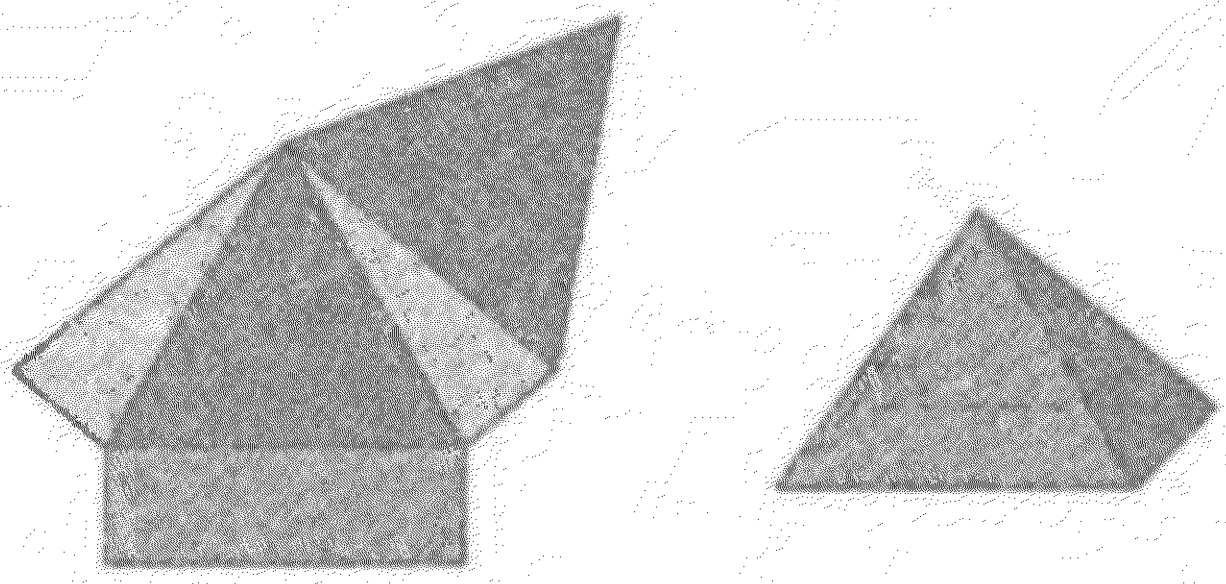


Рис. 179

який називається ***бічною гранню піраміди***. Основа піраміди також є гранню піраміди.

Зверніть увагу на те, що у тетраедра кожна грань може слугувати основою.

Поверхня піраміди складається з основи і бічних граней. На рис. 180, а) маємо розгортку поверхні чотирикутної піраміди, зображення якої подано на рис. 180, б). Ця розгортка утворена «розрізанням» поверхні піраміди по ребрах так, щоб усі грані можна було розмістити («розгорнути») на площині.

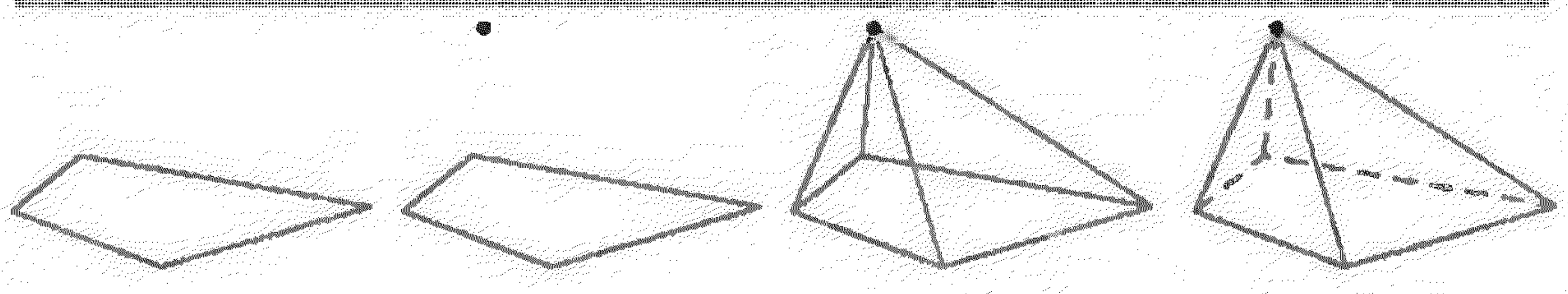


а) б)

Рис. 180

Побудова зображення піраміди складається з:

1) побудови зображення основи піраміди (рис. 181, а);
2) вибору зображення вершини піраміди (рис. 181, б);
3) побудови зображення бічних ребер піраміди шляхом сполучення зображення вершини піраміди із зображенням вершин основи (рис. 181, в);
4) виділення видимих і невидимих ребер (рис. 181, г).



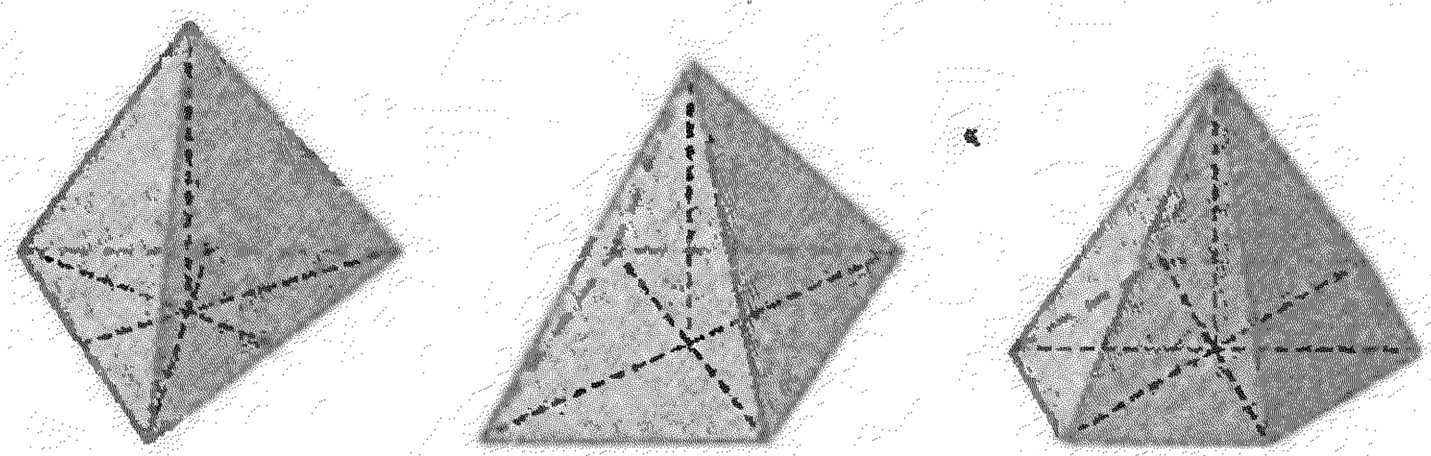
а) б) в) г)

Рис. 181

Серед усього різномаїття пірамід на особливу увагу заслуговують ***правильні піраміди***.

Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а вершина ортогонально проектується в центр цього многокутника.

При зображенні правильної піраміди зображенням вершини слугує кінець перпендикуляра до площини основи, проведеного із зображення центра основи. Вертикальність цього відрізка підкреслює правильність піраміди. На рис. 182, а), б), в) зображено правильні трикутну, чотирикутну і шестикутну піраміди.



а) б) в)

Рис. 182

Правильна трикутна піраміда, усі грані якої є рівними рівносторонніми трикутниками, називається ***правильним тетраедром***.

Відстань від вершини піраміди до площини основи називається ***висотою піраміди***. Вона дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з вершини піраміди до площини основи (рис. 183). Цей перпендикуляр також називають висотою піраміди.

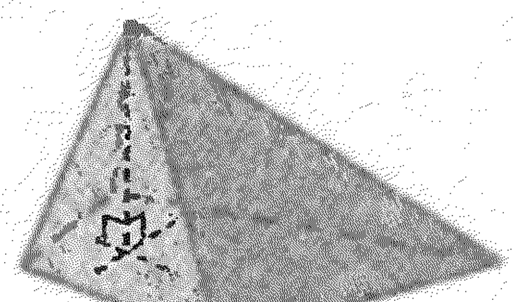


Рис. 183

Найважливіші властивості правильних пірамід містяться в наступному твердженні.

Теорема 1 *(про властивості правильної піраміди).*
У правильній піраміді бічні ребра рівні між собою і однаково нахилені до площини основи, а бічні грані є рівними між собою рівнобедреними трикутниками, які однаково нахилені до площини основи.

Доведення цієї теореми буде наведено нижче.

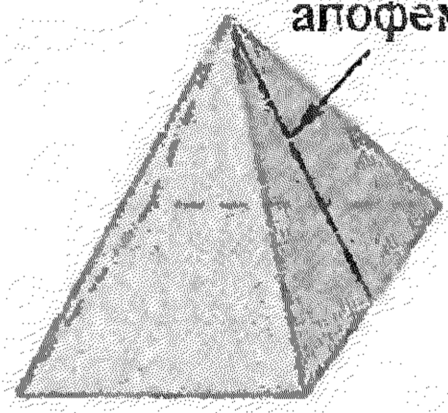


Рис. 184

Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають ***апофемою*** (рис. 184).

> ***Апофема*** — *від грецького* αποτιθημι *(apotithemi) — відкладаю набік, складається з* απο *(apo) — від, з, із і* θεμα *(thema) — покладене, поставлене.*

Переріз піраміди з опуклою основою площиною, яка проходить через два її бічні ребра, що не лежать в одній грані, є трикутник (рис. 185, а).

Переріз n-кутної піраміди площиною, паралельною основі, є n-кутник, оскільки така площина перетинає усі бічні ребра піраміди (рис. 185, б).

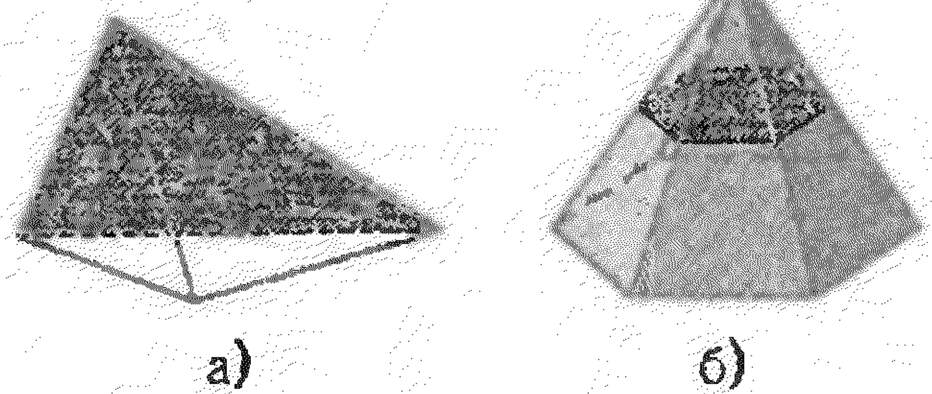


Рис. 185

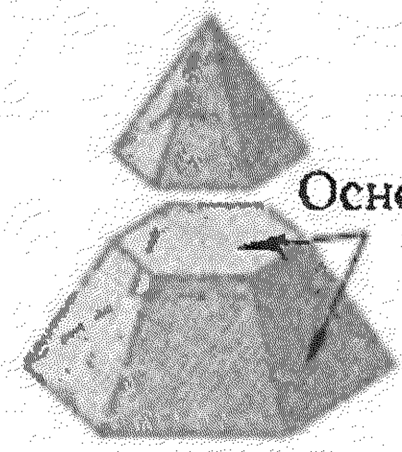


Рис. 186

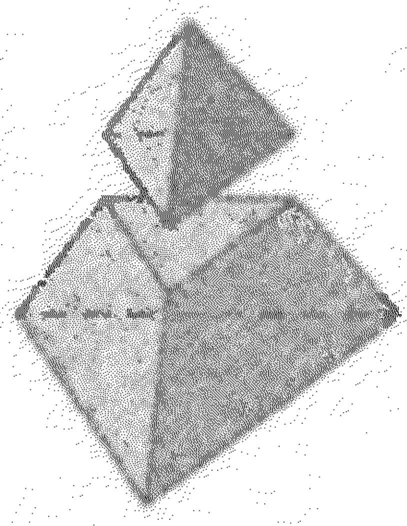


Рис. 187

Переріз піраміди площиною, паралельною основі, розтинає піраміду на дві фігури (рис. 186). Одна з них є пірамідою. Другу називають ***зрізаною пірамідою***. Поверхня n-кутної зрізаної піраміди складається з двох многокутників, які називають ***основами***, і n трапецій (чому?), які називають ***бічними гранями***. Зрізана піраміда, яку дістали з правильної піраміди, також називається ***правильною***. Бічні грані правильної зрізаної піраміди є рівними рівнобічними трапеціями (рис. 187).

Приклад 1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 8 см нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайти:

1) висоту піраміди;

2) апофему піраміди;
3) кут нахилу бічної грані до площини основи;
4) площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через середини суміжних ребер основи піраміди перпендикулярно до основи.

☐ Побудуємо зображення даної піраміди $SABCD$ (рис. 188).Основою піраміди є квадрат $ABCD$ зі стороною 8 см, O — точка перетину діагоналей основи. За властивостями правильної піраміди, $SO \perp ABCD$, $SA = SB = SC = SD$, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = 60°$. Користуючись наведеними даними, знайдемо шукані величини.

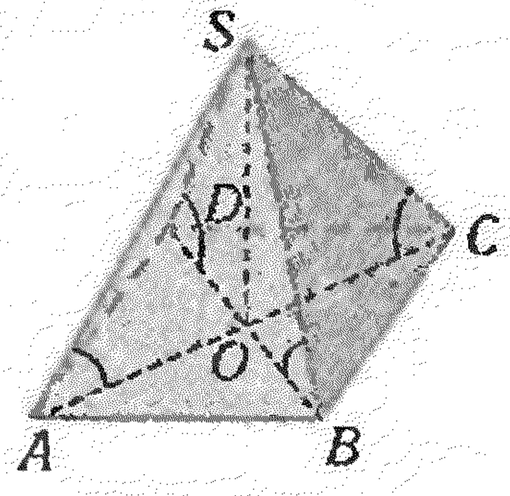


Рис. 188

1) Висота H піраміди дорівнює довжині відрізка SO. З прямокутного трикутника SAO маємо:

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} \angle SAO .$$

Оскільки $AO = \frac{1}{2}AC$, а діагональ AC дорівнює $8\sqrt{2}$ см, то

$$H = 4\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

2) Апофему h піраміди можна знайти з прямокутного трикутника SOM, де M — основа висоти SM у трикутнику SBC (рис.189). Оскільки M — середина BC, то $OM = \frac{1}{2}AB = 4$ (см) і, за теоремою Піфагора, маємо:

$$h = SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{96+16} = 4\sqrt{7} \text{ (см)}.$$

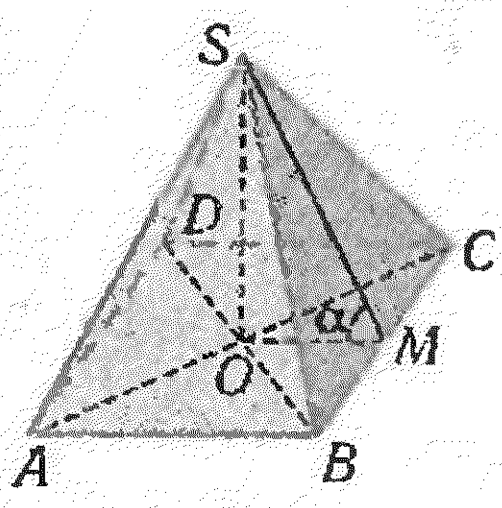


Рис. 189

3) Кут нахилу α бічної грані до площини основи дорівнює куту SMO, оскільки прямі MS і MO перпендикулярні до лінії перетину BC площин ABC і SBC (рис. 189). З прямокутного трикутника SOM маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{OM} = \frac{4\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{6} .$$

4) Побудуємо переріз піраміди площиною, яка проходить через середини M і N ребер AB і BC основи піраміди перпендикулярно до основи. Візьмемо середину P ребра SB і сполучимо її з точками M і N (рис. 190). Трикутник MPN є шуканим перерізом. Справді, $PN \parallel SA$, $PM \parallel SC$, за властивістю середньої лінії трикутника. За ознакою паралельності площин, площини MPN і ASC паралель-

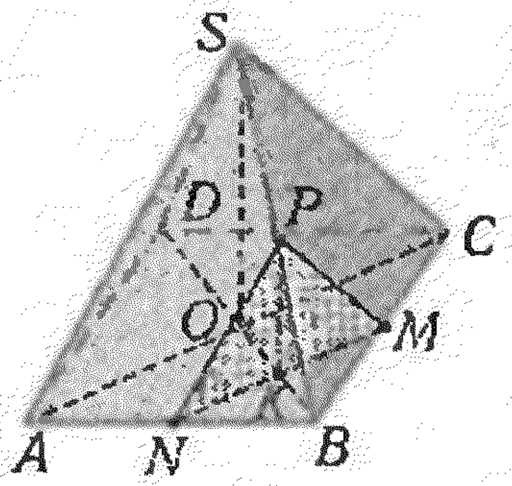
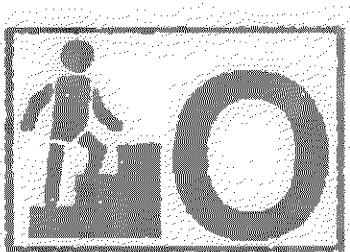


Рис. 190

ні. Оскільки площина ASC перпендикулярна до площини основи, бо вона проходить через перпендикуляр SO до неї, то і площина MPN перпендикулярна до площини основи (чому?).

Знайдемо площу S рівнобедреного трикутника MPN. Точка K є точкою перетину діагоналі BD і прямої MN, тому $KO = KB$, $KP \perp MN$. У трикутнику SOB відрізок KP є середньою лінією. Тому $KP = \frac{1}{2}SO = 2\sqrt{6}$ (см). Оскільки $MN = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{2}$ (см), то $S = \frac{1}{2}MN \cdot PK = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$ (см²). ■

Відповідь. 1) $4\sqrt{6}$ см; 2) $4\sqrt{7}$ см; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$; 4) $8\sqrt{3}$ см².



Наведемо доведення теореми 1 про основні властивості правильної піраміди.

Дано: $SA_1A_2A_3 \ldots$ — правильна піраміда (рис. 191).

Довести: 1) бічні ребра рівні: $SA_1 = SA_2 = SA_3 = \ldots$;

2) бічні ребра однаково нахилені до площини основи: $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \angle SA_3O = \ldots$;

3) бічні грані є рівними трикутниками: $\Delta SA_1A_2 = \Delta SA_2A_3 = \ldots$;

4) бічні грані однаково нахилені до площини основи.

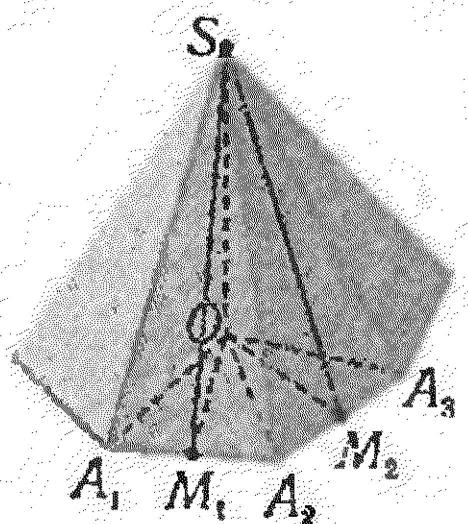


Рис. 191

☐ Зрозуміло, що сформульоване твердження достатньо довести для двох суміжних граней. Тому на рис. 191 зображено лише фрагмент піраміди: центр основи піраміди O, дві суміжні грані A_1SA_2 і A_2SA_3. Трикутники SOA_1 і SOA_2 є прямокутними, оскільки $SO \perp OA_1$ і $SO \perp OA_2$, і рівними, бо один катет SO у них спільний, а інші катети OA_1 і OA_2 рівні. Тому рівні у них і гіпотенузи SA_1 і SA_2, а також кути SA_1O і SA_2O (рис. 192). Але кутові міри кутів SA_1O та SA_2O і є кутами нахилу ребер SA_1 і SA_2 до площини основи піраміди (чому?). Аналогічно доводять рівність ребер SA_2 і SA_3, кутів SA_2O і SA_3O і т. д.

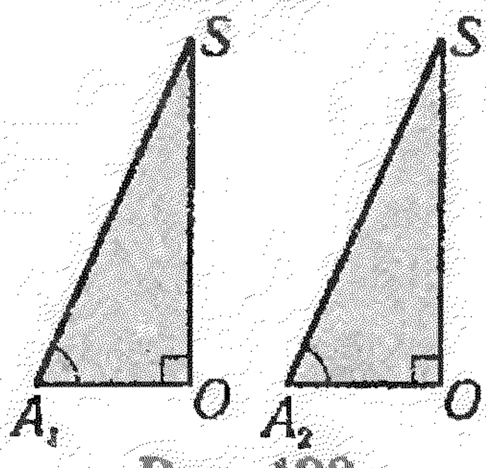


Рис. 192

Із доведеного вище випливає, що бічними гранями піраміди є рівнобедрені трикутники з рівними бічними сторонами. Основи цих трикутників теж рівні, оскільки вони є сторонами правильного многокутника. Тому бічними гранями піраміди є рівні між собою рівнобедрені трикутники. Кут нахилу грані A_1SA_2 до площини основи вимірюється лінійним кутом SM_1O, де M_1 — середина ребра A_1A_2; $SM_1 \perp A_1A_2$, $OM_1 \perp A_1A_2$. Аналогічну роль відіграє кут SM_2O для грані A_2SA_3, де M_2 — середина ребра A_2A_3. Оскільки трикутники SM_1O і SM_2O рівні між собою (доведіть це), то рівними є кути SM_1O і SM_2O. Тобто бічні грані A_1SA_2 і A_2SA_3 однаково нахилені до площини основи. ■

Правильні піраміди мають певні властивості симетрії, які визначаються властивостями симетрії їхніх основ. Наприклад, основою правильної чотирикутної піраміди є квадрат (рис. 193, а). Квадрат має чотири осі симетрії (рис. 193, б), кожна з них визначає площину симетрії піраміди, яка проходить через висоту піраміди SO (рис. 193, в). Неважко переконатись, що пряма SO є віссю симетрії піраміди $SABCD$, оскільки точка O є центром симетрії основи. Повороти простору навколо прямої SO на кути, які відображають основу на себе (90°, 180°, 270°, ...) відображають також і піраміду $SABCD$ на себе.

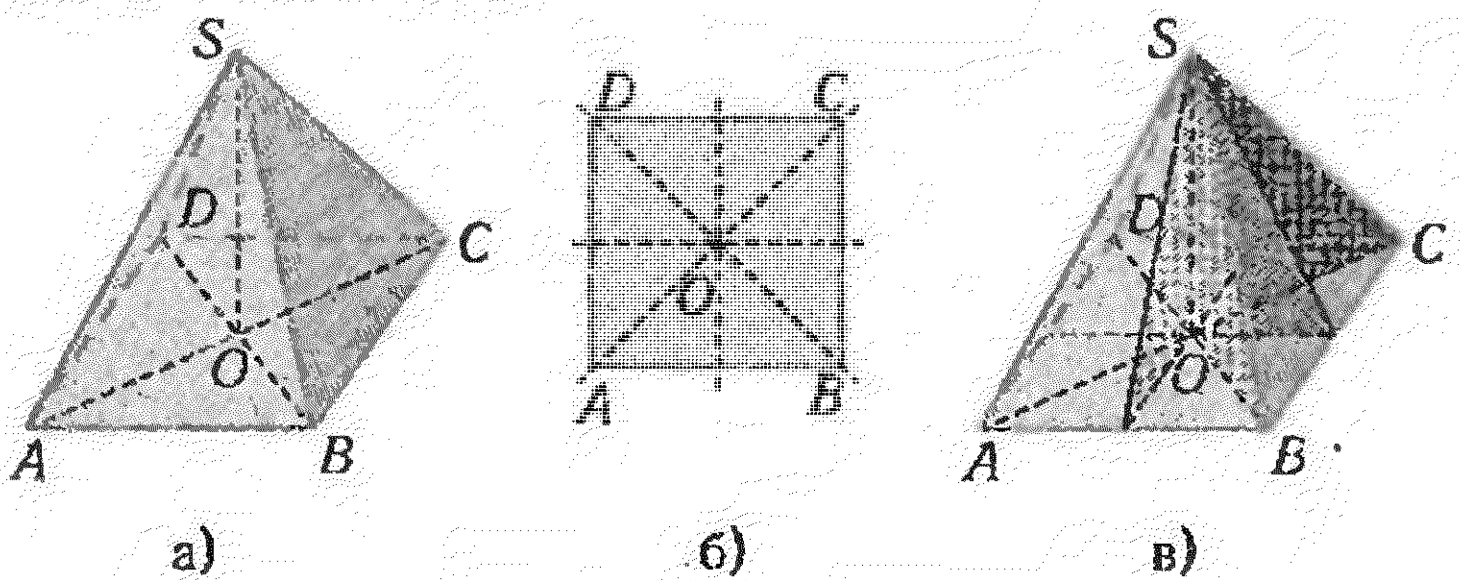


Рис. 193

Приклад 2. Основою піраміди є прямокутник із сторонами 6 см і 8 см. Кути між бічними ребрами піраміди і площиною основи дорівнюють по 60°. Обчислити:
1) висоту піраміди;
2) бічне ребро піраміди;
3) висоти бічних граней піраміди, проведені з вершини піраміди;
4) величини двогранних кутів при основі піраміди.

□ Перед побудовою даної піраміди $SABCD$ варто звернути увагу на те, що всі її бічні ребра однаково нахилені до площини основи. Тому основа O висоти попадає у центр кола, описаного навко-

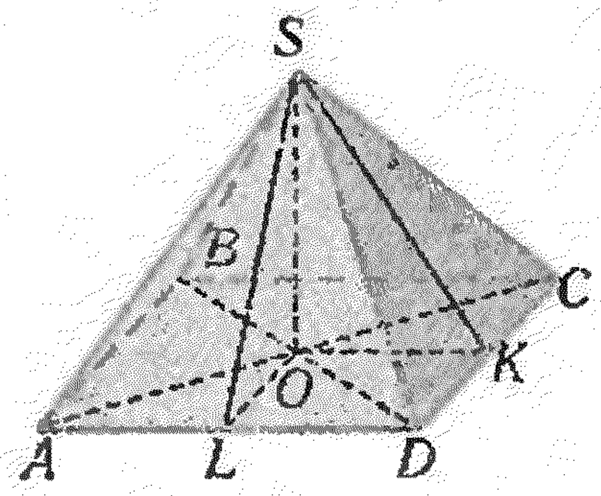


Рис. 194

ло прямокутника, тобто у точку перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ (рис. 194).

Нехай $AB = 6$ см, $BC = 8$ см. З прямокутного трикутника ABC маємо:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Тоді $AO = \frac{1}{2}AC = 5$ см.

1) Висоту піраміди SO знайдемо з прямокутного трикутника SOA:

$$SO = AO \operatorname{tg} \angle SAO = 5 \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

2) Знайдемо довжину бічного ребра піраміди з прямокутного трикутника SOA:

$$SA = \frac{AO}{\cos\angle SAO} = \frac{5}{\cos 60^\circ} = 10 \text{ (см)}.$$

3) Оскільки протилежні бічні грані піраміди рівні (чому?), то достатньо знайти висоти граней CSD і ASD. Нехай $SK \perp DC$, $SL \perp AD$. Тоді K і L — середини сторін DC і AD відповідно. Тому $OK \perp DC$, $OL \perp AD$, $OK = \frac{1}{2}BC = 4$ (см); $OL = \frac{1}{2}AB = 3$ (см). Висоту SK бічної грані CSD знайдемо з прямокутного трикутника SOK:

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{75 + 16} = \sqrt{91} \text{ (см)}.$$

Висоту SL бічної грані ASD знайдемо з прямокутного трикутника SOL:

$$SL = \sqrt{SO^2 + OL^2} = \sqrt{75 + 9} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ (см)}.$$

4) Кут SKO є лінійним кутом двогранного кута $S\underline{DC}O$. З прямокутного трикутника SOK маємо:

$$\operatorname{tg}\angle SKO = \frac{SO}{OK} = \frac{5\sqrt{3}}{4};\ \angle SKO = \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Кут SLO є лінійним кутом двогранного кута $S\underline{AD}O$. З прямокутного трикутника SOL маємо:

$$\operatorname{tg}\angle SLO = \frac{SO}{OL} = \frac{5\sqrt{3}}{3},\ \angle SLO = \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Неважко переконатись, що грані, протилежні до розглянутих, нахилені до основи під тими самими кутами. ■

Відповідь. 1) $5\sqrt{3}$ см; 2) 10 см; 3) $\sqrt{91}$ см; $2\sqrt{21}$ см; 4) $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

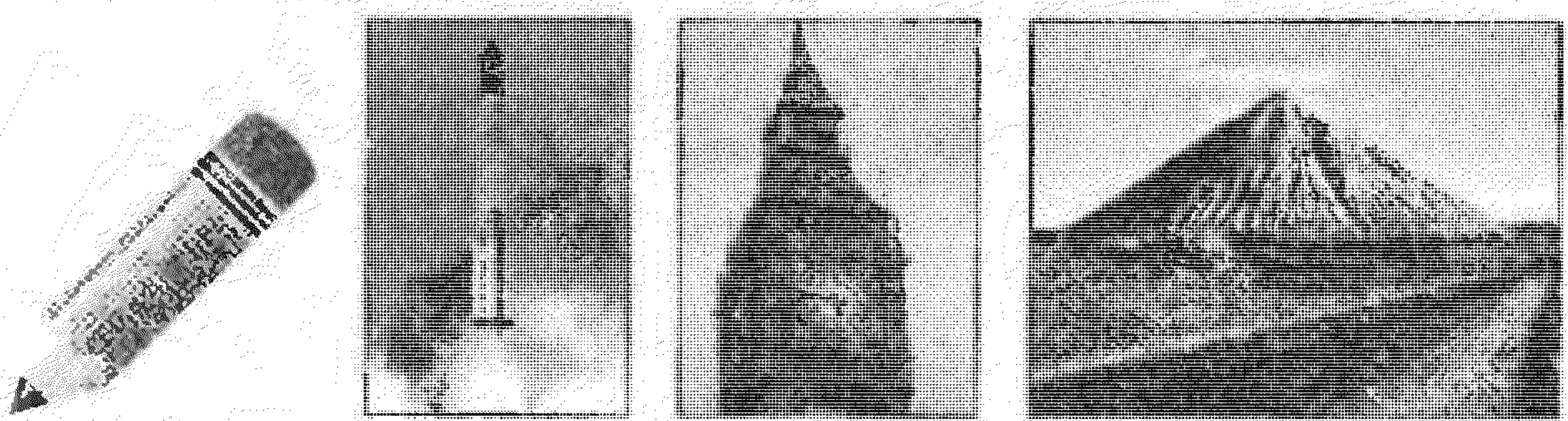
Контрольні запитання

1°. Скільки сторін у основи піраміди, яка має 9 бічних ребер?
2. Чи може піраміда мати непарну кількість ребер?
3°. Скільки сторін у основи піраміди, яка має: а) 16 ребер; б) 16 граней?
4. Чи може висота піраміди збігатися з висотою однієї з бічних граней?
5°. Чи може переріз чотирикутної піраміди бути шестикутником?
6. Чи може розгортка бічної поверхні правильної трикутної піраміди бути трапецією?
7. Чи правильно, що основою чотирикутної піраміди, бічні грані якої нахилені до площини основи під однаковими кутами, є квадрат?
8°. Чи має правильна трикутна піраміда площини симетрії, осі симетрії, центр симетрії?
9. Чи існує зрізана піраміда, в якої всі ребра рівні між собою?

2. Конуси

Б

Багато фізичних тіл чи їхніх частин мають конічну форму: кінець олівця, «ніс» ракети, дах башти, терикон (рис. 195, а–г) тощо.

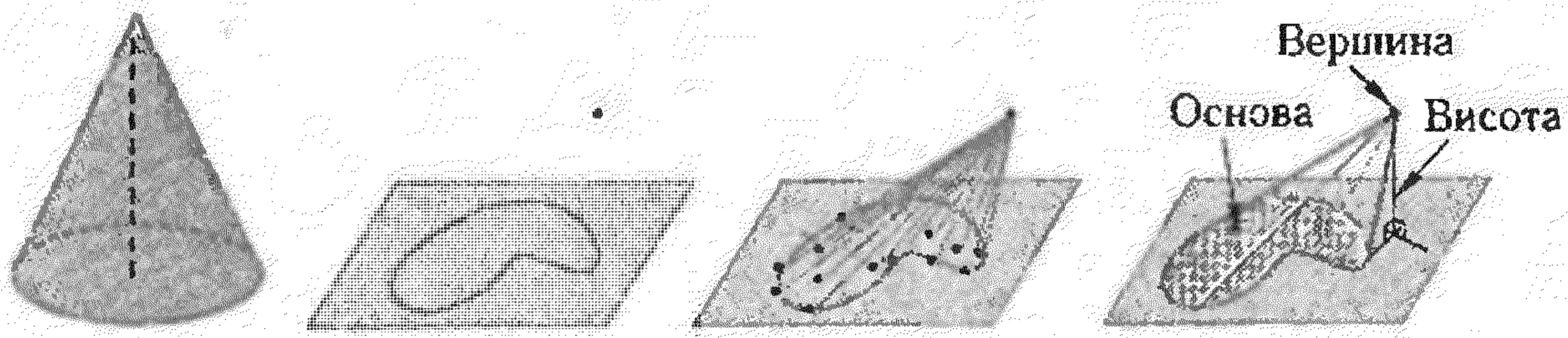


а) б) в) г)

Рис. 195

Найпростішим конусом є добре відомий круговий конус (рис. 196, а). Спільною особливістю конусів і пірамід є «загостреність», яка є наслідком їхньої будови. Подібно до піраміди, круговий конус можна уявляти створеним із відрізків, які сполучають точки круга з вершиною конуса. Якщо відрізки відкладати від точок довільної плоскої фігури, то одержимо фігуру, яку також природно називати конусом.

Некай дано плоску фігуру і точку поза площиною цієї фігури (рис. 196, б). З'єднаємо відрізками усі точки цієї фігури з даною точкою (рис. 196, в). Фігура, яка складається з усіх точок побудованих відрізків, називається ***конусом***, дана плоска фігура — ***основою конуса***, а дана точка — його ***вершиною*** (рис. 196, г).



а) б) в) г)

Рис. 196

Відстань від вершини конуса до площини його основи називається ***висотою*** конуса. Висотою конуса називають також перпендикуляр, проведений з вершини конуса на площину його основи.

> ***Конус*** *— від грецького χωνος (konos) — гострокінцеве тіло, кегля, верхівка шолома.*

З наведеного означення випливає, що поняття конуса є узагальненням поняття піраміди. Піраміда — це конус, основою якого є многокутник. Тому не дивно, що піраміда з великою кількістю сторін основи схожа на звичайний конус.

Конус, основою якого є круг, називається ***круговим***. Якщо висота кругового конуса проходить через центр основи, то конус називається ***прямим***. Тобто прямий круговий конус — це звичайний конус, який ми розглядали раніше.

Відрізки, які сполучають вершину кругового конуса з точками кола основи, називаються ***твірними***. Неважко побачити, що твірні прямого кругового конуса рівні між собою (доведіть).

Побудова зображення прямого кругового конуса складається з:

1) побудови зображення основи — фігури, обмеженої еліпсом (рис. 197, а);
2) вибору зображення вершини конуса на перпендикулярі, проведеному з центра зображення основи (рис. 197, б);
3) сполучення зображення вершини із зображенням основи двома відрізками, дотичними до нього (рис. 197, в);
4) виділення видимих і невидимих ліній (рис. 197, г).

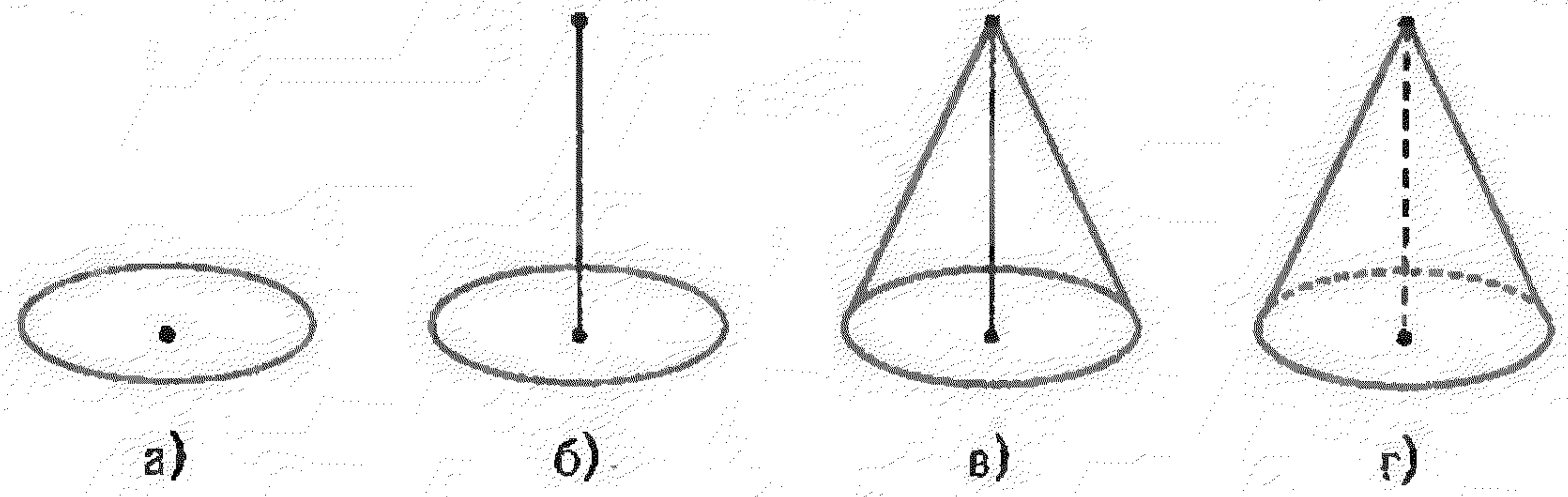


Рис. 197

Поверхня конуса складається з основи і бічної поверхні. Розгортка поверхні прямого кругового конуса складається із круга і кругового сектора (рис. 198).

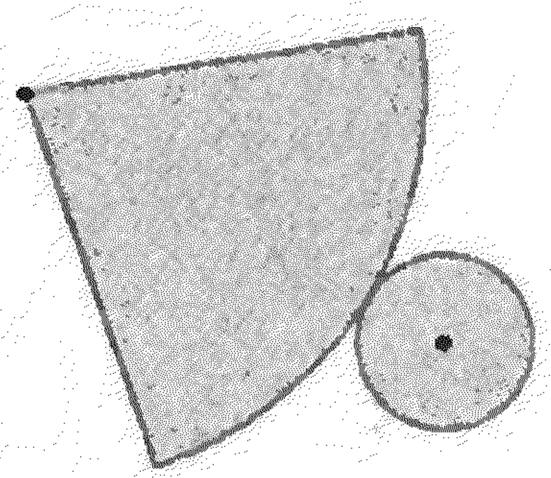


Рис. 198

При розбитті конуса на дві частини площиною, паралельною основі, одержимо дві фігури. Одна з цих фігур, що містить вершину конуса, подібна даному конусу, тобто має ту саму форму. Друга, що містить основу, називається ***зрізаним конусом*** (рис. 199).

Зрізаний конус має дві основи, які є подібними фігурами. ***Висотою*** зрізаного конуса називається перпендикуляр, опущений з довільної точки однієї з його основ на площину другої, а також довжину цього перпендикуляра.

Переріз прямого кругового конуса площиною, яка проходить через його вершину, є рівнобедреним трикутником (рис. 200, а). Якщо ж до цього площина проходить через центр основи, то цей переріз називається ***осьовим*** (рис. 200, б).

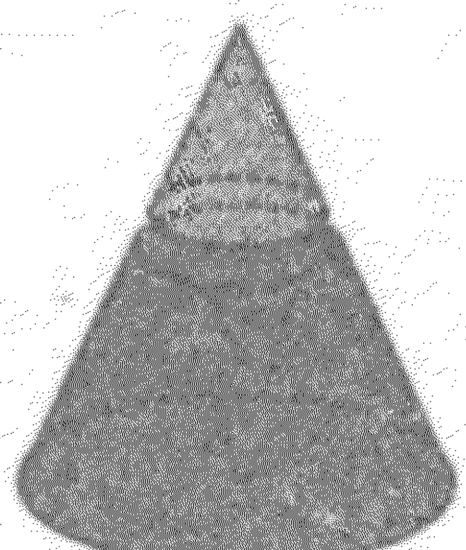


Рис. 199

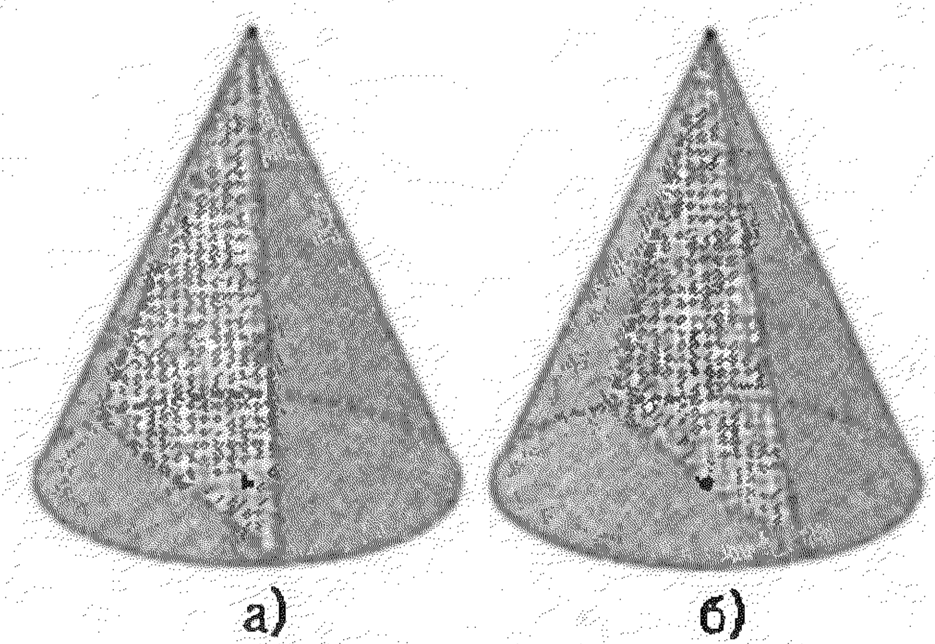


Рис. 200

Приклад 3. Висота прямого кругового конуса дорівнює 4 см, а радіус основи — 3 см. Обчислити:
1) довжину твірної конуса;
2) площу осьового перерізу;
3) кут при вершині осьового перерізу.

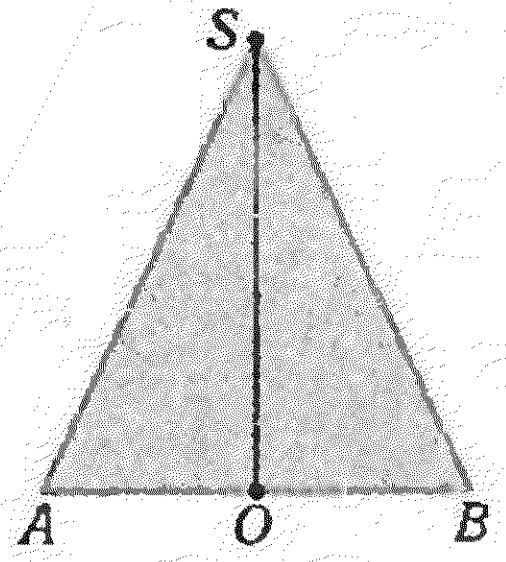


Рис. 201

□ Ці завдання легко розв'язати, користуючись зображенням осьового перерізу конуса (рис. 201). За умовою, $AO = OB = 3$ см, $SO \perp AB$, $SO = 4$ см.

1) Довжину твірної SA знайдемо з прямокутного трикутника SOA:

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}.$$

2) $S_{ABS} = \frac{1}{2} AB \cdot SO = AO \cdot SO = 3 \cdot 4 = 12$ (см²).

3) З прямокутного трикутника SOA маємо: $\operatorname{tg}\angle ASO = \frac{AO}{SO} = \frac{3}{4}$.

Отже, $\angle ASO = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. А тому $\angle ASB = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. ■

Відповідь. 1) 5 см; 2) 12 см²; 3) $2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

О Широке застосування тіл, які мають форму прямого кругового конуса, пов'язане з його властивостями симетрії.

Теорема 2 *(про осьову симетрію прямого кругового конуса).*

Пряма, яка проходить через вершину прямого кругового конуса і центр його основи, є його віссю симетрії.

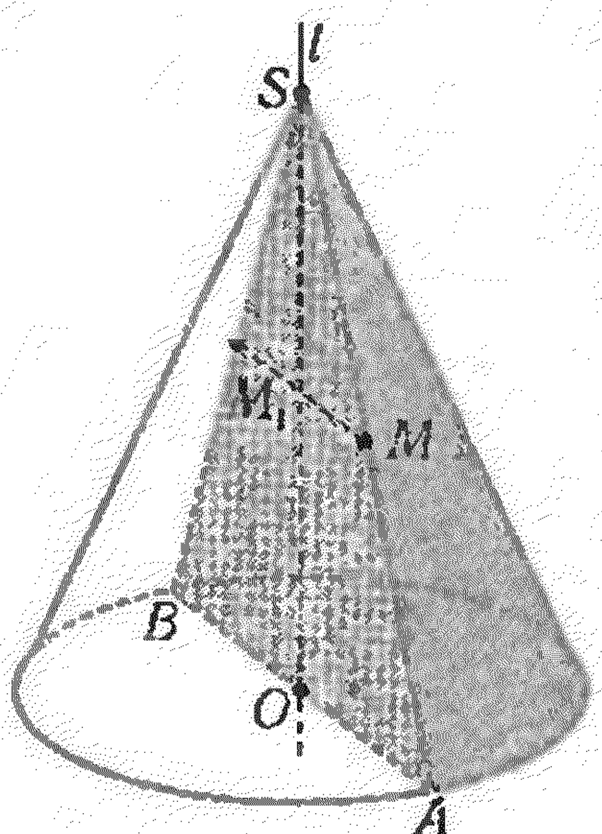


Рис. 202

□ Нехай пряма l проходить через вершину S прямого кругового конуса і центр його основи O (рис. 202). Проведемо площину через пряму l і довільну точку M на твірній конуса. Переріз конуса цією площиною є рівнобедреним трикутником ASB з основою AB. Пряма l є віссю симетрії цього трикутника. Тому пряма l є віссю симетрії конуса. ■

Вісь симетрії прямого кругового конуса називається його ***віссю.*** Неважко переконатись, що кожна площина, що проходить через вісь прямого кругового конуса, є його ***площиною симетрії.***

Поворот навколо осі прямого кругового конуса на довільний кут відображає конус на себе. Це випливає з рівності осьових перерізів прямого кругового конуса і з того, що ці перерізи мають спільну вісь симетрії — вісь конуса.

З прямим круговим конусом пов'язане ще одне перетворення простору — ***гомотетія.***

Гомотетія з центром у точці O і коефіцієнтом k — це таке перетворення простору, при якому кожній точці M ставиться у відповідність така точка M_1, що справджується рівність: $\overline{OM_1} = k \cdot \overline{OM}$, $k \neq 0$. Із цієї векторної рівності випливає, що при $k \geq 1$ в результаті гомотетії відбувається рівномірне «розширення» простору від центра O (рис. 203). Якщо ж $0 < k < 1$, то простір «стискається» до центра (рис. 204). При $k < 0$ маємо ще і відбиття від центра.

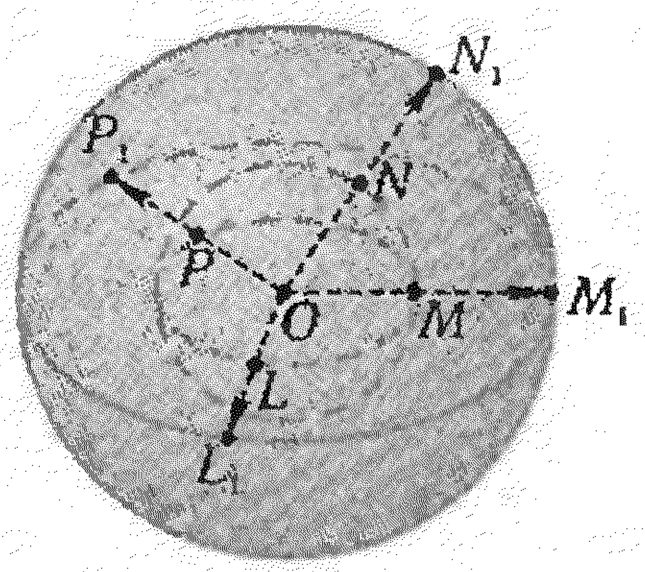


Рис. 203

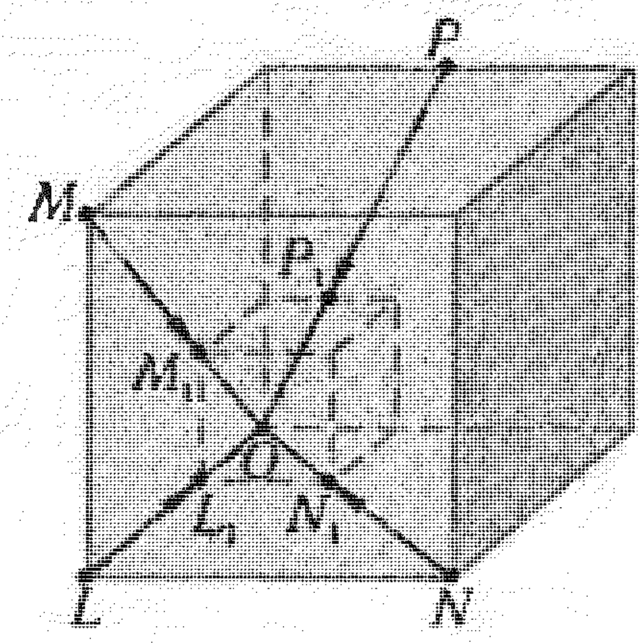


Рис. 204

Гомотетія *— від грецьких ομοζ (homos) — однаковий, подібний, рівний і θετοζ (thetos) — розміщений у певному порядку — буквально: подібне (однакове) розміщення фігур.*

Якщо одна фігура у просторі відображається на другу за допомогою гомотетії, то ці фігури ***подібні***, тобто мають однакову форму.

Особливості конуса характеризують його перерізи площинами, паралельними основі (рис. 205).

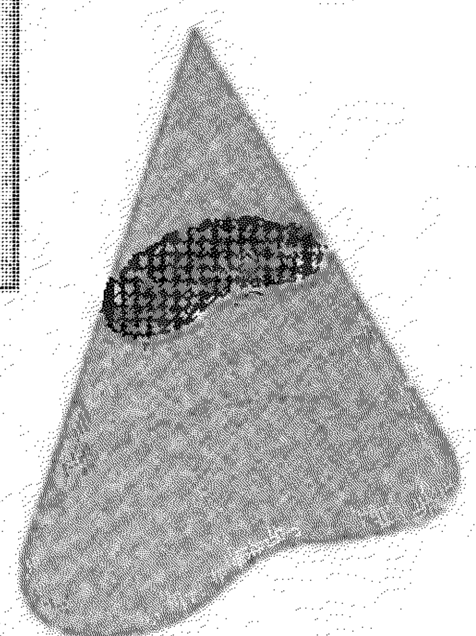


Рис. 205

Теорема 3 *(про властивості перерізів конуса площинами, паралельними основі).*

Переріз конуса площиною, паралельною площині його основи, подібний основі конуса, і коефіцієнт подібності дорівнює відношенню відстані між вершиною конуса і площиною перерізу до висоти конуса.

Теорема дає наочне уявлення про конус, як про стовпець, складений з фігур однакової форми, розміри яких зменшуються.

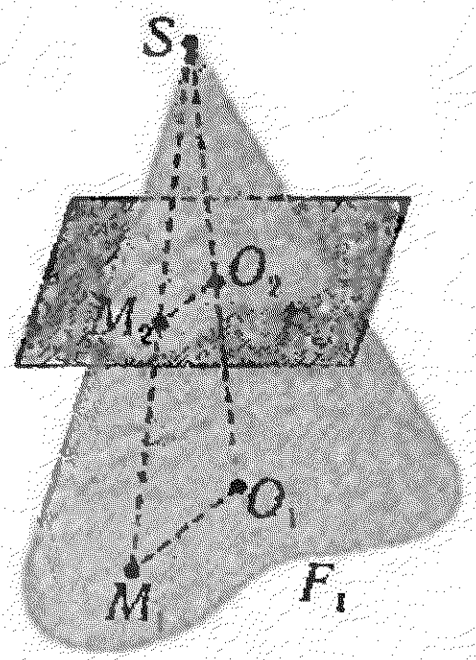


Рис. 206

☐ Позначимо через F_1 і F_2, відповідно, основу конуса і його переріз площиною, паралельною основі (рис. 206).

Нехай O_1 і O_2 — основи перпендикулярів, опущених з вершини S на площини основи і перерізу. Згідно з означенням конуса, кожній точці M_1 основи відповідає точка M_2 перерізу і навпаки. Ця відповідність встановлюється відрізками, які сполучають точки основи з вершиною. Трикутники SM_2O_2 і SM_1O_1 подібні, оскільки відрізки M_2O_2 і M_1O_1 паралельні (чому?). З подібності трикутників випливає пропорційність сторін: $\frac{SM_2}{SM_1}=\frac{SO_2}{SO_1}$. Ця рівність означає, що точки перерізу можна дістати з точок основи за допомогою гомотетії з центром у точці S і коефіцієнтом гомотетії $k=\frac{SO_2}{SO_1}$. Тому основа F_1 подібна перерізу F_2, і коефіцієнт подібності дорівнює відношенню, про яке сказано в умові теореми.■

З теореми 3 випливає наступний наслідок.

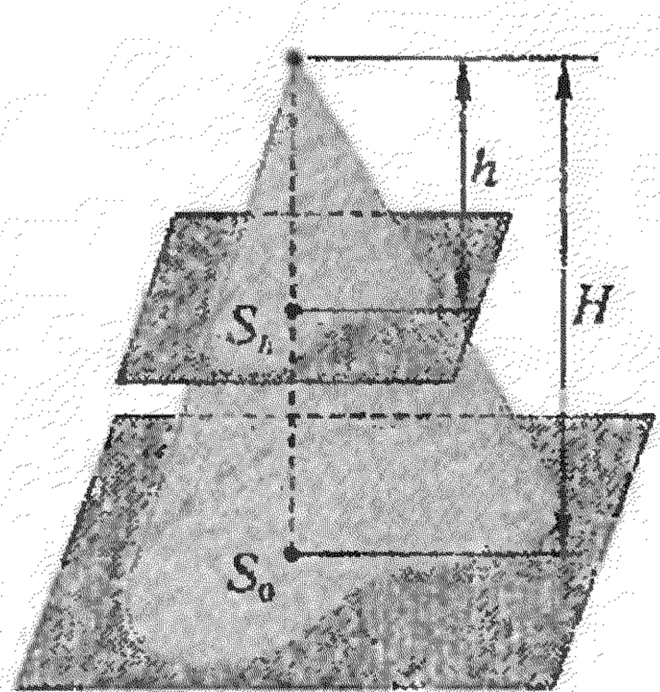


Рис. 207

Площа перерізу конуса площиною, паралельною основі, відноситься до площі основи, як квадрат відстані між вершиною і площиною перерізу до квадрата висоти.

☐ Нехай S_0 — площа основи конуса, висота якого дорівнює H, а S_h — площа його перерізу площиною, паралельною площині основи, де h — відстань між вершиною і цією площиною (рис. 207). За теоремою 3, переріз і основа — подібні фігури. Відношення їхніх площ дорівнює квадрату коефіцієнта подібності, який, за цією самою теоремою, дорівнює $\frac{h}{H}$. Тому маємо: $\frac{S_n}{S_0} = \frac{h^2}{H^2}$. ■

Приклад 4. Площина, що проходить через дві твірні прямого кругового конуса, нахилена до площини основи під кутом α і перетинає основу конуса по відрізку, який дорівнює половині радіуса R основи конуса.
1) Знайти висоту конуса.
2) Побудувати переріз конуса, паралельний основі, площа якого в чотири рази менша за площу основи.

□ 1) Нехай площина проходить через твірні AS і BS (рис. 208). Кут нахилу цієї площини до площини основи дорівнює куту SMO, де M — середина відрізка AB, а O — центр основи. Справді, AB — лінія перетину цих площин, MS і MO — висоти рівнобедрених трикутників ABS і ABO. Відрізок SO є перпендикуляром, опущеним з вершини S на площину основи. Висоту SO можна знайти із прямокутного трикутника SOM, якщо буде відомий катет MO. Катет MO можна визначити з прямокутного трикутника BMO:

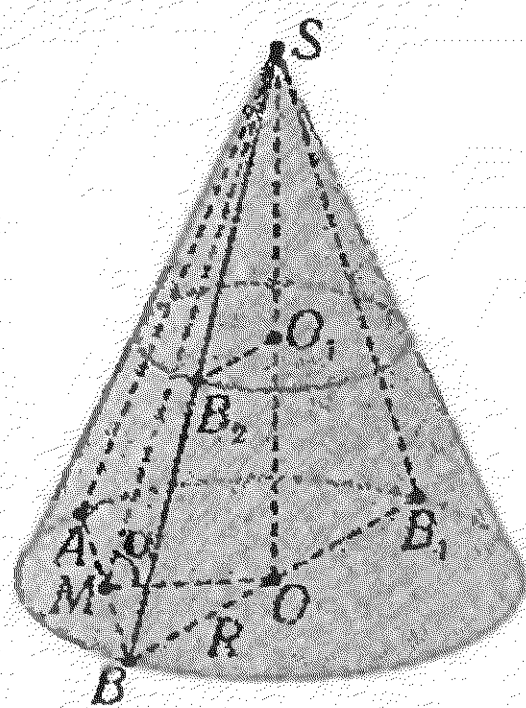


Рис. 208

$$MO = \sqrt{OB^2 - MB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Тому

$$SO = MO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}R \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

2) Згідно з теоремою 3, шуканим перерізом є круг. Його радіус буде вдвічі меншим за радіус основи, оскільки відношення площі шуканого перерізу до площі основи дорівнює $\frac{1}{4}$ і дорівнює квадрату коефіцієнта подібності перерізу і основи. Але тоді і відстань від вершини конуса до шуканого перерізу має бути вдвічі меншою за її відстань до основи. Тобто шуканим перерізом є круг, центр якого O_1 лежить на середині висоти. Його зображення об-

межує еліпс, центр симетрії якого знаходиться в точці O_1, розміщеній у площині, паралельній основі (рис. 208). ■

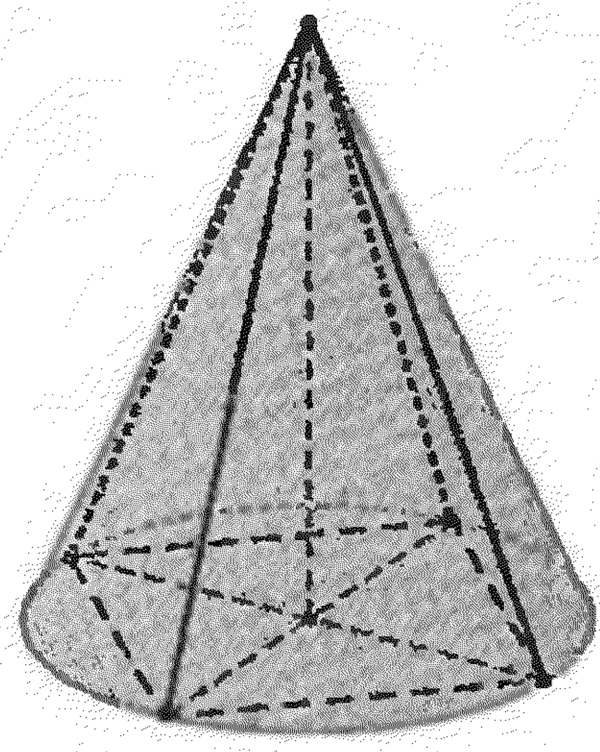


Рис. 209

Навколо основи правильної піраміди можна описати коло. Тому з кожною правильною пірамідою можна розглядати круговий конус, вершина якого збігається з вершиною піраміди, а границею основи є коло, описане навколо основи піраміди (рис. 209). Цей конус є прямим і називається ***описаним навколо піраміди***, а піраміда — ***вписаною в конус.***

Зрозуміло, що навколо правильної піраміди можна описати лише один круговий конус, а в кожний прямий круговий конус можна вписати безліч правильних пірамід. Щоб вписати в даний прямий круговий конус правильну піраміду, достатньо в основу вписати правильний многокутник і з'єднати його точки з вершиною конуса.

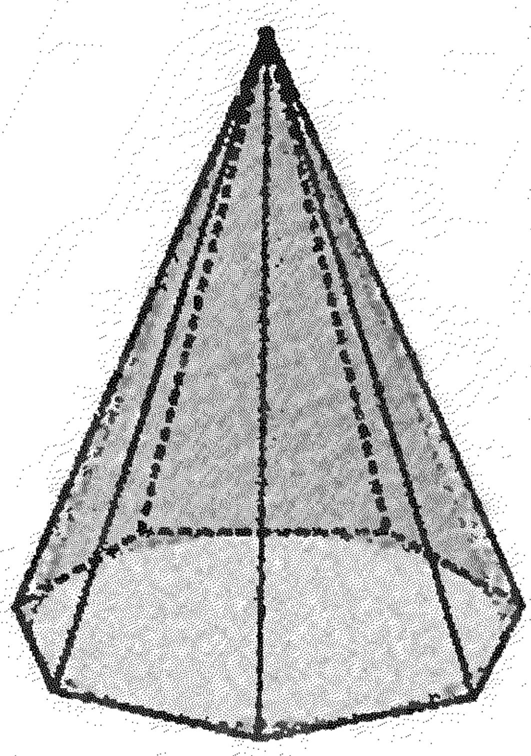


Рис. 210

Якщо поміняти ролями конус і піраміду, то отримаємо ***конус, вписаний у правильну піраміду*** (рис. 210), і піраміду, описану навколо прямого кругового конуса. Для цього треба в основу піраміди вписати круг, а потім з'єднати точки цього круга з вершиною піраміди. Оскільки основою правильної піраміди є правильний многокутник, то це можна зробити.

Контрольні запитання

1°. Чи завжди пряма, що проходить через центр основи і вершину кругового конуса, є його віссю симетрії?

2°. Чи може твірна конуса бути перпендикулярною до його основи?

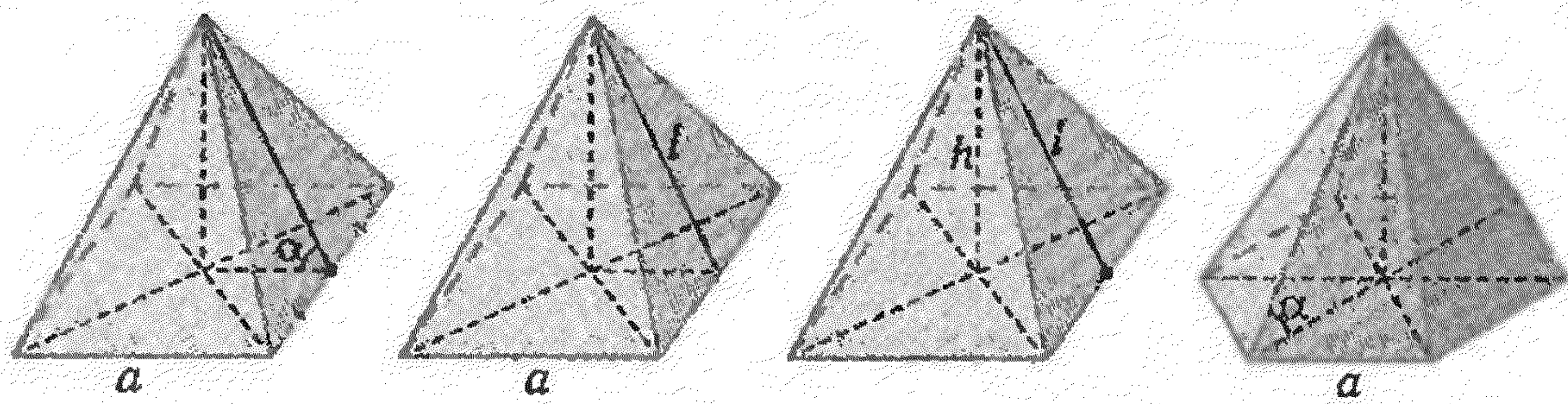
3. Чи може пряма мати лише дві спільні точки з прямим круговим конусом?

4°. Чи має прямий круговий конус: а) центр симетрії; б) вісь симетрії; в) площину симетрії?

5. Чи може сектор з дугою в 210° бути розгорткою бічної поверхні конуса?
6°. Чи може переріз прямого кругового конуса бути трикутником?
7. Чи є трапецією переріз зрізаного конуса площиною, що проходить через дві його твірні?
8. Чи можна знайти висоту прямого кругового конуса, вершина якого недоступна, якщо робити вимірювання тільки на його поверхні?

Графічні вправи

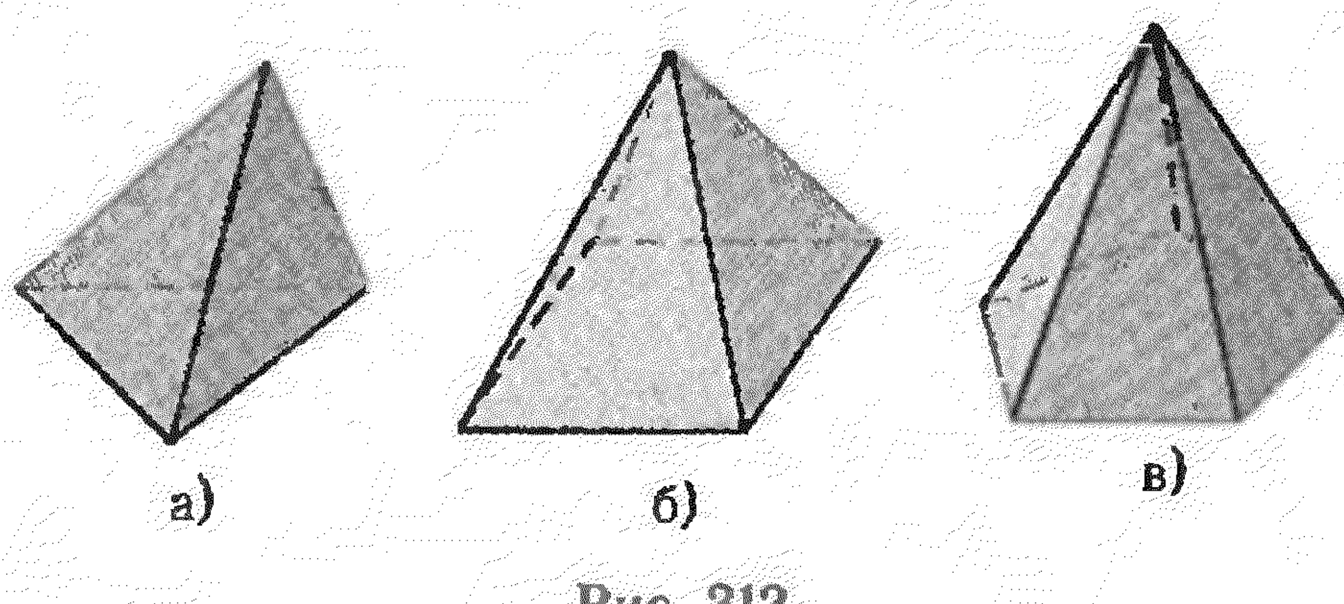
1. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної піраміди, зображеної на рис. 211, а)–г), за даними, вказаними на рисунку.



а) б) в) г)

Рис. 211

2. Розріжте поверхню правильної піраміди, зображеної на рис. 212, а), б), в), по ребрах, виділених жирними лініями. Зобразіть відповідну розгортку.



а) б) в)

Рис. 212

3. Побудуйте точку перетину прямої MN з площиною основи піраміди, зображеної на рис. 213.
4. Знайдіть площу основи конуса, зображеного на рис. 214.

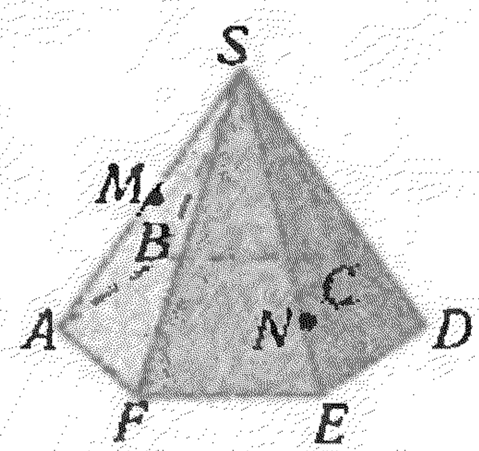


Рис. 213

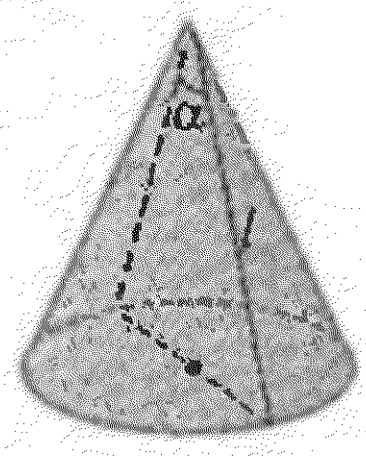


Рис. 214

Задачі

219. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 6 см, а плоский кут при вершині дорівнює 60°. Знайдіть:
1°) площу основи і висоту піраміди;
2°) кут між бічним ребром і площиною основи;
3°) кут між несуміжними бічними ребрами;
4) відстань від центра основи до бічної грані.

220. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює l, а двогранний кут при основі дорівнює α. Знайдіть:
1°) площу основи і висоту піраміди;
2°) кут між бічним ребром і площиною основи;
3°) кут між несуміжними бічними ребрами;
4) відстань від центра основи до бічної грані.

221. Бічна грань правильної трикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом 45°, а сторона основи дорівнює a. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) кут між бічним ребром і площиною основи;
3) відстань від центра основи до бічної грані;
4) периметр і площу перерізу, який паралельний основі і поділяє висоту піраміди навпіл.

222. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а апофема — p. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) кут нахилу бічної грані до площини основи;
3) кут між бічним ребром і площиною основи;
4) відстань від центра основи до бічної грані;
5) периметр і площу перерізу, який паралельний основі і поділяє висоту піраміди навпіл.

223. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а бічна грань утворює із площиною основи кут 60°. Знайдіть сторону основи піраміди.

224. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см. Висота піраміди дорівнює 6 см. Вершина ортогонально проектується в точку перетину діагоналей. Обчисліть:
1) кут нахилу бічних ребер до площини основи;
2) бічне ребро піраміди;
3) висоти бічних граней піраміди;
4) величину двогранних кутів при основі піраміди;
5) площу перерізу піраміди площиною, яка паралельна основі і проходить через середину висоти.

225. Висота правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторони основи дорівнюють 10 см і 2 см. Знайдіть:
1°) бічне ребро і висоту бічної грані піраміди;
2°) кути нахилу бічної грані і бічного ребра до площини основи;
3) найбільшу і найменшу площі перерізів, що проходять через центри основ піраміди;
4*) площу перерізу, що проходить через сторону меншої основи паралельно бічному ребру.

226. Висота правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторони основи дорівнюють 10 см і 2 см. Знайдіть:
1°) бічне ребро і висоту бічної грані піраміди;
2°) кути нахилу бічної грані і бічного ребра до площини основи;
3) найбільшу і найменшу площі перерізів, що проходять через центри основ піраміди;
4*) площу перерізу, що проходить через сторону меншої основи паралельно бічному ребру.

227. Доведіть, що центр кола, описаного навколо основи піраміди, є ортогональною проекцією її вершини, якщо:
1) усі бічні ребра піраміди рівні між собою;
2) усі бічні ребра нахилені до площини основи піраміди під однаковими кутами.

---

228. Висота прямого кругового конуса дорівнює 4 см, радіус основи — 3 см. Обчисліть:
1°) довжину твірної конуса;
2°) площу осьового перерізу;
3°) кут при вершині осьового перерізу;

4) площу перерізу, що проходить через середину твірної паралельно основі;
5) площу перерізу конуса площиною, що проходить через його вершину і відтинає від кола основи дугу 90°;
6) відстань від центра основи до площини перерізу, розглянутого в завданні 5).

229. Довжина твірної прямого кругового конуса дорівнює 4 см, кут при вершині осьового перерізу — 60°. Через дві твірні конуса проведено площину під кутом β до площини основи. Знайдіть:
1) площу одержаного перерізу;
2) відстань від центра основи до площини перерізу;
3) кут між даними твірними;
4) найбільшу відстань від точок основи до площини перерізу;
5*) значення β, при яких даний переріз можна побудувати.

230. З півкруга, що має радіус r, склеїли бічну поверхню прямого кругового конуса. Знайдіть:
1) радіус основи;
2) довжину твірної;
3) висоту конуса;
4) кут в осьовому перерізі конуса;
5) довжину перерізу бічної поверхні площиною, яка паралельна основі і поділяє висоту у відношенні 2:1, рахуючи від вершини конуса.

231. Доведіть, що:
1°) твірні прямого кругового конуса нахилені до площини основи під однаковими кутами;
2*) точка висоти правильної піраміди рівновіддалена від усіх бічних граней.

232. Вершина піраміди ортогонально проектується на вершину прямого кута рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою 4 см, що лежить в основі піраміди. Кут нахилу однієї з граней до основи дорівнює 60°. Знайдіть:
1°) висоту піраміди;
2) площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через середини катетів основи паралельно висоті піраміди;
3) твірну прямого кругового конуса, висота якого збігається з висотою піраміди, а радіус основи — з катетом основи піраміди;

4) площу перерізу цього конуса площиною, що проходить через його вершину і середини катета і гіпотенузи трикутника, який лежить в основі піраміди.

233. Відношення площі основи прямого кругового конуса до площі осьового перерізу дорівнює π. Визначте кут нахилу твірної до основи.

234. Висота прямого кругового конуса дорівнює H. На якій відстані від вершини слід провести площину, паралельну основі, щоб площа перерізу дорівнювала половині площі основи?

235. Дві площини, паралельні основі, поділяють висоту конуса на три рівні частини. Порівняйте суму площ перерізів із площею основи конуса.

Вправи для повторення

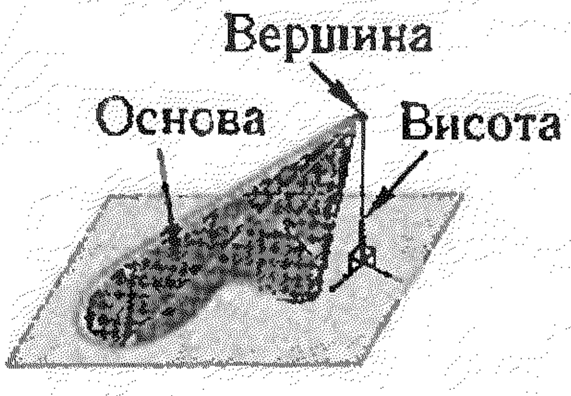
236. Доведіть, що при паралельному перенесенні площина відображається на площину, яка паралельна даній або збігається з нею.

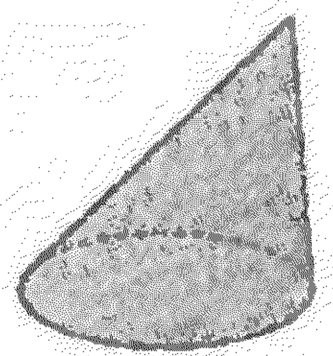
237. Опишіть перерізи прямокутного паралелепіпеда площинами, паралельними граням і ребрам.

238. Прямокутну підставку, яка розміщена горизонтально, заповнили олівцями, які поставлені вертикально і мають однакову довжину. Яку форму має одержана конструкція? А якщо підставка кругла?

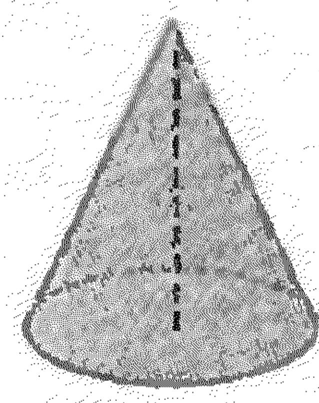
Підсумок

Конусом називається геометрична фігура, що утворена відрізками, які сполучають усі точки даної плоскої фігури з точкою, розміщеною поза площиною фігури.

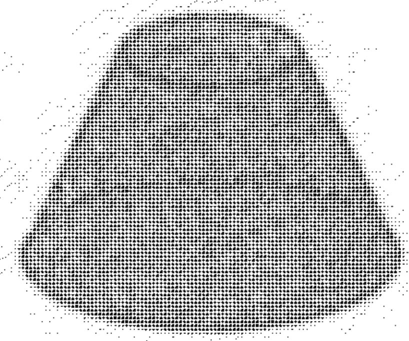




Круговий конус

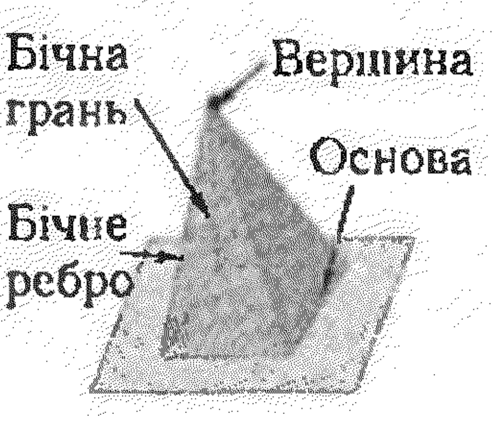


Прямий круговий конус

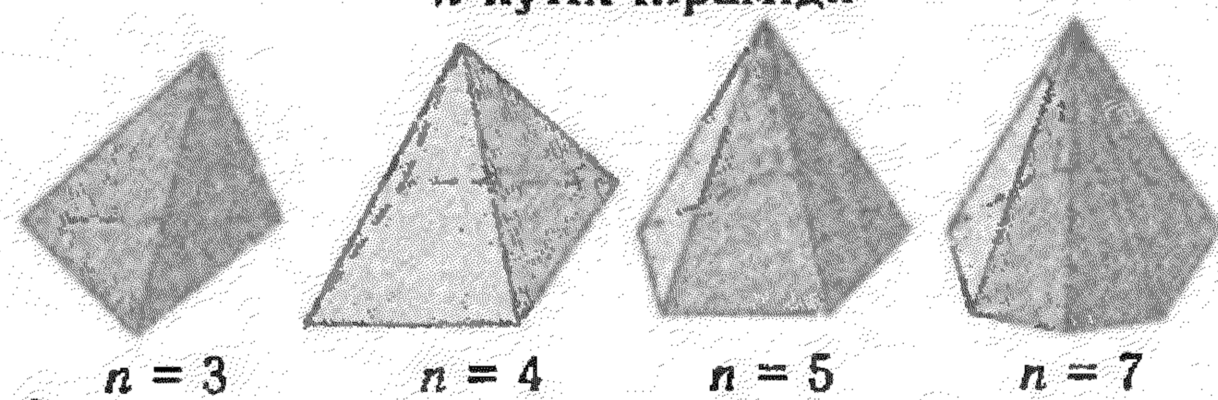


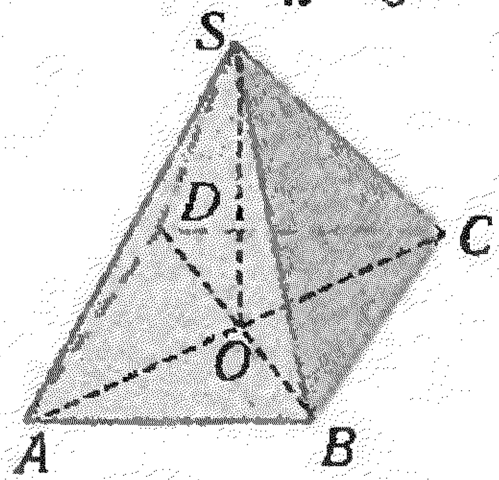
Зрізаний прямий круговий конус

Піраміда є конусом, основою якого є многокутник.

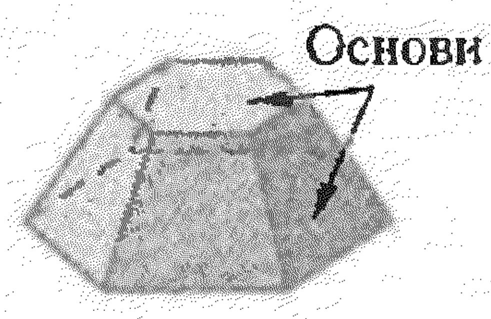


n-кутні піраміди





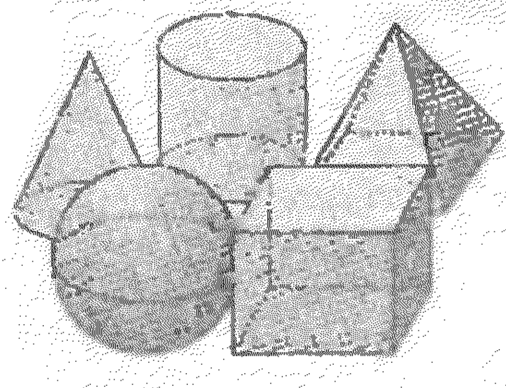
Правильна піраміда



Зрізана піраміда

Головні твердження

1. У правильній піраміді бічні ребра рівні між собою і однаково нахилені до площини основи, а бічні грані — рівні між собою рівнобедрені трикутники, які однаково нахилені до площини основи.
2. Переріз конуса площиною, паралельною площині його основи, подібний основі конуса, і коефіцієнт подібності дорівнює відношенню відстані між вершиною конуса і площиною перерізу до висоти конуса.



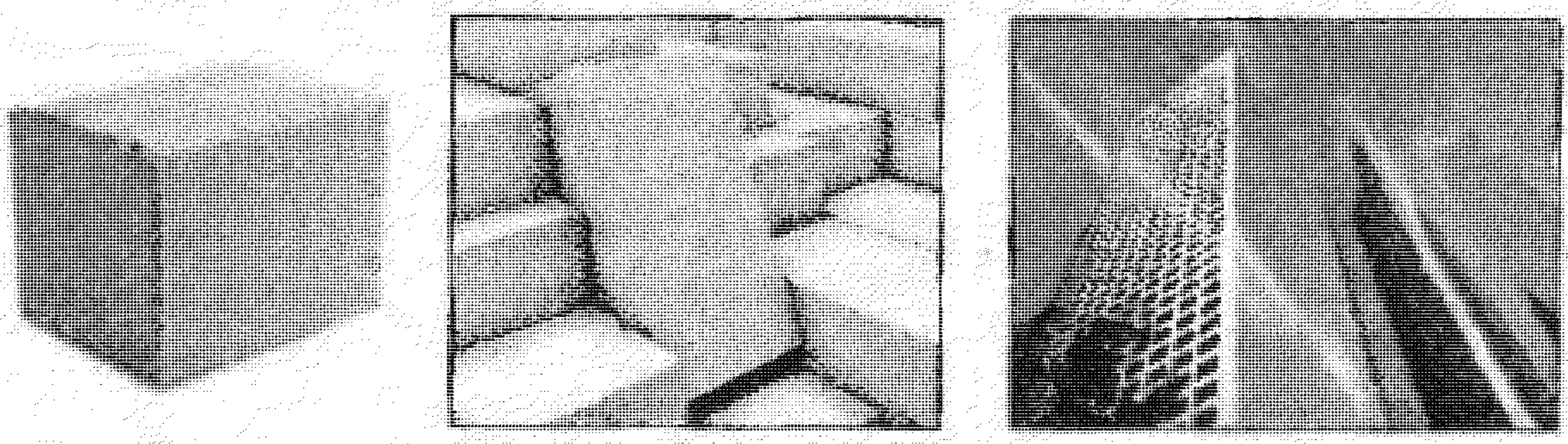
§ 13. Призми і циліндри

Даний параграф присвячено розгляду двох класів фігур — призм і циліндрів, окремі представники яких вам добре відомі — це паралелепіпеди і прямі кругові циліндри. Ці фігури будуються також із відрізків, але іншим способом, ніж піраміди і конуси. Дослідження будови і властивостей призм і циліндрів є головною метою параграфа.

1. Призми

Б

Протягом усього життя ми постійно маємо справу з предметами, частини яких або самі вони мають форму паралелепіпеда (рис. 215, а–в).



а) б) в)

Рис. 215

Паралелепіпед можна сконструювати з рівних і паралельних між собою відрізків, проведених з усіх точок паралелограма по один бік від його площини (рис. 216).

За аналогією з пірамідами, узагальнення цієї побудови приводить нас до поняття призми.

Нехай дано довільний многокутник (рис. 217, а). Відкладемо з кожної його точки рівні і паралельні між собою відрізки по один бік від площини многокутника (рис. 217, б). Фігура, яка складається з усіх точок побудованих відрізків, називається ***призмою***. Відрізки, які відкладали при її побудові, називають ***твірними*** призми.

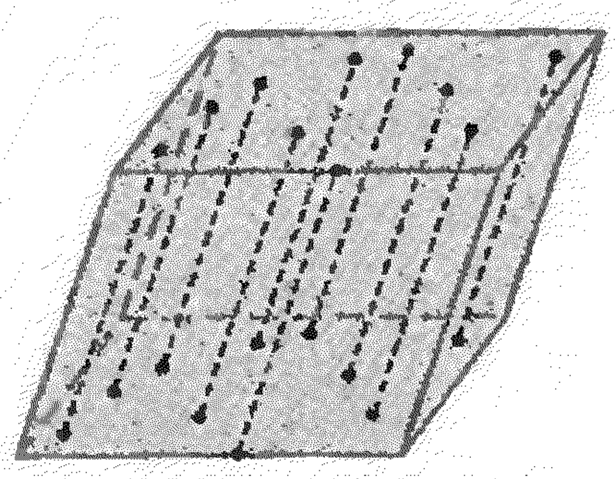
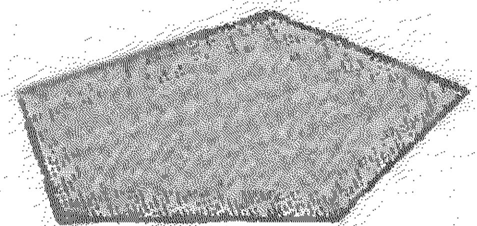
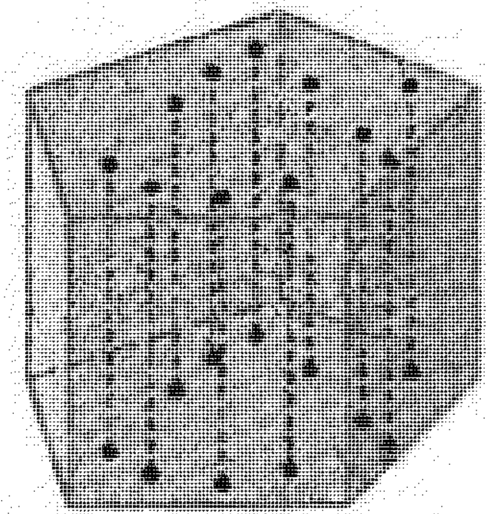


Рис. 216



а)



б)

Рис. 217

Призма *— від грецького πρίσμα (prisma), від πρίω (prio) — пиляю, буквально: відпиляний кусок.*

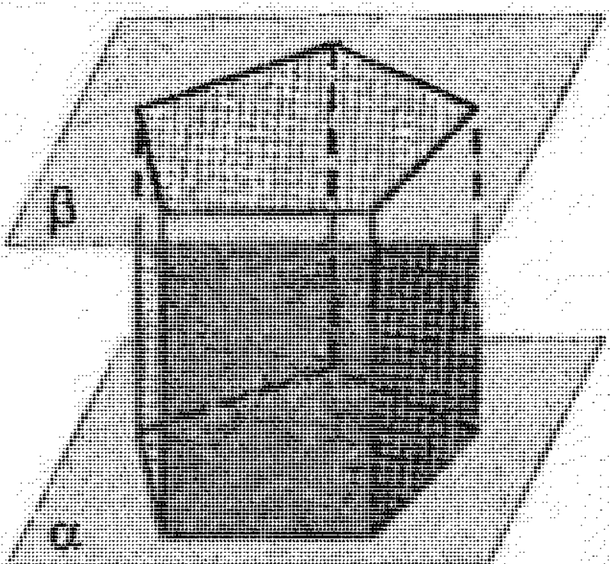


Рис. 218

Кінці твірних призми лежать у паралельних площинах і утворюють два рівні многокутники (рис. 218). Це випливає з того, що побудовані відрізки визначають паралельне перенесення даного многокутника на вектор, модуль якого дорівнює довжині побудованих відрізків, а напрям збігається з напрямом цих відрізків, якщо точку, від якої відкладається відрізок, вважати його початком.

За властивістю паралельного перенесення, площина α, в якій лежить даний многокутник, відображається на паралельну їй площину β, в якій містяться кінці побудованих відрізків. При цьому даний многокутник у площині α відображається на рівний йому многокутник у площині β. Ці многокутники називаються ***основами*** призми. Відстань між площинами основ називається ***висотою*** призми.

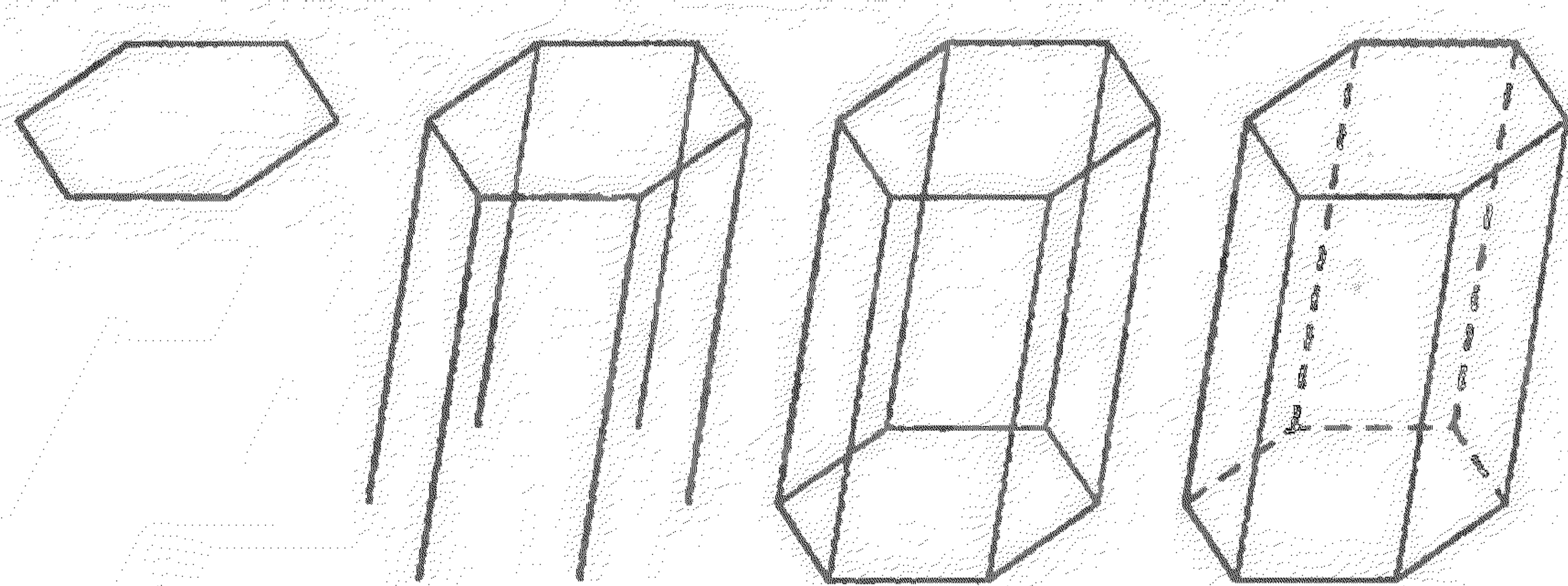
Залежно від виду многокутника, який лежить в основі (трикутник, чотирикутник, ..., n-кутник), призми називаються ***трикутними, чотирикутними, ..., n-кутними.***

Поверхня призми складається із многокутників, які називаються ***гранями***, їхні сторони — ***ребрами***, а вершини — ***вершинами призми.*** Дві грані призми — це паралельні і рівні ***основи***, а інші грані (їх називають ***бічними***) є паралелограмами, що мають спільні сторони з основами.

Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані, називається ***діагоналлю призми***.

При зображенні призм (як і при зображенні пірамід) користуються наступними правилами:

1) будують зображення верхньої основи призми (рис. 219, а);
2) з вершин побудованого многокутника проводять твірні (рис. 219, б);
3) будують зображення нижньої основи призми, сполучаючи кінці побудованих твірних (рис.219, в);
4) виділяють видимі і невидимі ребра (рис. 219, г).



а) б) в) г)

Рис. 219

Один із видів чотирикутних призм було розглянуто в 10 класі, де йшлося про ***паралелепіпеди, тобто про призми, основами яких є паралелограми.***

Паралелепіпед *— від грецьких παράλληλος (parallelos) — паралельний і ἐπίπεδος (epipedos) — рівне, плоске.*

Діагоналі паралелепіпеда мають такі самі властивості, як і діагоналі паралелограма. Про це йдеться в наступній теоремі.

Теорема 1 *(про властивості діагоналей паралелепіпеда).*
Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл. Ця точка є центром симетрії паралелепіпеда.

□ Нехай дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведемо діагоналі B_1D і CA_1 (рис. 220). Вони є діагоналями паралелограма DCB_1A_1 ($DC \parallel A_1B_1$ і $DC = A_1B_1$). Позначимо точку їхнього перетину

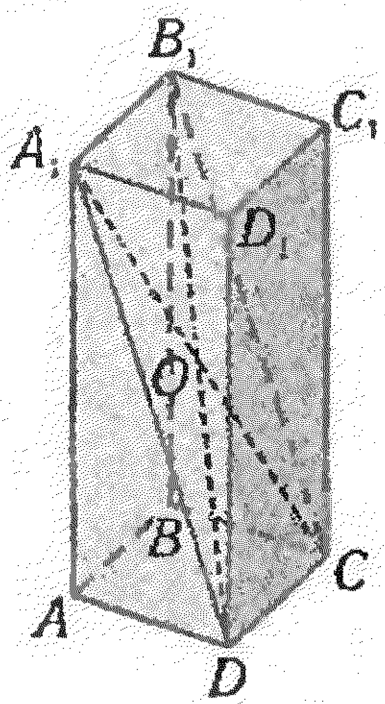


Рис. 220

через O. Діагоналі B_1D і CA_1 діляться точкою O навпіл. Аналогічно міркуючи стосовно всіх пар діагоналей, дійдемо висновку, що їхні середини збігаються. Тобто вершини паралелепіпеда розміщені симетрично відносно точки перетину діагоналей. Звідси випливає, що відносно цієї точки симетрично розміщені ребра, грані паралелепіпеда й узагалі весь паралелепіпед. ■

Найчастіше застосовуються призми, в яких твірні перпендикулярні до основи, тобто ***прямі призми.*** Висота прямої призми дорівнює довжині твірної. Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається ***прямокутним паралелепіпедом.*** Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що сходяться в одній вершині, називаються його ***вимірами.*** Їх ще називають ***довжиною, шириною*** та ***висотою паралелепіпеда***, за умови, що дві протилежні грані обрано за основи.

Теорема 2 *(про властивості діагоналей прямокутного паралелепіпеда).*

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

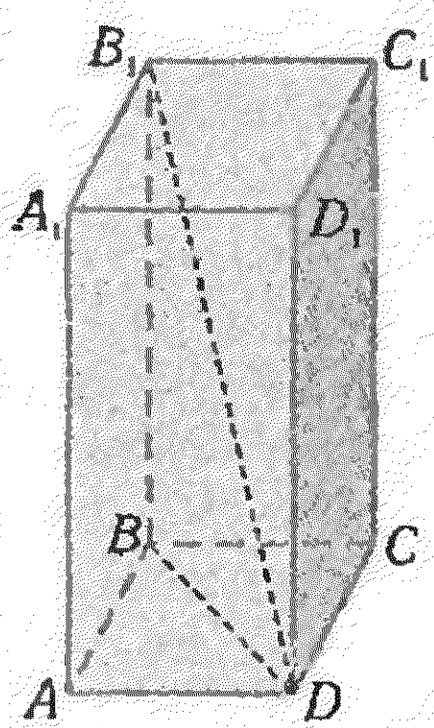


Рис. 221

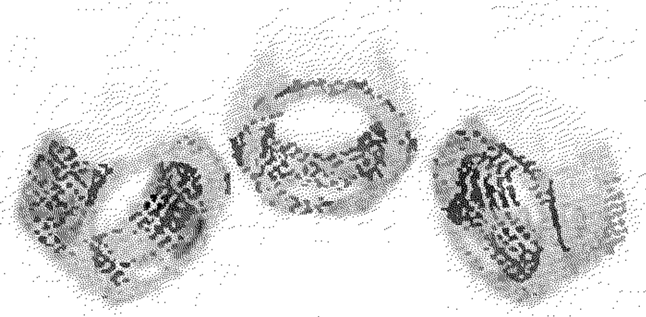
□ У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 221) розглянемо діагональ DB_1. Оскільки ребро BB_1 перпендикулярне до основи $ABCD$, то з прямокутного трикутника BB_1D маємо: $B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2$. Крім того, діагональ основи BD є гіпотенузою прямокутного трикутника BCD. Тому $BD^2 = CD^2 + BC^2$ і $B_1D^2 = CD^2 + BC^2 + BB_1^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$. ■

Очевидною є спорідненість доведеної теореми з теоремою Піфагора, тому її і називають теоремою Піфагора для простору. З цієї теореми, зокрема, випливає, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні між собою.

Велике практичне значення мають ***правильні*** призми.

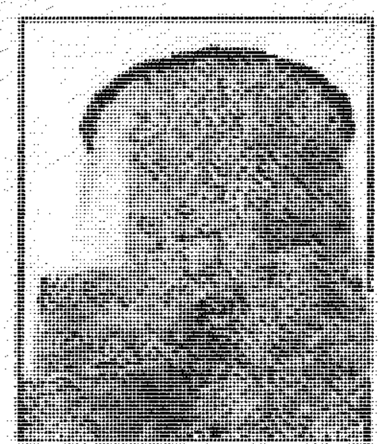
Пряма призма називається правильною, якщо її основами є правильні многокутники.

Куб є правильною чотирикутною призмою, оскільки в основі його лежить квадрат, і куб є прямим паралелепіпедом. Правильні призми досить часто використовуються в техніці, будівництві, оскільки різноманітні деталі, конструкції мають форму призми. Зокрема, заготовки для гайок здебільшого мають форму правильної шестикутної призми (рис. 222, а), іноді — трикутної, чотирикутної чи восьмикутної. Нерідко форму призми мають башти, частини споруд (рис. 222, б–г).



а)

б)



в)

г)

Рис. 222

Очевидно, що всі бічні грані правильної призми є рівними між собою прямокутниками (чому?).

При вивченні призм, як і при вивченні інших тіл, важливим є дослідження перерізів призм площинами. Звернемо увагу на ***діагональний переріз призми.*** Йдеться про переріз призми площиною, що проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані (рис. 223). З паралельності основ призми випливає, що діагональним перерізом призми є паралелограм. Якщо площина перерізу паралельна основам, то перерізом є многокутник, рівний основі. Це обґрунтовується так само, як і рівність основ.

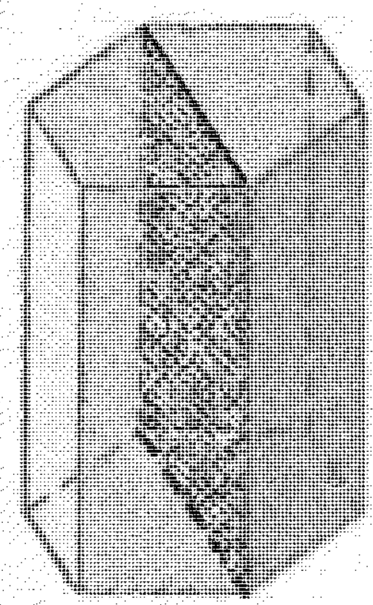


Рис. 223

Приклад 1. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 6 см, 8 см і гострим кутом 60°. Діагональ меншої бічної грані утворює з бічним ребром паралелепіпеда кут 45°. Обчислити:
1) діагоналі основи;
2) висоту паралелепіпеда;
3) діагоналі паралелепіпеда;
4) кути між діагоналями і площиною основи паралелепіпеда;
5) площі діагональних перерізів.

□ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний паралелепіпед, $AD = 6$ см, $AB = 8$ см, $\angle DAB = 60°$, $\angle D_1AD = 45°$ (рис. 224).

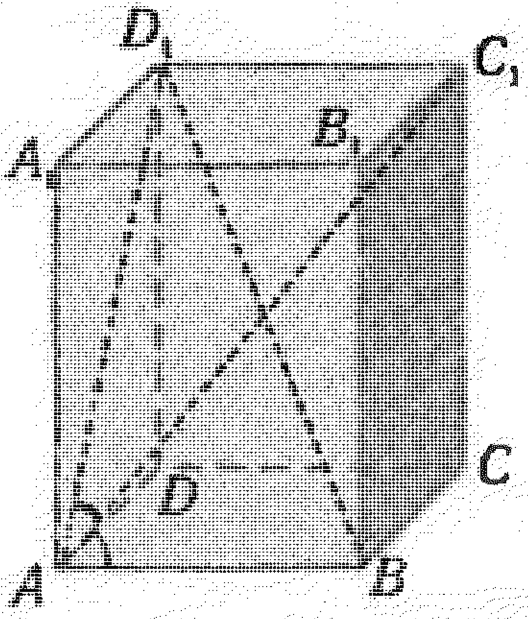


Рис. 224

1) З трикутника ABD, за теоремою косинусів, маємо:

$$BD = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot \cos 60^\circ} = 2\sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Оскільки $BD^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2AB^2$, то $AC = 2\sqrt{37}$ (см).

2) Висота паралелепіпеда дорівнює DD_1. Трикутник DD_1A — прямокутний рівнобедрений, $DD_1 \perp AD$, $\angle D_1AD = 45^\circ$. Тому $DD_1 = AD = 6$ (см).

3) Діагоналі паралелепіпеда є гіпотенузами прямокутних трикутників BDD_1 і ACC_1, в яких відомі катети. З цих трикутників, користуючись розв'язанням завдання 1), дістанемо:

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{52+36} = 2\sqrt{22} \text{ (см)}.$$

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{148+36} = 2\sqrt{46} \text{ (см)}.$$

4) Згадані в умові кути вимірюються кутами $\angle D_1BD$ і $\angle C_1AC$.

$$\operatorname{tg}\angle D_1BD = \frac{DD_1}{DB} = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \angle D_1BD = \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\operatorname{tg}\angle C_1AC = \frac{3}{\sqrt{37}},\ \angle C_1AC = \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{37}}.$$

5) Діагональними перерізами паралелепіпеда є прямокутники AA_1C_1C і DBB_1D_1. Їхні сторони знайдено раніше, тому їхні площі дорівнюють, відповідно, $12\sqrt{37}$ см^2 і $12\sqrt{13}$ см^2. ■

Відповідь. 1) $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{37}$ см; 2) 6 см; 3) $2\sqrt{22}$ см, $2\sqrt{46}$ см; 4) $\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{37}}$; 5) $12\sqrt{37}$ см^2, $12\sqrt{13}$ см^2.

Приклад 2. У прямокутному паралелепіпеді виміри дорівнюють 1 см, 1 см і 2 см. Обчислити:
1) діагоналі паралелепіпеда;
2) кути між діагоналями.

□ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = 1$ см, $AA_1 = 2$ см (рис. 225).

1) За теоремою Піфагора для простору, $AC_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ (см). Усі діагоналі дорівнюють $\sqrt{6}$ см.

2) Йдеться про кути між діагоналями AC_1 і BD_1 та між AC_1 і A_1C (інші варіанти аналогічні). Якщо O — центр симетрії паралелепі-

педа, O_1 — центр симетрії верхньої грані, то в рівнобедреному трикутнику A_1C_1O маємо:

$A_1O = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\quad A_1C_1 = \sqrt{2}$, $\quad \angle A_1OC_1 = 2\angle A_1OO_1 =$

$= 2\arcsin\frac{A_1O_1}{A_1O} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Аналогічно, з трикутника D_1OC_1 маємо:

$$\angle D_1OC_1 = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}. \blacksquare$$

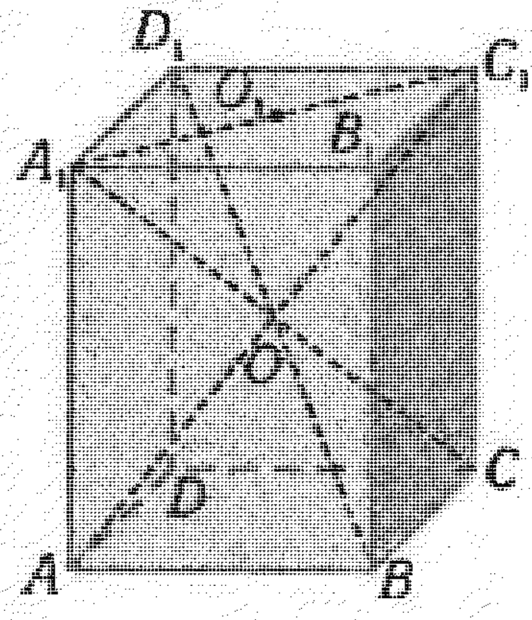


Рис. 225

Відповідь. 1) $\sqrt{6}$ см; 2) $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Розглянемо побудову зображень перерізів призм із використанням прямої перетину січної площини з площиною однієї з основ. Цю пряму називають ***слідом січної площини.*** Зазначимо, що перерізом призми площиною є многокутник, а його сторони — це відрізки, по яких дана площина перетинає грані. Зрозуміло, що кількість сторін перерізу не перевищує кількості граней призми, а вершинами перерізу є точки перетину січної площини з ребрами призми. Таким чином, для побудови перерізу досить знайти точки перетину січної площини з ребрами призми. Ці точки будуть вершинами шуканого многокутника, який є перерізом призми площиною.

Нехай маємо призму, слід a січної площини, який належить площині однієї з основ, і точку M на поверхні призми, через яку проходить січна площина. Припустимо, що точка M лежить на другій основі призми (рис.226). Тоді січна площина перетинає цю основу по відрізку NL прямої, яка паралельна прямій a (чому?), і проходить через точку M. Отже, провівши через точку M пряму, що паралельна прямій a, до перетину зі сторонами основи, якій належить точка M, ми знайдемо дві вершини N і L шуканого перерізу. Побудову решти вершин описано нижче.

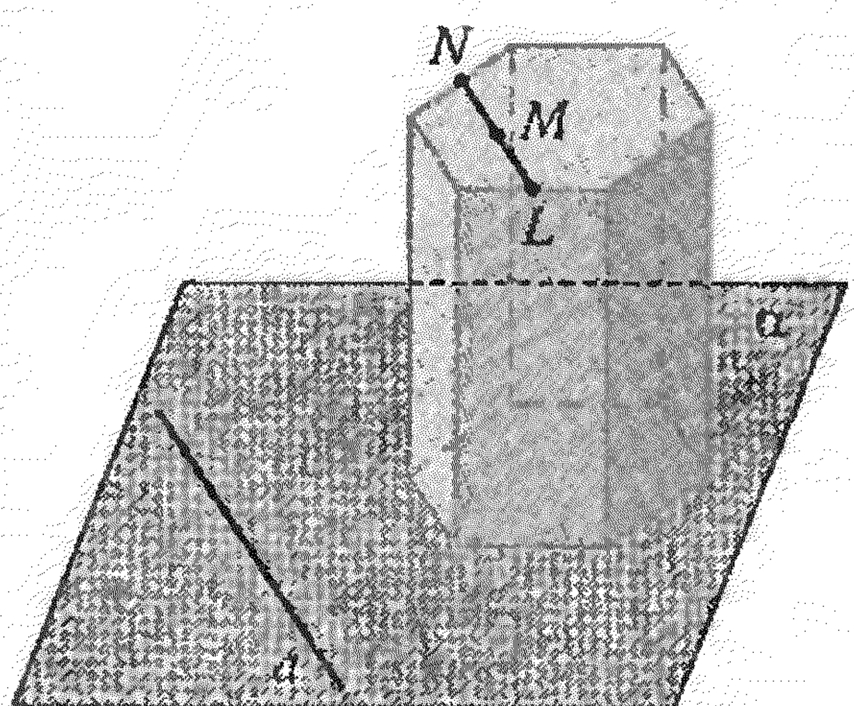


Рис. 226

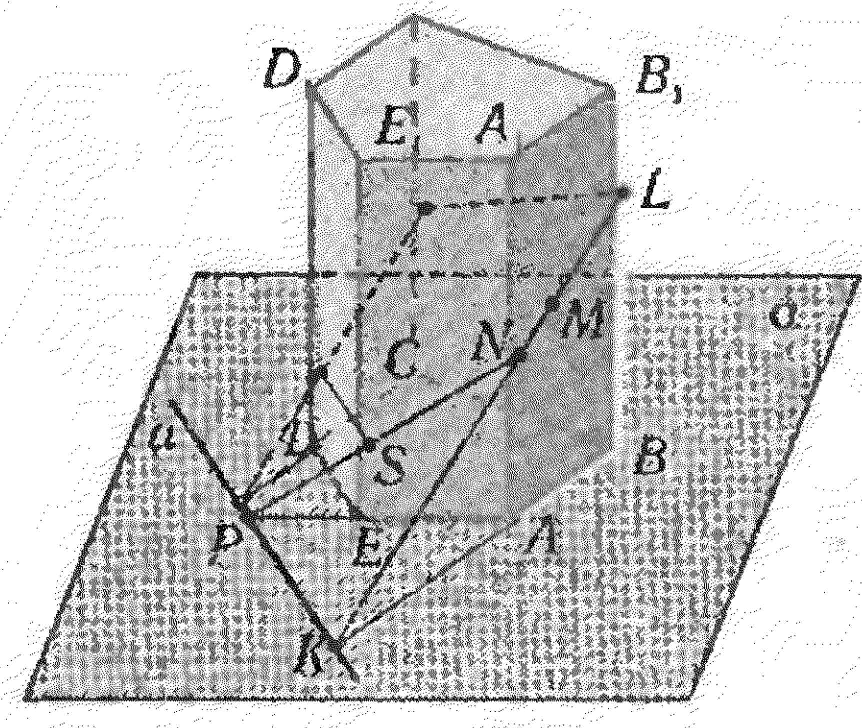


Рис. 227

Розглянемо випадок, коли точка M розміщена на бічній грані ABB_1A_1 (рис 227). Побудуємо спочатку точку K, в якій перетинаються площина цієї грані і пряма a. Для цього досить продовжити ребро AB, що лежить в одній площині з прямою a, до перетину з прямою a. Пряма KM перетинає сторони паралелограма ABB_1A_1 в точках N і L, які і є двома вершинами перерізу (чому?).

Аналогічно будується точка S як точка перетину ребра EE_1 з прямою NP, де P є точкою перетину прямих AE і a (рис. 227). Нехай у даному прикладі пряма a паралельна ребру DE. Тоді, провівши через точку S пряму, що паралельна прямій a, до перетину з ребром DD_1, знайдемо перетин січної площини з гранню EE_1D_1D. Решта вершин перерізу будується за вказаним алгоритмом.

Якщо слід січної площини не задано, а площина визначена, наприклад, трьома точками, що належить призмі, то необхідно спочатку побудувати її слід у площині якоїсь основи. Повернемось до рис. 227. Якби січна площина визначалась точками S, M, L, то дві точки її сліду в площині α можна відшукати як точки перетину прямих LS, BE і ML, AB.

Розглянутий метод побудови перерізів називають ***методом слідів***.

✓ Контрольні запитання

1°. Скільки ребер має п'ятикутна призма?
2°. Чи може призма мати непарну кількість вершин?
3. Чи може призма мати чотири грані?
4. Чи буде переріз, перпендикулярний до бічного ребра призми, перпендикулярним і до її бічної грані?
5°. Чи є призма правильною, якщо: а) рівні всі її бічні ребра; б) всі її бічні грані — прямокутники?
6°. Яку форму може мати переріз правильної чотирикутної призми площиною, паралельною основі?
7°. Чи є правильна чотирикутна призма прямокутним паралелепіпедом?

8°. Чи може основою похилого паралелепіпеда бути прямокутник?

9. Чи існує похилий паралелепіпед, у якого чотири грані є прямокутниками?

10. Чи можна визначити відстань між протилежними верхнім та нижнім кутками кімнати, користуючись звичайною лінійкою?

11. Чи можна простір «замостити» рівними між собою паралелепіпедами?

12. Куб із пофарбованими гранями і ребром завдовжки 6 см розрізали на кубики з ребром завдовжки 1 см. Чи правильно, що кубиків із непофарбованими гранями буде 27?

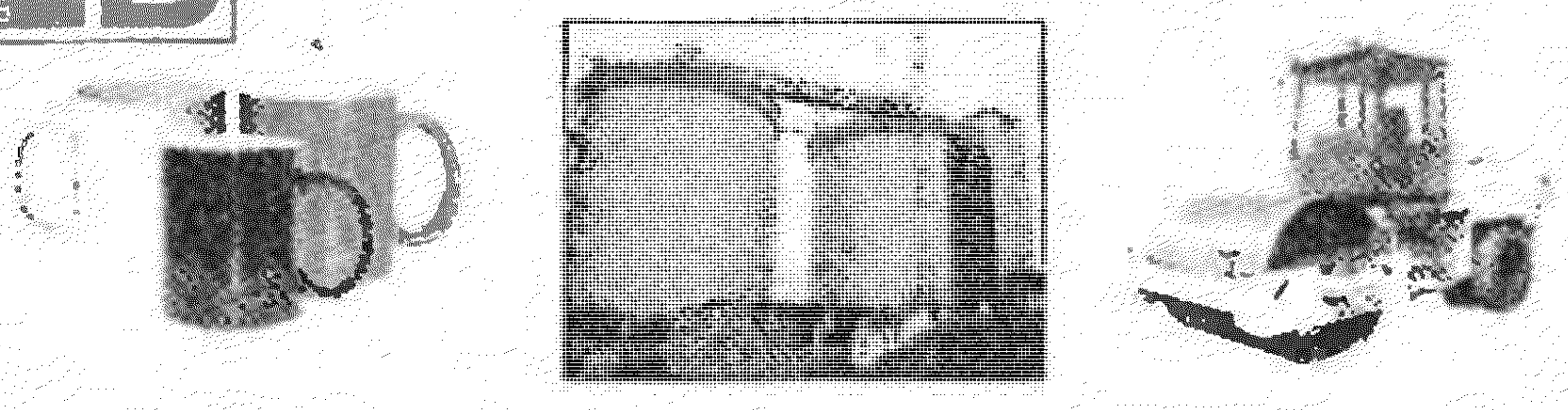
13*. По стінках кубічного приміщення з нижнього кута в протилежний верхній кут необхідно прокласти електродріт. Яким має бути маршрут прокладання, щоб довжина дроту була найменшою? Скільки таких маршрутів?

14*. Маємо аркуш паперу, градуйовану лінійку і сірникову коробку. Знайдіть, не обчислюючи ніяких параметрів, довжину діагоналі, що з'єднує протилежні вершини коробки.

2. Циліндри

Б

Циліндрична форма предметів, конструкцій, будівель зустрічається на кожному кроці (рис. 228, а–в).



а) б) в)

Рис. 228

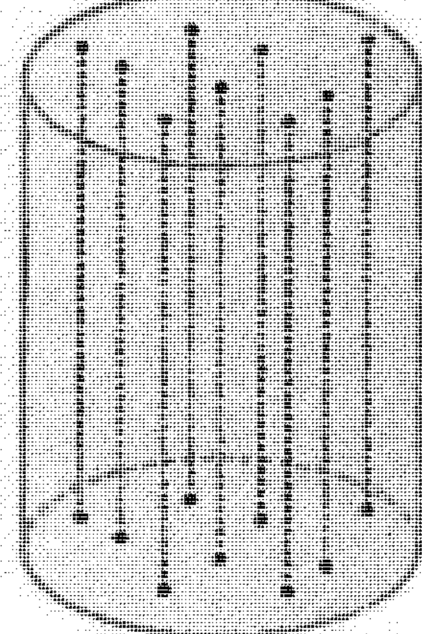


Рис. 229

Звичайний круговий циліндр (рис. 229) можна уявити як фігуру, утворену паралельними і рівними між собою відрізками, які проведені з усіх точок круга і розміщені по один бік від його площини. Якщо ж відповідні відрізки відкладати не від точок круга, а від точок довільної плоскої фігури (основи), то ми одержимо широкий клас фігур у просторі, які також природно назвати ***циліндрами***.

Циліндр *— від грецького κύλινδρος (kylindros) — вал, коток.*

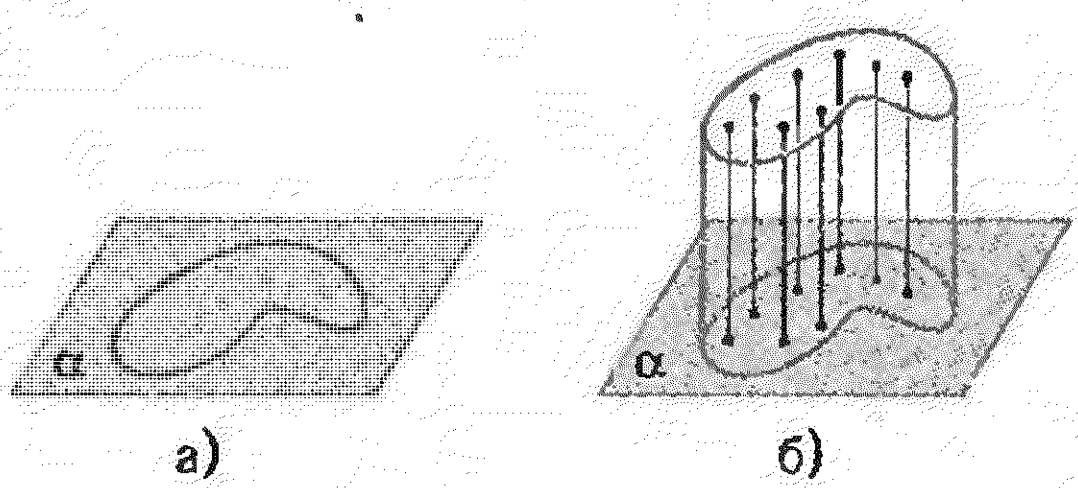


Рис. 230

Нехай дано плоску фігуру, для якої визначено площу (рис. 230, а). З кожної точки цієї фігури відкладемо рівні і паралельні між собою відрізки по один бік від площини α фігури (рис. 230, б). Фігура, що складається з точок цих відрізків, називається ***циліндром***. Відрізки, відкладені при побудові, є ***твірними*** циліндра.

Як і для призм, з побудови циліндра випливає, що кінці його твірних лежать у паралельних площинах і утворюють дві плоскі рівні фігури. Вони називаються ***основами*** циліндра.

З наведеного означення випливає, що поняття циліндра є узагальненням поняття призми. Призма — це циліндр, основами якого є многокутники.

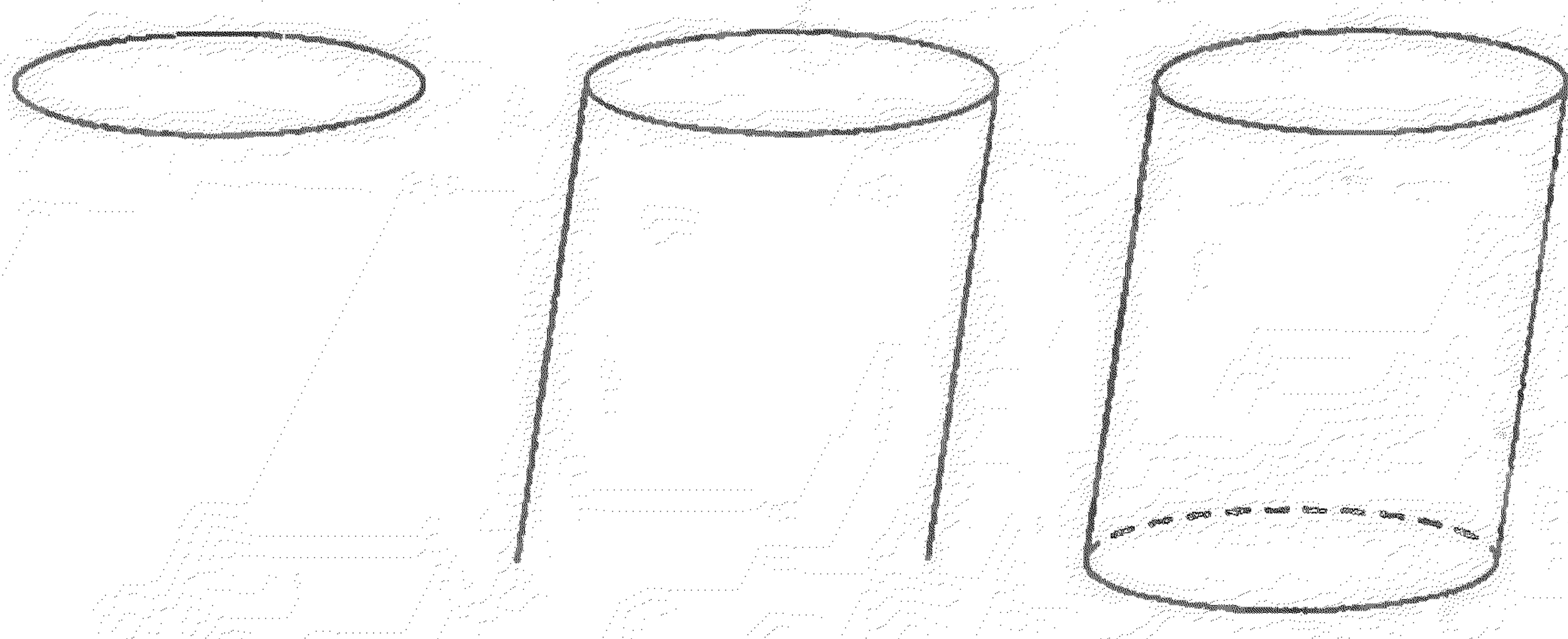
Відстань між площинами основ називається ***висотою*** циліндра. Циліндр називається ***прямим***, якщо його твірні перпендикулярні до основ. У прямому циліндрі довжина твірної дорівнює висоті циліндра, тому і саму твірну в таких циліндрах іноді називають висотою. Непрямий циліндр називається ***похилим***.

Серед усіх циліндрів за своїми властивостями та значенням для описання навколишнього світу виділяють ***кругові циліндри***.

Циліндр, основою якого є круг, називається круговим.

Щоб побудувати зображення такого циліндра, потрібно:

1) побудувати зображення границі верхньої основи — еліпс (рис. 231, а);
2) провести два паралельні і рівні між собою відрізки, дотичні до еліпса (зображення двох твірних) (рис. 231, б);
3) побудувати зображення нижньої основи, враховуючи видимі і невидимі лінії (рис. 231, в).

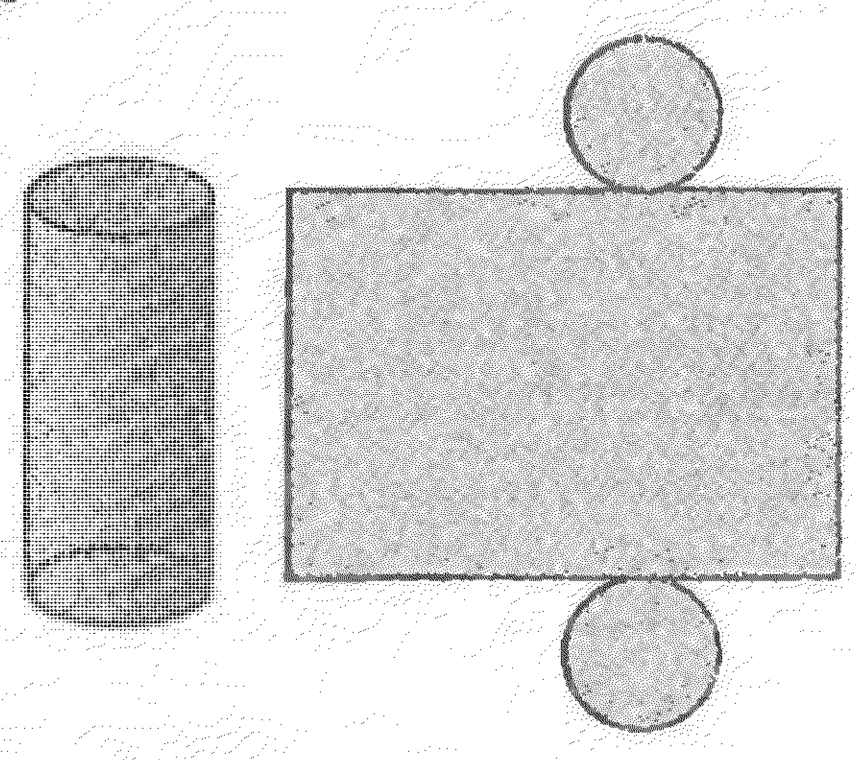


а) б) в)

Рис. 231

Пряма, що проходить через центри основ прямого кругового циліндра, називається його **віссю**.

Поверхня циліндра складається з двох основ і бічної поверхні. Розгортка поверхні прямого кругового циліндра (рис. 232, а) складається з двох кругів і прямокутника (рис. 232, б).



а) б)

Рис. 232

Приклад 3. Діагональ осьового перерізу прямого кругового циліндра дорівнює 20 см і нахилена під кутом 60° до площини основи циліндра. Обчислити:

1) радіус основи циліндра;
2) висоту циліндра;
3) площу осьового перерізу циліндра;
4) площу перерізу, що проходить паралельно осі циліндра на відстані 3 см від неї.

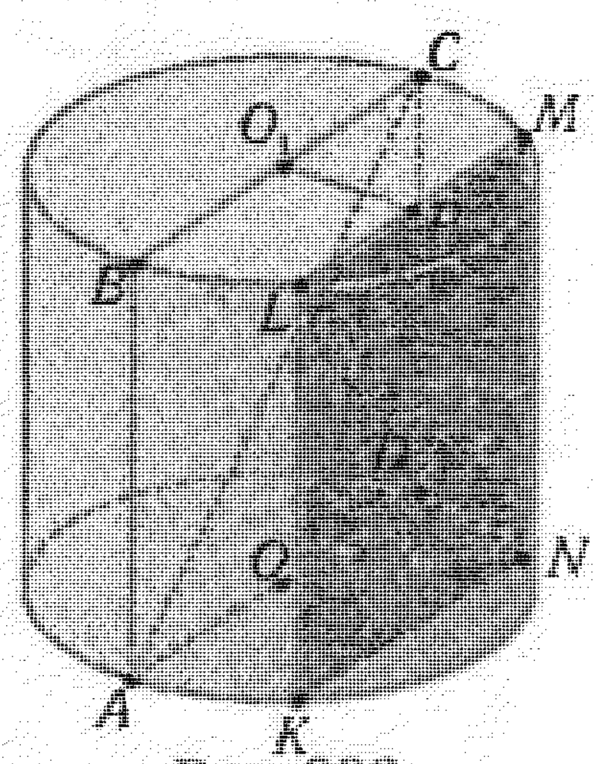


Рис. 233

☐ Нехай прямокутник $ABCD$ є даним осьовим перерізом, $AC = 20$ см, $\angle CAD = 60°$ (рис. 233).

1) Якщо O, O_1 — центри основ, то OD — радіус основи. З прямокутного трикутника ADC маємо:

$$OD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AC \cdot \cos\angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ (см).}$$

2) Катет CD трикутника ACD є висотою циліндра, $CD = AC \cdot \sin\angle CAD = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ (см).

3) Площа осьового перерізу, тобто прямокутника $ABCD$, дорівнює $AD \cdot CD = 100\sqrt{3}$ (см²).

4) Нехай прямокутник $KLMN$ — згаданий в умові переріз. Його відстань від осі визначається перпендикуляром O_1P до хорди LM, O_1P = 3 см. За теоремою Піфагора, з трикутника O_1PM маємо: $PM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см), тобто LM = 8 см.

Площа перерізу дорівнює $LM \cdot MN = 8 \cdot 10\sqrt{3} = 80\sqrt{3}$ (см²). ■

Відповідь. 1) 5 см; 2) $10\sqrt{3}$ см; 3) $100\sqrt{3}$ см²; 4) $80\sqrt{3}$ см².

Щоб мати більш повне уявлення про циліндр, розглянемо його перерізи площинами, паралельними основам і твірним.

Обмежимось циліндрами, основами яких є опуклі фігури (многокутник, круг та ін.) і для яких у планіметрії ставилась задача про вимірювання площ.

Теорема 3 *(про перерізи циліндра).*

Усі перерізи циліндра площинами, паралельними площинам основ, рівні між собою і рівні основам; переріз циліндра, паралельний твірним, є паралелограмом.

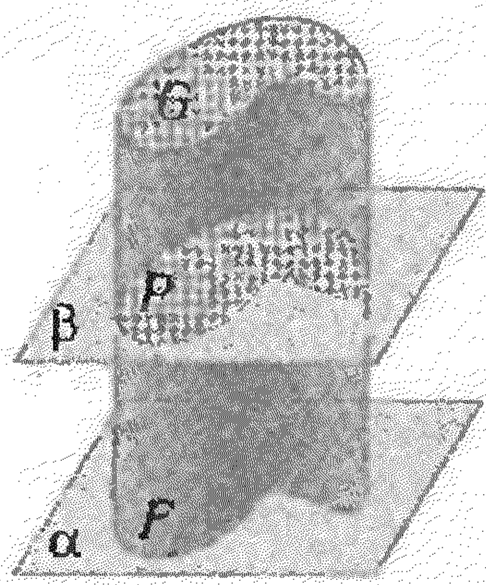


Рис. 234

□ Розглянемо переріз циліндра з основами F і G площиною β, паралельною площині α основи F (рис. 234). Відрізки твірних, що лежать між паралельними площинами α і β, рівні між собою (див. таблицю 40). Тому частина циліндра, що міститься між площинами α і β, також є циліндром. Переріз P циліндра площиною β є однією з його основ. Оскільки цей переріз можна одержати з основи F паралельним перенесенням, він рівний основі циліндра F.

Нехай циліндр перетинається площиною γ, паралельною твірним (рис. 235). Її перетином з основами є паралельні відрізки AB і A_1B_1. Тобто перерізом циліндра площиною γ є чотирикутник ABB_1A_1, сторони якого AA_1 і BB_1 також паралельні між собою, оскільки вони є твірними циліндра (чому?). Тобто ABB_1A_1 — паралелограм. ■

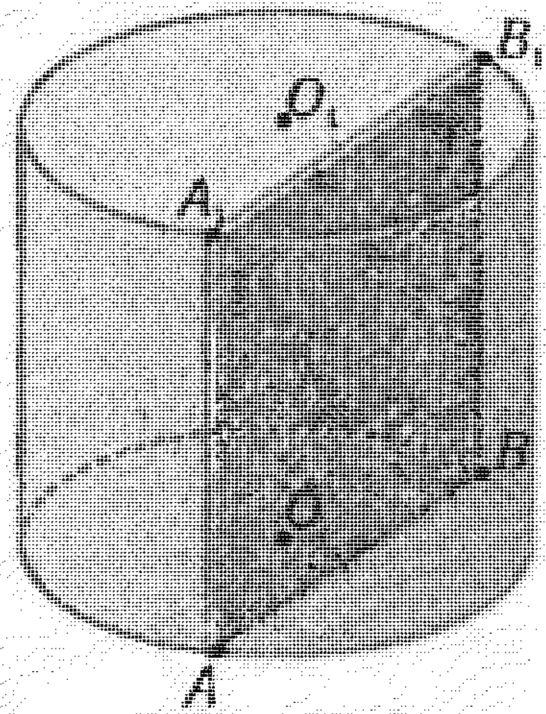


Рис. 235

Кругові циліндри і призми в технічних і будівельних конструкціях часто-густо пов'язані між собою. Однією з геометричних конструкцій, у якій фігурують призма і циліндр, є вписана в круговий циліндр призма і описана навколо нього призма. Для вписаної призми її основи — вписані в основи кругового циліндра многокутники, а основи описаної призми — многокутники, що описані навколо основ циліндра.

На рис. 236, а), б) зображені, відповідно, трикутна призма, вписана в циліндр, і трикутна призма, описана навколо нього (слово «круговий» ми для скорочення пропускаємо). Зрозуміло, що бічні ребра вписаної призми є твірними циліндра, а бічні грані описаної призми дотикаються бічної поверхні циліндра по його твірних.

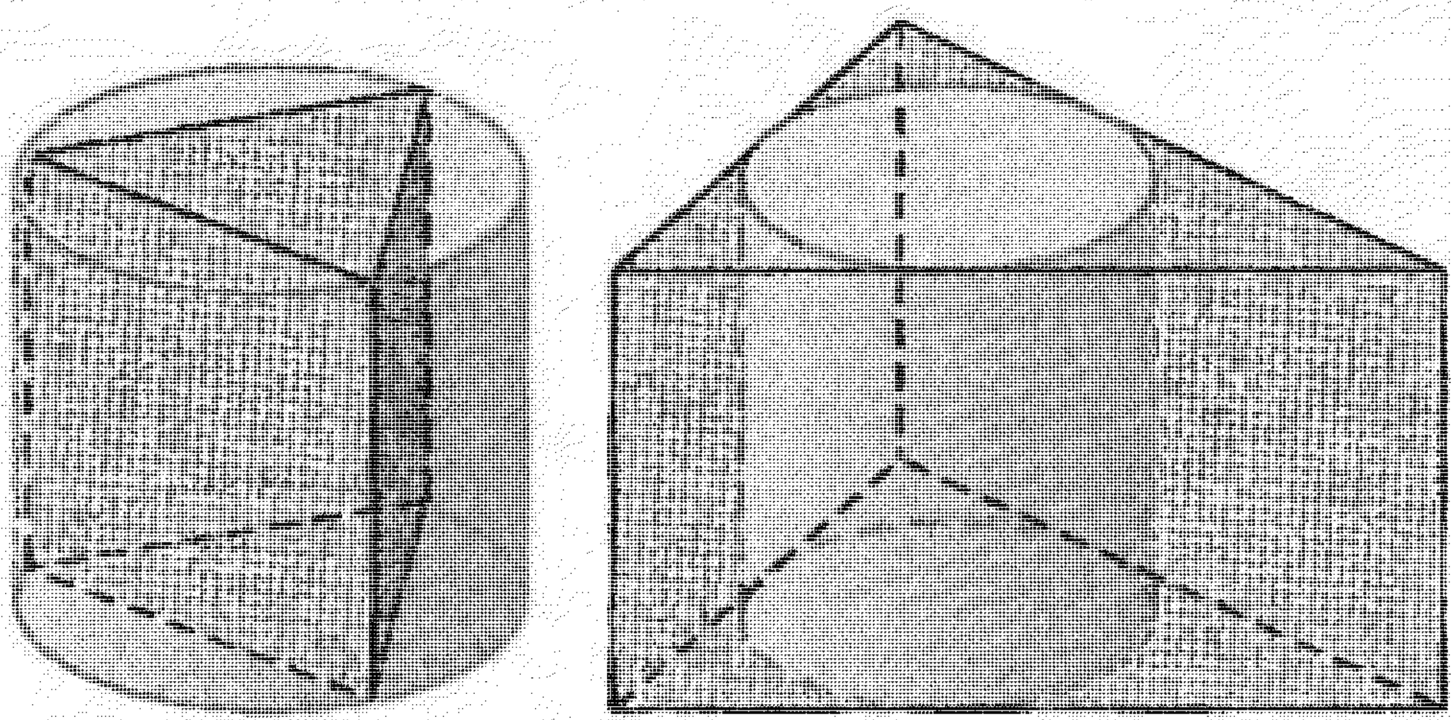

а) б)

Рис. 236

Якщо призма вписана в круговий циліндр, то циліндр називають ***описаним*** навколо призми. Аналогічно для описаної навколо циліндра призми циліндр є вписаною фігурою, тобто поняття «вписаний» та «описаний» взаємно пов'язані, «двоїсті» одне до одного: якщо фігура F вписана у фігуру G, то G описана навколо F.

Ми і надалі будемо зустрічатись із описаними і вписаними стереометричними фігурами. При цьому дані поняття залишаються двоїстими один до одного.

Характерною особливістю вписаної фігури є її щільне розміщення всередині відповідної описаної, тобто збільшуючи лінійні розміри вписаної фігури ми вийдемо за межі описаної навколо неї. У технічних застосуваннях «вирізування» з даної фігури вписаної є найекономнішим з точки зору використання матеріалу.

Приклад 4. Із циліндричної колоди, що має довжину l і діаметр основи d, вирізати наймiцніший брус прямокутного перерізу.

☐ Цілком природним є припущення, що міцність бруса даної форми суттєво пов'язана з площею поперечного перерізу: чим більша площа — тим міцніший брус.

Математичною моделлю задачі є побудова вписаної в прямий круговий циліндр (модель колоди) призми з прямокутною основою (модель бруса) найбільшої площі. Довжина колоди, тобто висота циліндра, ролі не відіграє.

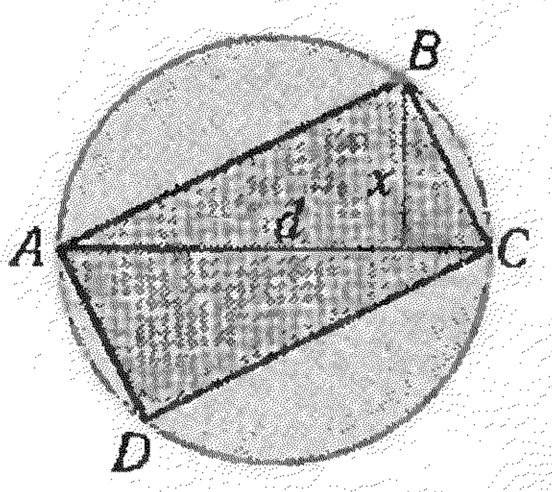


Рис. 237

Розглянемо переріз указаної комбінації тіл площиною, перпендикулярною до твірної циліндра (рис. 237). Прямокутник $ABCD$ вписаний в круг із діаметром d. Тому його діагональ AC є діаметром круга. Площа прямокутника дорівнює подвоєній площі трикутника ABC. Оскільки $S_{ABC}=\frac{1}{2}dx$, де x — висота трикутника, проведена з вершини B, то найбільшого значення ця площа набуде, коли точка B займає «верхнє положення», тобто коли висота, проведена з вершини B, дорівнює радіусу. У цьому випадку прямокутник $ABCD$ є квадратом. Таким чином, шуканою математичною моделлю бруса є пряма призма з квадратною основою, вписана в прямий круговий циліндр.

Звичайно, побудована математична модель є надто «ідеальною». Адже в реальності колода досить наближено має форму прямого кругового циліндра. Припущення щодо умови міцності бруса теж можуть відрізнятись від наведених. ■

Контрольні запитання

1°. Чи завжди площина, що проходить через середину твірної паралельно основі, є площиною симетрії циліндра?
2. Циліндрична втулка котиться по площині. Яка фігура утворюється внаслідок руху її осі?
3°. Чи існує циліндр, перерізи якого площинами, паралельними основі, є нерівними фігурами?
4. Чи можна торт, який має форму циліндра, поділити на вісім рівних частин, зробивши три розрізи?
5°. Чи має прямий круговий циліндр: а) центр симетрії; б) вісь симетрії; в) площину симетрії?
6. Чи рівні між собою висоти двох прямих кругових циліндрів, якщо їхні осьові перерізи рівні між собою?
7. Як виміряти відстань між двома точками на поверхні циліндричної втулки?
8. Як визначити діаметр циліндричного стержня, закріпленого з двох кінців, за допомогою штангенциркуля, якщо відома довжина «ніжок» штангенциркуля, але вони коротші від радіуса стержня?
9. На циліндричний стержень щільно намотано дріт в один шар. Як визначити довжину дроту?

Графічні вправи

1. Знайдіть площі діагональних перерізів прямого паралелепіпеда, зображеного на рис. 238, а)–в), за даними, вказаними на рисунку.

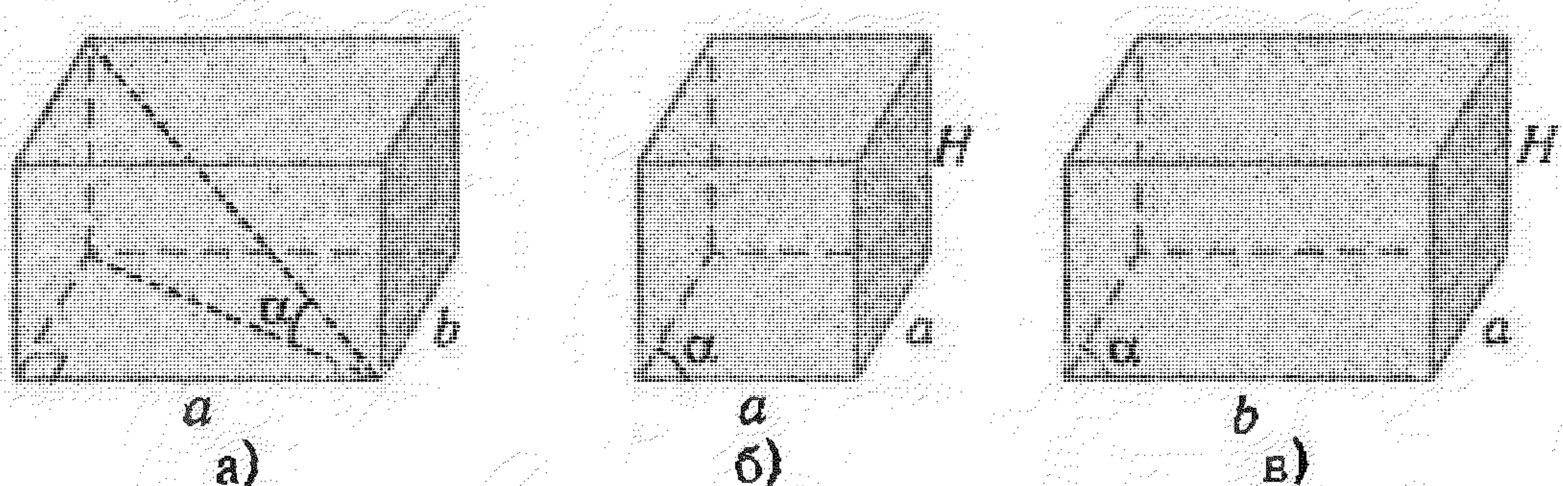
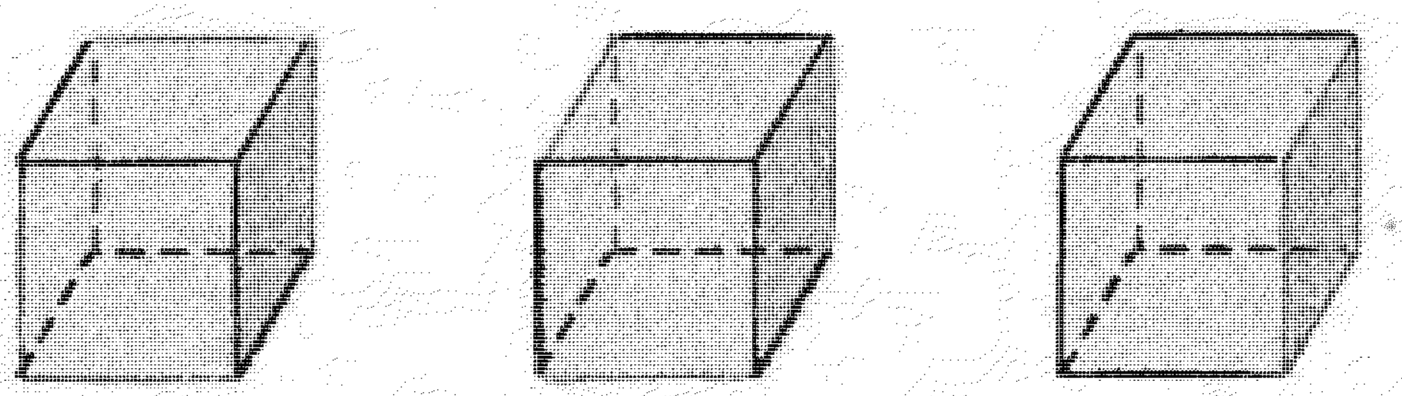


Рис. 238

2. Поверхню прямокутного паралелепіпеда, зображеного на рис. 239, а)–в), розрізано по ребрах, виділених жирною лінією. Зобразіть її відповідну розгортку.



а) б) в)

Рис. 239

3. На рис. 240 зображено правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Зобразіть кут, яким вимірюється нахил діагоналі бічної грані до суміжної грані.
4. На рис. 241 зображено переріз правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною BCM. Зобразіть кут, яким вимірюється нахил перерізу до площини основи.
5. На рис. 242 зображено розгортки бічних поверхонь двох нерівних прямих кругових циліндрів. Знайдіть радіуси основ цих циліндрів.

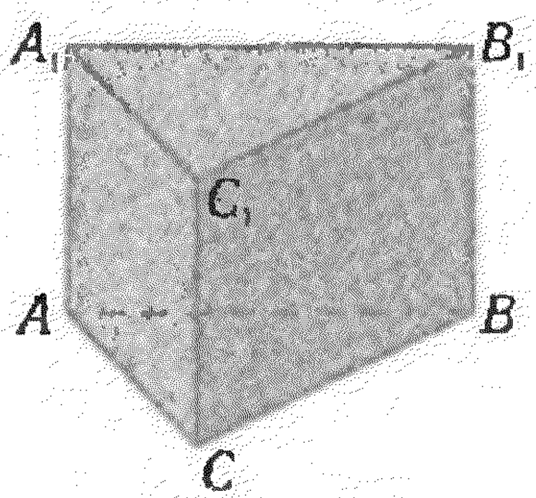


Рис. 240

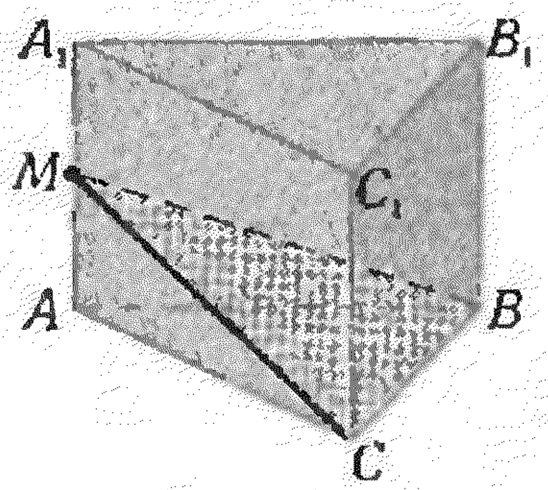


Рис. 241

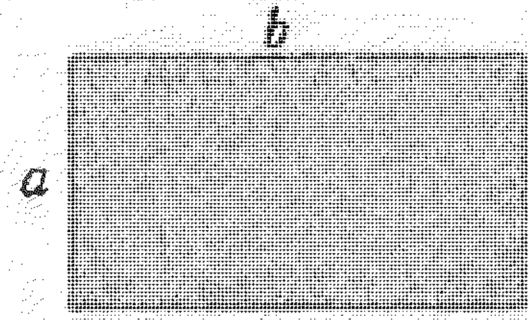


Рис. 242

Задачі

239. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 4 см і 6 см та гострим кутом 30°. Діагональ більшої бічної грані утворює зі стороною основи паралелепіпеда кут 60°. Знайдіть:

1°) діагоналі основи;

2°) висоту паралелепіпеда;

3°) діагоналі паралелепіпеда;

4) кути між діагоналями і площиною основи паралелепіпеда;

5°) кут між діагоналлю більшої бічної грані і бічним ребром;

6°) площі діагональних перерізів;

7) відстань від бічних ребер паралелепіпеда до площин діагональних перерізів;
8) кут нахилу перерізу, що проходить через більші ребра основ, до площини основи;
9*) площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через центри бічних граней.

240. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1 см, 1 см і 2 см. Знайдіть:
1°) кути між діагоналями і площинами граней паралелепіпеда;
2°) кут між діагоналлю паралелепіпеда і більшим його ребром;
3) найбільшу площу перерізу, що проходить через ребро паралелепіпеда;
4) відстані від ребер паралелепіпеда до діагональних перерізів;
5) найбільшу площу перерізу, що проходить через діагональ паралелепіпеда;
6) площу перерізу, що проходить через центр симетрії паралелепіпеда паралельно мимобіжним діагоналям суміжних граней.

241. Висота правильної трикутної призми дорівнює 10 см, а сторона основи — 3 см. Знайдіть:
1°) відстань від вершини верхньої основи до центра нижньої основи;
2°) відстань від центра верхньої основи до сторони нижньої основи;
3°) кут, під яким видно сторону верхньої основи з центра нижньої;
4) площу перерізу, що проходить через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи.

242. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює H. Діагональ бічної грані призми нахилена до площини основи під кутом α.
1) Знайдіть площу основи.
2) Обчисліть площу перерізу призми площиною, що проходить через діагоналі протилежних бічних граней.
3*) Знайдіть кути, під якими діагоналі верхньої основи видно з вершини нижньої основи.

4*) Обчисліть площу перерізу призми площиною, яка проходить через кінці трьох ребер, що виходять з однієї вершини призми.

243. Знайдіть сторону основи правильної трикутної призми, якщо відрізок, що з'єднує центр нижньої основи з вершиною верхньої основи, дорівнює 4 см і нахилений до площини основи під кутом 30°.

244. Знайдіть довжину бічного ребра правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ дорівнює $7\sqrt{2}$ см і утворює з бічною гранню кут 30°.

245. Знайдіть площу перерізу правильної чотирикутної призми з ребром основи 6 дм і висотою 4 дм площиною, яка проходить через середини двох суміжних ребер нижньої основи і діагональ верхньої основи.

246. Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює a, а переріз, що проходить через одну з вершин призми і центри основ, має форму квадрата.

1°) Знайдіть висоту призми.

2°) Обчисліть відстань від осі симетрії призми, яка проходить через центри основ, до бічної грані.

3*) Обчисліть площі перерізів, що проходять через паралельні діагоналі обох основ.

4*) Побудуйте переріз призми площиною, що проходить через середини суміжних ребер верхньої основи і середину рівновіддаленого від них бічного ребра.

247. Основою похилої призми є правильний трикутник. Відомо, що бічне ребро призми утворює рівні кути з двома суміжними сторонами основи.

1) Доведіть, що проекція цього ребра на площину основи перпендикулярна до третьої сторони основи.

2) Знайдіть висоту призми за умови, що бічне ребро дорівнює l і нахилене до суміжних сторін основи під кутом α.

3) Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через точки перетину діагоналей рівних граней і середину ребра верхньої основи, що належить третій грані.

248. Доведіть, що:

1°) грані прямої призми перпендикулярні до основ;

2) величина двогранного кута між суміжними бічними гранями правильної призми дорівнює величині кута між суміжними ребрами основи;

3) переріз призми, перпендикулярний до бічного ребра, є перпендикулярним і до площин усіх бічних граней;
4) площа перерізу прямої призми площиною, що перетинає всі бічні ребра, не менша від площі основи.

---

249. Діагональ осьового перерізу прямого кругового циліндра дорівнює 20 см і нахилена під кутом 60° до площини основи циліндра. Знайдіть:
1°) радіус основи циліндра;
2°) висоту циліндра;
3°) площу осьового перерізу циліндра;
4) площу перерізу, що проходить паралельно осі циліндра на відстані 3 см від неї;
5) площу перерізу циліндра, що проходить через твірну бічної поверхні циліндра під кутом 30° до осьового перерізу;
6) кут нахилу до площини основи циліндра відрізка, який з'єднує центр однієї основи з точкою кола іншої.

250. Осьовим перерізом прямого кругового циліндра є квадрат із діагоналлю $10\sqrt{2}$ см. Знайдіть:
1°) радіус основи циліндра;
2°) сторону основи правильної трикутної призми, бічні ребра якої збігаються з твірними циліндра;
3°) площу перерізу цієї призми площиною, яка проходить через сторону основи і центр другої основи;
4°) кут нахилу площини цього перерізу до осі циліндра;
5) площу перерізу циліндра площиною, що проходить паралельно його осі на відстані 2 см від неї;
6) відстань від осі циліндра до паралельного з нею перерізу циліндра, площа якого дорівнює площі основи.

251. Висота прямого кругового циліндра дорівнює H, радіус основи — R. Знайдіть:
1°) площу осьового перерізу;
2°) кут, під яким діаметр верхньої основи видно з центра нижньої;
3) кут, під яким діаметр верхньої основи видно з найбільш віддаленої від нього точки нижньої основи;
4*) найбільшу довжину відрізка, що цілком поміститься в циліндрі.

252. Радіус основи прямого кругового циліндра дорівнює 26 см, довжина твірної — 48 см. На якій відстані від осі циліндра слід провести переріз, паралельний осі циліндра, щоб він мав форму квадрата?

253. Через твірну прямого кругового циліндра проходять два перерізи. Один із них — осьовий і має площу, у два рази більшу, ніж площа іншого перерізу. Знайдіть кут між січними площинами.

254. У прямому круговому циліндрі паралельно його осі на відстані a від неї проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу в α радіан. Площа перерізу дорівнює S. Знайдіть висоту циліндра.

255. Площа прямокутника дорівнює S. Знайдіть площу осьового перерізу прямого кругового циліндра, згорнутого з прямокутника.

Вправи для повторення

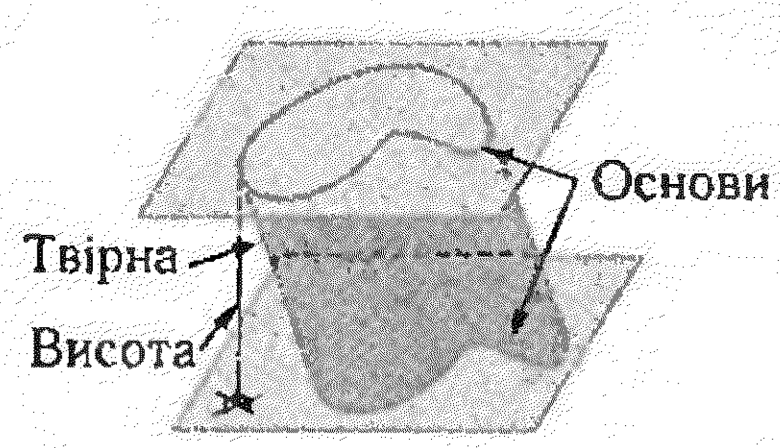
256. Дано правильний шестикутник. Для довільної його діагоналі вкажіть діагоналі:
1) рівні їй;
2) перпендикулярні до неї;
3) паралельні їй.

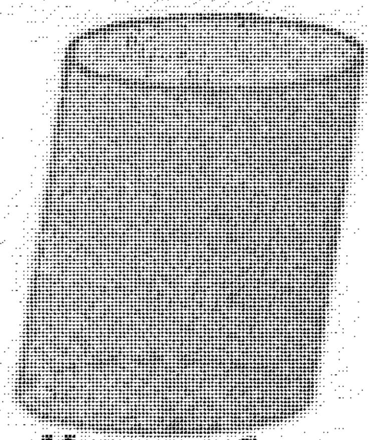
257. Заповніть таблицю.

Фігура / Кількість	Призма			Піраміда		
	4-кутна	5-кутна	n-кутна	4-кутна	5-кутна	n-кутна
Граней						
Вершин						
Ребер						

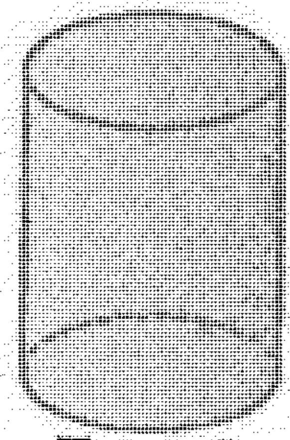
Підсумок

Циліндром називається геометрична фігура утворена рівними і паралельними між собою відрізками, що проведені від усіх точок даної плоскої фігури по один бік від площини фігури.





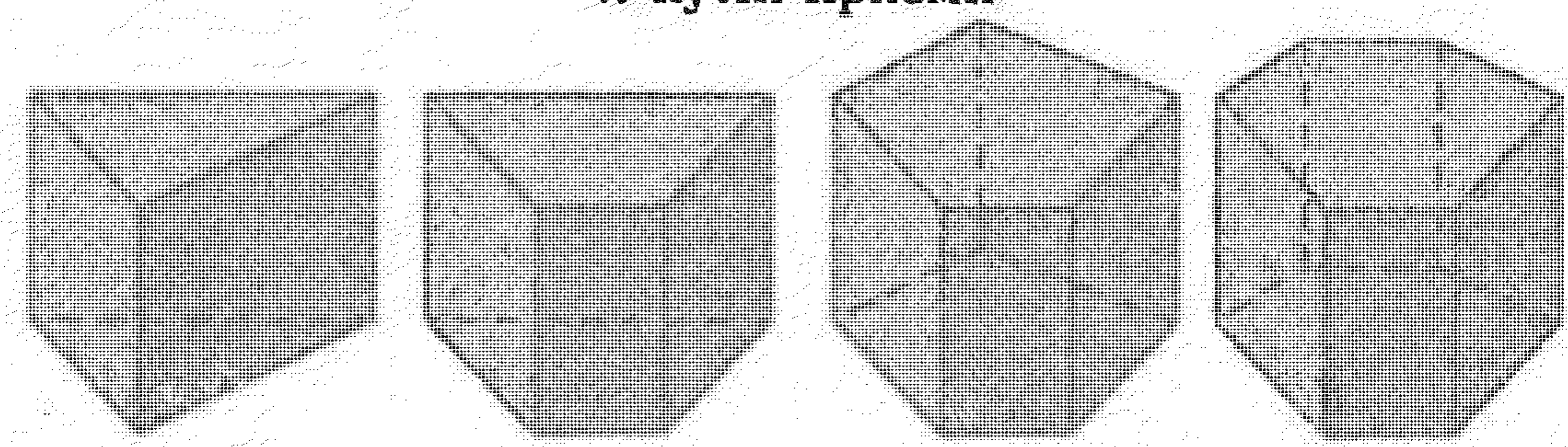
Круговий циліндр



Прямий круговий циліндр

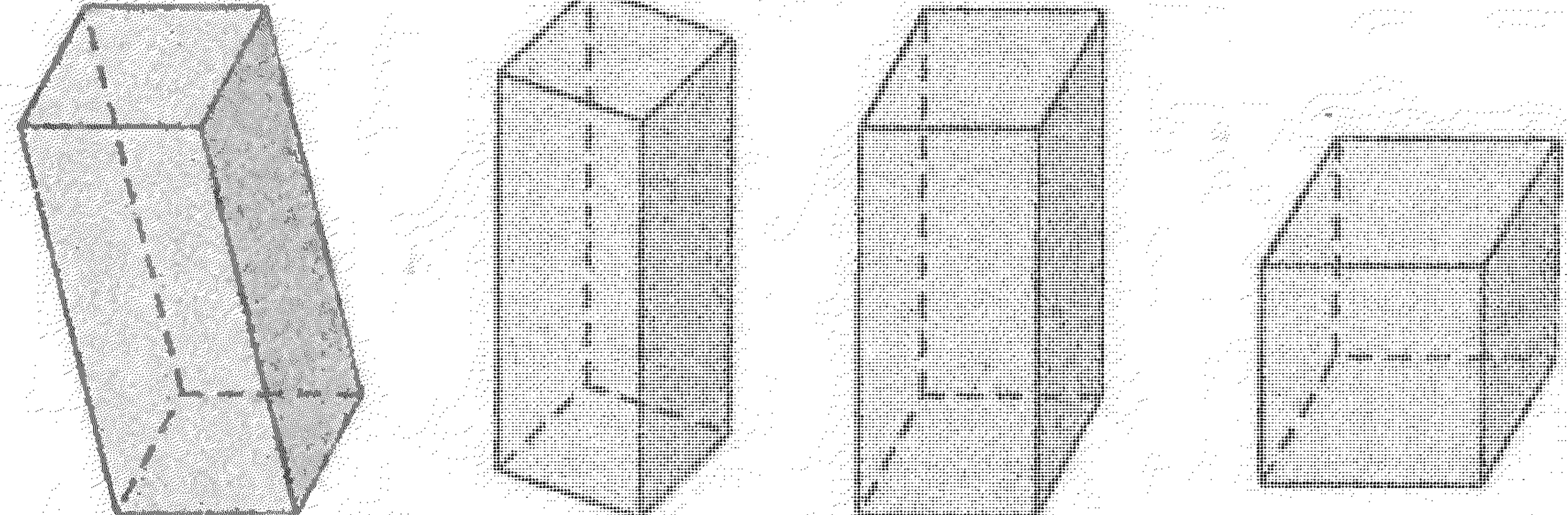
Призма є циліндром, в основі якого лежить многокутник.

n-кутні призми



n=3 n=4 n=5 n=6

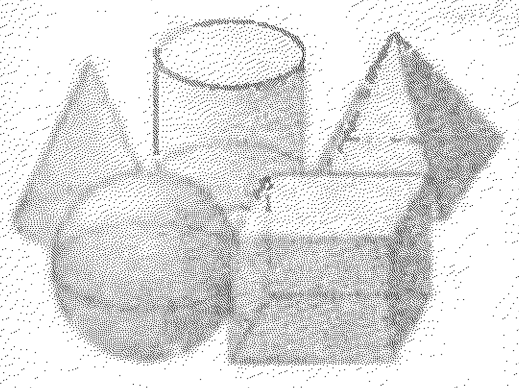
Паралелепіпеди



Похилий Прямий Прямокутний Куб

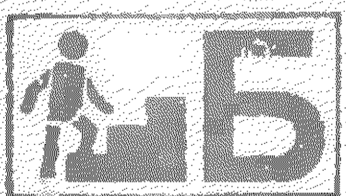
Головні твердження

1. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл. Ця точка є центром симетрії паралелепіпеда.
2. У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

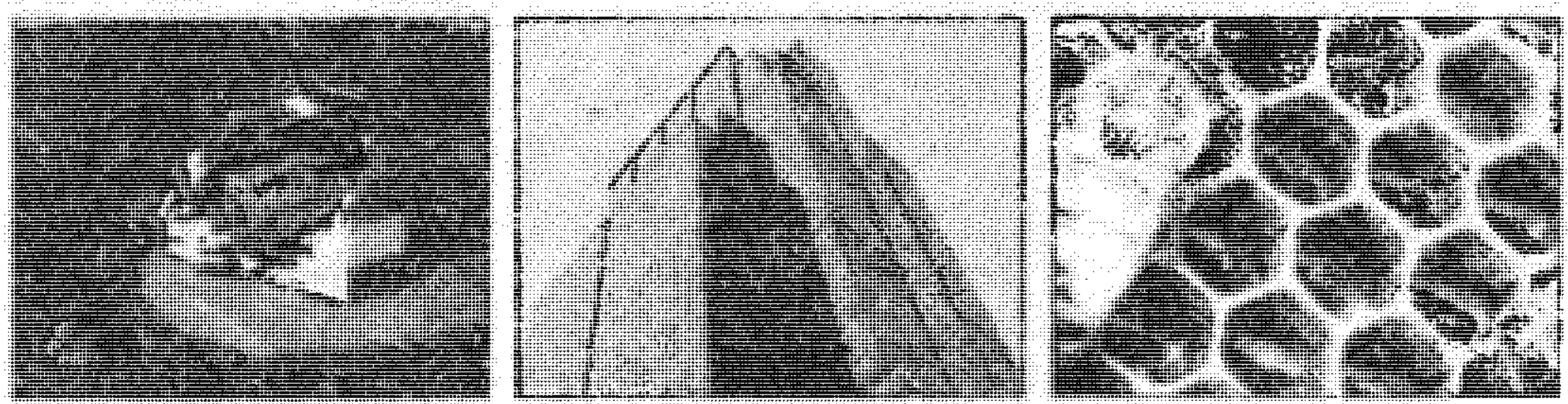


§14. Многогранники

У цьому параграфі розглядається клас просторових фігур, до якого належать піраміди і призми. Характеристичною властивістю фігур цього класу є будова їхньої поверхні.



Многогранники є одним із важливих видів просторових геометричних фігур. За своєю будовою вони є просторовими аналогами многокутників на площині. Поверхні многогранників складаються з многокутників, подібно до того, як межі многокутників — з відрізків. Саме ця властивість многогранників визначає їхню роль у моделюванні просторових форм об'єктів навколишнього середовища, зокрема тих, які людина широко використовує у своєму житті (рис. 243, а–в).



а) б) в)

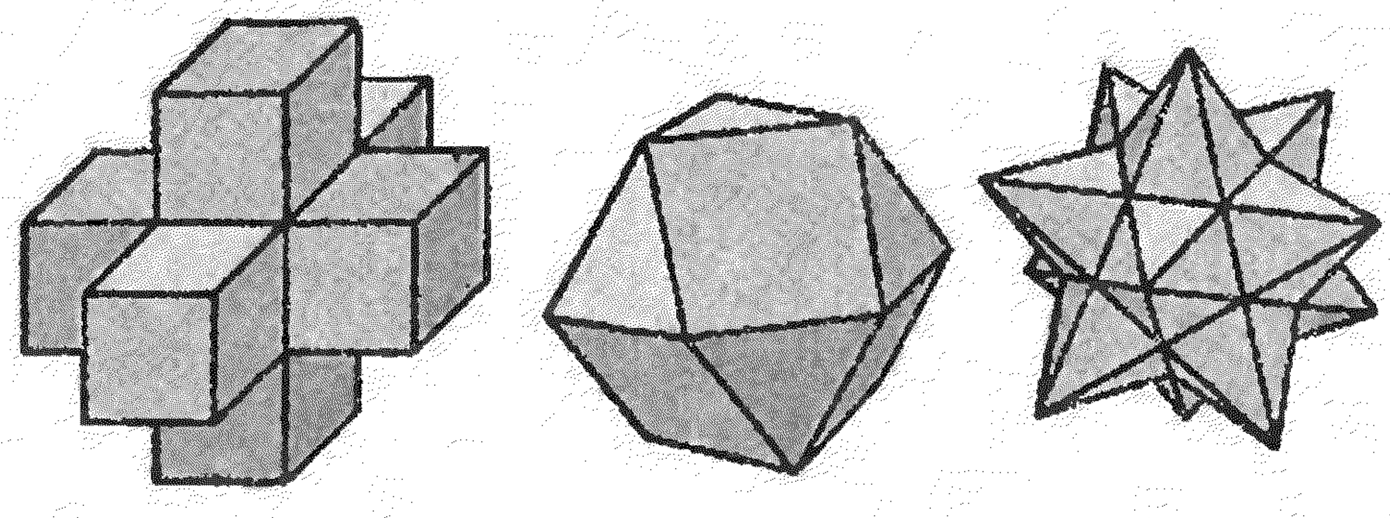
Рис. 243

Піраміди і призми є найбільш уживаними многогранниками. Їх об'єднує те, що кожна з них є множиною точок простору, обмеженої многокутниками — їхніми гранями.

Многогранником називається множина точок простору, обмежена скінченною кількістю плоских многокутників із попарно спільними сторонами.

Самі ці многокутники утворюють ***поверхню*** многогранника і називаються його ***гранями***, сторони граней називаються ***ребрами***, а вершини — ***вершинами*** многогранника.

На рис. 244 зображено многогранники. Неважко побачити, що вони складені з призм і пірамід. Наведені приклади показують, що користуючись простими многогранниками, можна утворити досить складні фігури.

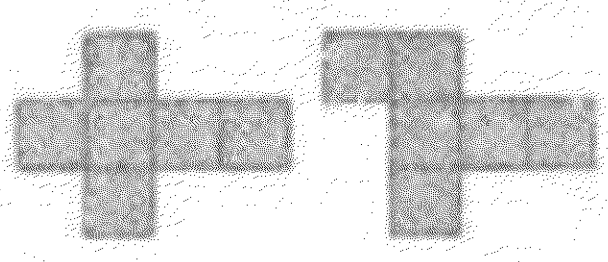


а) б) в)

Рис. 244

Як і многокутники, многогранники можуть бути ***опуклими*** і ***неопуклими***. В опуклому многограннику дві його довільні точки можна сполучити відрізком, що належить многограннику. Неопуклий многогранник цієї властивості не має. Наприклад, многогранник, зображений на рис. 244, в), є неопуклим, оскільки відрізок, який сполучає дві найближчі несуміжні вершини, не належить многограннику. Многогранник, зображений на рис. 244, б), є опуклим (спробуйте це обґрунтувати).

Далі обмежимось розглядом опуклих многогранників. Аналогічна домовленість використовувалась при вивченні многокутників у планіметрії.



а) б)

Рис. 245

Виготовлені з картону моделі поверхонь многогранників можна розрізати вздовж окремих ребер і розгорнути так, щоб вони перетворилися на об'єднання многокутників. Цю фігуру називають ***розгорткою поверхні многогранника.*** Поверхня многогранника може мати кілька різних розгорток. Так, на рис. 245, а), б) зображені розгортки поверхні одного й того самого куба (спробуйте з них склеїти куб).

Многогранники належать до геометричних фігур, які називаються ***тілами***. Наочно геометричне тіло можна уявити як частину простору, що занята фізичним тілом і обмежена поверхнею.

Многогранники часто використовуються при моделюванні навколишнього середовища. Зокрема це стосується правильних многогранників.

Опуклий многогранник називається правильним, якщо його гранями є рівні між собою правильні многокутники і в кожній з його вершин сходиться однакова кількість ребер.

Існує п'ять видів правильних многогранників: правильний тетраедр (рис. 246), куб (рис. 247), октаедр (рис. 248), ікосаедр (рис. 249), додекаедр (рис. 250).

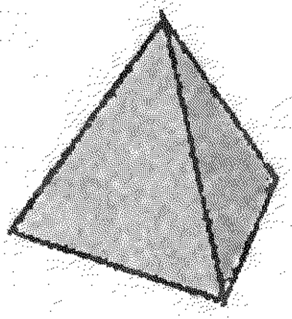


Рис. 246

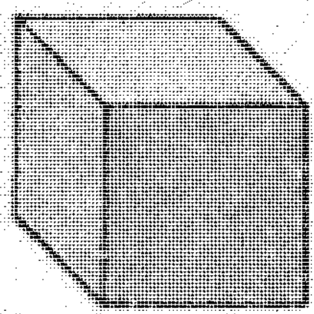


Рис. 247

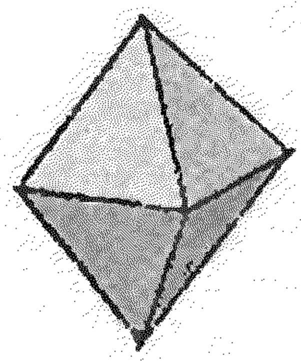


Рис. 248

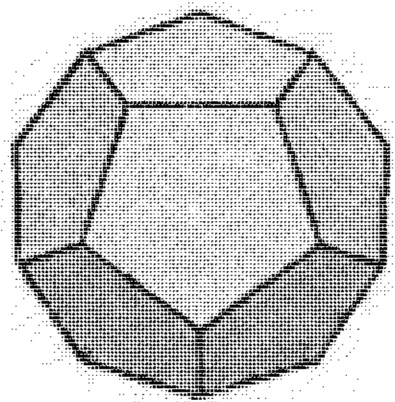


Рис. 249

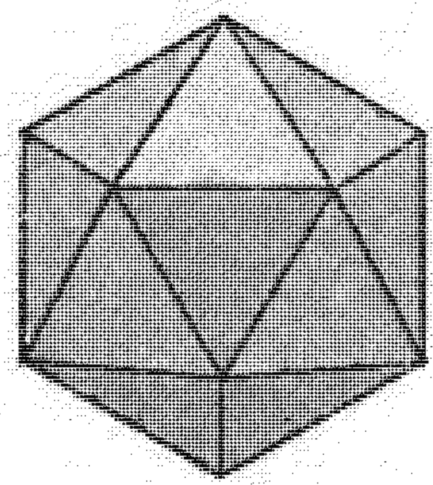


Рис. 250

Між кількостями граней, ребер і вершин многогранників існують певні співвідношення. Наприклад, якщо позначити кількість вершин многогранника через B, а через P — кількість його ребер, то справджується нерівність $P \geq \frac{3B}{2}$. Справді, у кожній вершині многогранника сходиться не менш ніж три ребра. Кожне ребро сполучає дві вершини. Тому подвоєна кількість ребер більша від потроєної кількості вершин: $2P \geq 3B$.

Залежність між кількістю ребер P, кількістю граней $Г$ і кількістю вершин B опуклого многогранника знайшов Л. Ейлер у XVIII ст. Він довів, що

$$Г + B = P + 2.$$

Довести цю формулу непросто, хоча для відомих нам многогранників вона, очевидно, справджується. Так, для куба $Г = 6$, $B = 8$, $P = 12$, тобто $6 + 8 = 12 + 2$. Пропонуємо перевірити цю формулу для призм і пірамід.

Одним із найважливіших способів утворення нових многогранників на основі даного є розбиття його площиною на частини. У зв'язку з цим розглянемо докладніше побудову перерізів многогранників. З означень многогранника і перерізу фігури площиною випливають наступні твердження.

1. Перерізом опуклого многогранника є опуклий многокутник.

2. Вершинами перерізу є точки перетину січної площини з ребрами многогранника.

3. Сторонами перерізу є перетини січної площини з гранями многогранника.

4. Кількість сторін перерізу не може перевищувати кількості граней многогранника.

Із цих тверджень випливає, що для побудови перерізів многогранника достатньо побудувати точки перетину січної площини з його ребрами.

Приклад 1. Побудувати переріз чотирикутної призми, зображеної на рис. 251, площиною, що проходить через точки M, N, P, розміщені на бічних гранях призми.

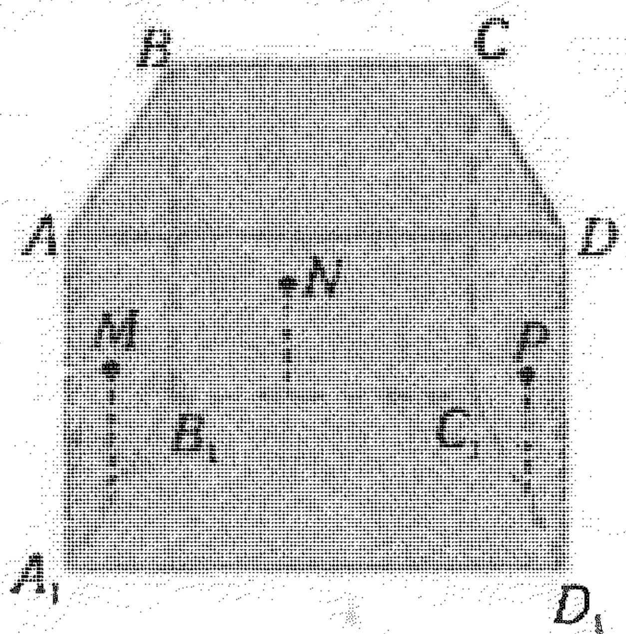


Рис. 251

☐ Знайдемо точку X перетину січної площини з ребром AA_1. Для цього сполучимо в площині $A_1B_1C_1D_1$ точки M_1 і P_1, A_1 і N_1, де M_1, N_1, P_1 — паралельні проекції точок M, N, P на площину $A_1B_1C_1D_1$ з напрямом проектування AA_1 (рис. 252, а). Точка перетину O_1 отриманих відрізків є проекцією точки перетину відрізків MP і NX, які лежать у січній площині. Ми можемо знайти точку O як

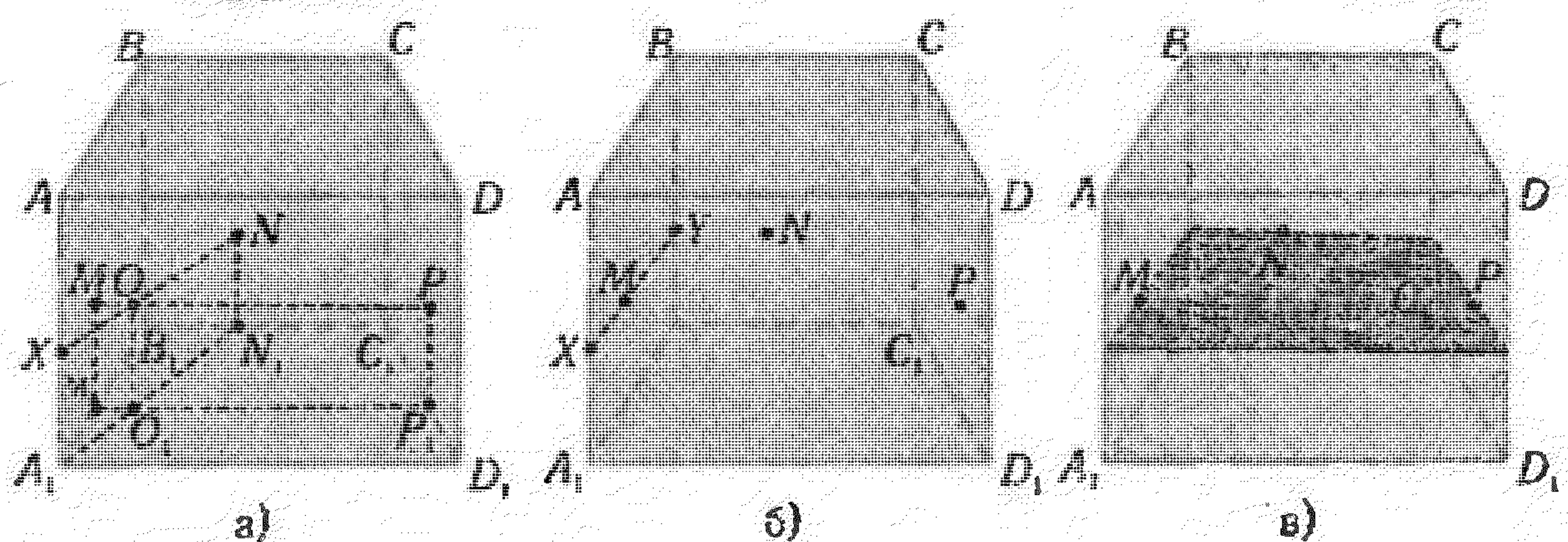


Рис. 252

точку перетину відрізка MP і прямої, що проходить через точку O_1 паралельно AA_1. Точка X лежить на прямих NO і AA_1, тобто є їхнім перетином. Отже, перетин січної площини з ребром AA_1 побудовано.

Оскільки в грані AA_1B_1B тепер маємо дві точки перетину (точки X і M), то провівши пряму через ці точки, одержимо перетин XY січної площини з даною гранню (рис. 252, б). Продовживши аналогічні побудови, дістанемо переріз призми (рис. 252, в). ■

Використаний метод побудови перерізів називається ***методом відповідності***, або ж ***методом внутрішнього проектування***. Він іноді зручніший за метод слідів, розглянутий у попередньому параграфі. Побудова перерізу методом слідів у прикладі 1 викликає певні технічні труднощі, оскільки площина перерізу має невеликий нахил до площини основи.

Приклад 2. За допомогою методу внутрішнього проектування побудувати переріз трикутної піраміди, що проходить через точки K, L, M, розміщені на бічних гранях.

□ Нехай SK_1, SL_1, SM_1 — відрізки, на яких лежать дані точки K, L, M (рис. 253, а). Знайдемо точку X перетину січної площини з ребром SB. Перетином площин SBL і SKM з площиною основи є прямі BL_1 і K_1M_1 (рис. 253, б). Якщо O_1 — точка їхнього перетину, то точка O перетину прямих SO_1 і KM належить січній площині. Тоді і пряма LO належить січній площині. Точка X перетину прямих LO і SB (обидві вони лежать в площині SBL) є точкою перетину січної площини з ребром SB.

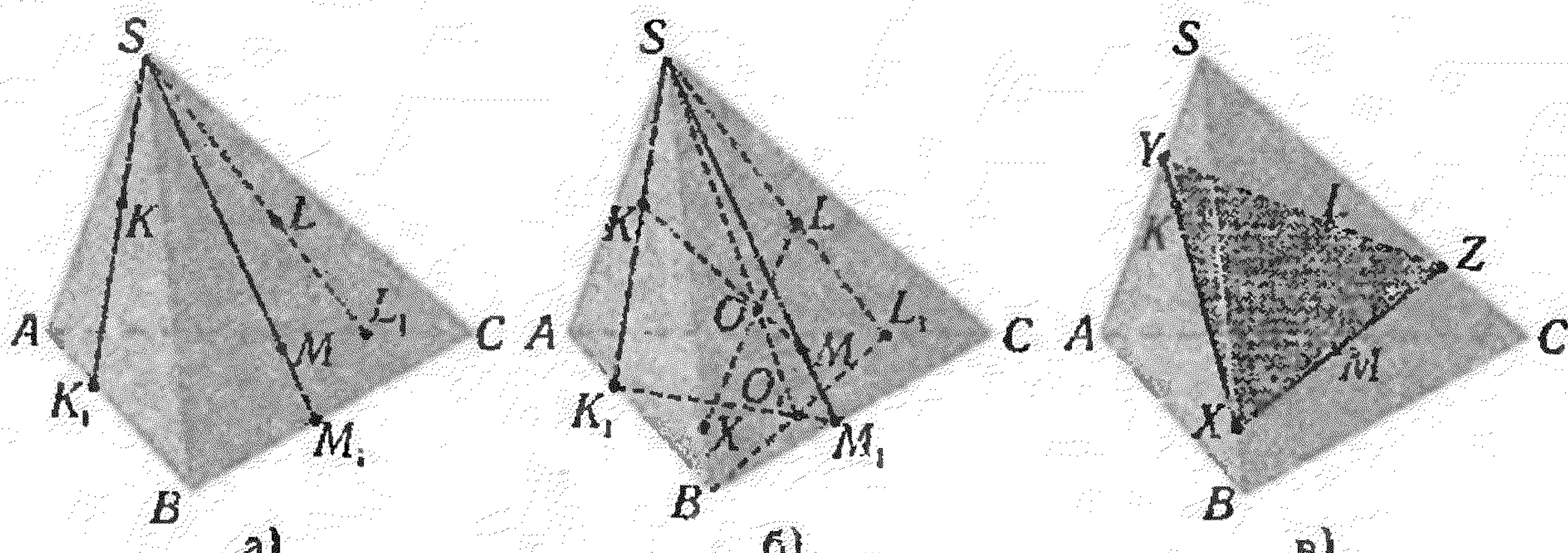
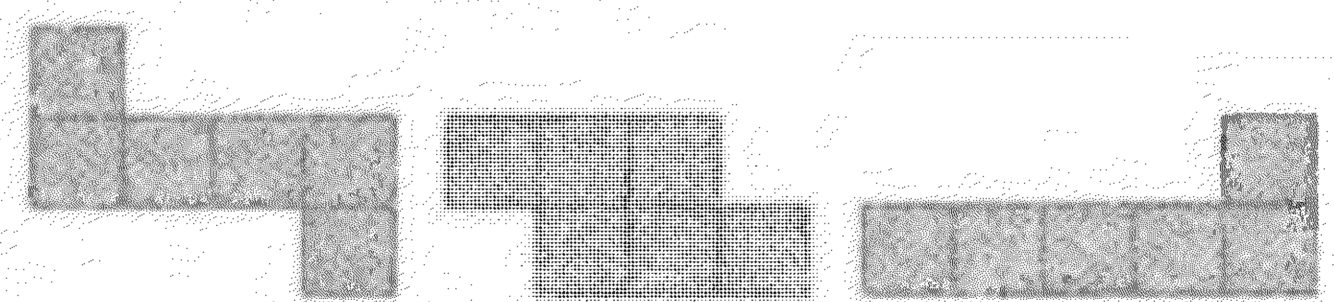


Рис. 253

Щоб знайти точки Y, Z перетину січної площини з іншими ребрами, послідовно знаходимо точку Y як точку перетину XK і SA, точку Z як точку перетину SC і YL (рис. 253, в). Трикутник XYZ і є шуканим перерізом. ■

Контрольні запитання

1°. Яку найменшу кількість ребер може мати многогранник?
2°. Чи може гранню п'ятигранника бути п'ятикутник?
3. Чи може кількість ребер многогранника дорівнювати кількості вершин?
4. Чи існує многогранник, у якого рівно сім ребер?
5°. Чи може розгорткою куба бути фігура, зображена на: а) рис. 254, а); б) рис. 254, б); в) рис. 254, в)?



а) б) в)

Рис. 254

6. Чи правильно, що опуклий многогранник є правильним, якщо його грані — правильні многокутники?
7°. Опуклий многогранник розбили площиною на дві частини. Чи є многогранником кожна з цих частин?
8. Чи може правильна нетрикутна піраміда бути правильним многогранником?
9. Чи може шестикутник бути перерізом: а) правильного тетраедра; б) октаедра?

Графічні вправи

1. Побудуйте переріз призми, який утворено площиною, що проходить через точки M, N, P на: 1) рис. 255, а); 2) рис. 255, б); 3) рис. 255, в).
2. Зобразіть многогранник, у якого:
1) шість вершин і п'ять граней, але не призму;
2) вершин стільки ж, скільки граней, але не піраміду.
3*. Зобразіть різні розгортки правильного тетраедра. Виберіть із них ту, в якої сума довжин сторін, що склеюються, найменша.

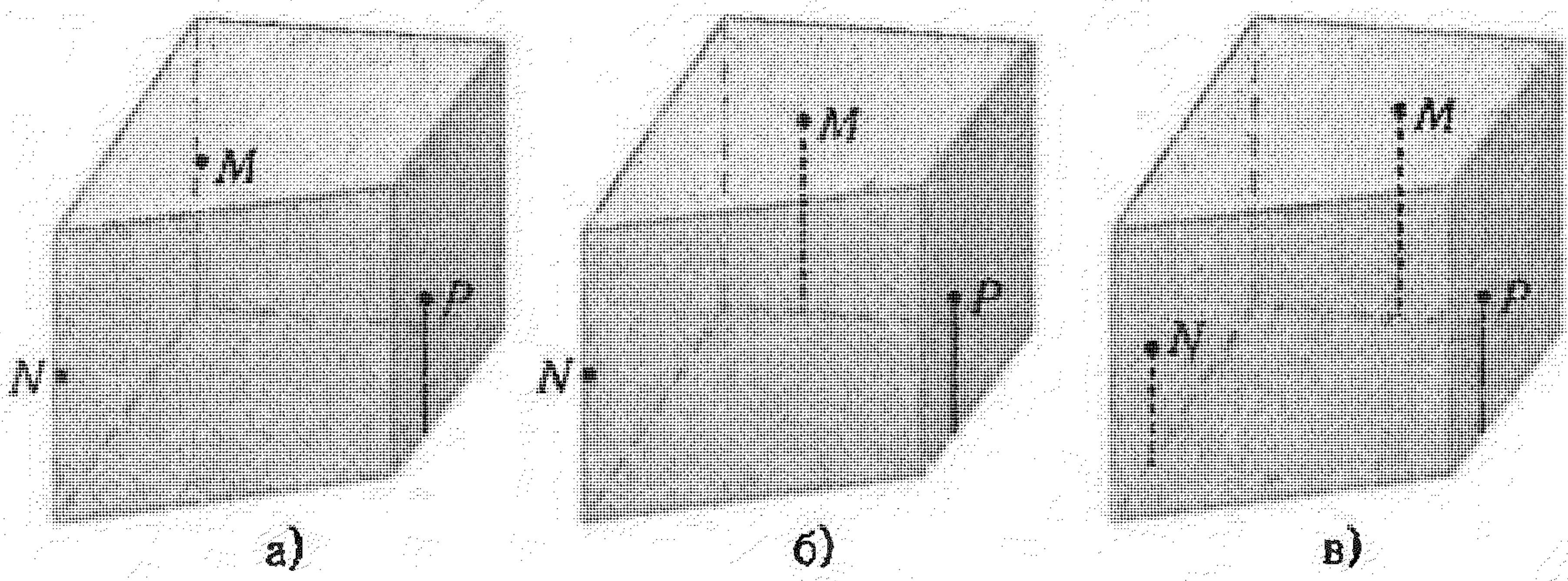


Рис. 255

4*. Проведіть усередині квадрата відрізки так, щоб дістати розгортку тетраедра.

Задачі

258. Зобразіть п'ятикутну призму. Візьміть на її поверхні три точки. Побудуйте переріз призми площиною, що проходить через ці точки, якщо:
1) усі точки лежать на бічних ребрах;
2) одна точка лежить на ребрі основи, а дві — на бічних ребрах, що не прилягають до цього ребра;
3) дві точки лежать на бічних ребрах, а одна — на бічній грані, що не містить ці ребра;
4) дві точки лежать на бічних гранях, а одна — на бічному ребрі, що не належить цим граням.

259. Який многогранник при освітленні паралельними променями світла дає тінь у вигляді:
1) квадрата;
2) рівнобедреного трикутника;
3) правильного трикутника;
4) рівнобічної трапеції;
5) прямокутника;
6) ромба?

260*. Доведіть, що:
1) центри граней куба є вершинами октаедра;
2) центри граней правильного многогранника є вершинами іншого правильного многогранника.

261. Доведіть,що кількість плоских кутів многогранника вдвічі більша за кількість його ребер.

262*. Обертаючись навколо одного з ребер многогранника, площина утворює такі перерізи:
1) рівнобедрений трикутник;
2) паралелограм;
3) рівнобічну трапецію.
Побудуйте цей многогранник.

263*. На скільки частин поділяють простір площини всіх граней:
1) трикутної призми;
2) куба;
3) трикутної піраміди?

264*. Дано правильний тетраедр. Доведіть, що:
1) сума відстаней від довільної внутрішньої точки тетраедра до його граней дорівнює висоті тетраедра;
2) прямі, які з'єднують середину будь-якої висоти тетраедра з його вершинами, перпендикулярні між собою.

Вправи на повторення

265. У колі, довжина якого дорівнює 10π см, проведено хорду.
1) Знайдіть відстань від центра кола до хорди, якщо її довжина дорівнює 8 см.
2) Під яким кутом видно з центра кола хорду завдовжки 8 см?
3) Знайдіть довжину хорди кола, яка знаходиться на відстані 2 см від центра кола.

266. Опишіть симетрії кола у просторі.

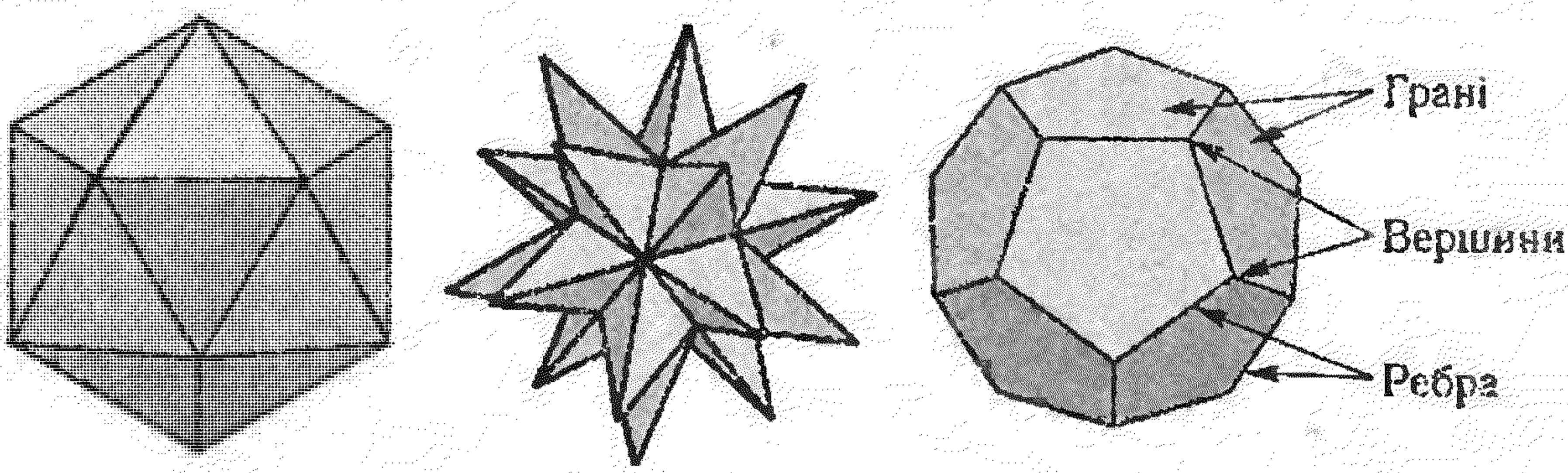
267. Знайдіть найбільший радіус кола, яке можна помістити в прямокутник з вимірами a і b.

Підсумок

Головні означення

Многогранником називається множина точок простору, обмежена скінченною кількістю плоских многокутників із попарно спільними сторонами.

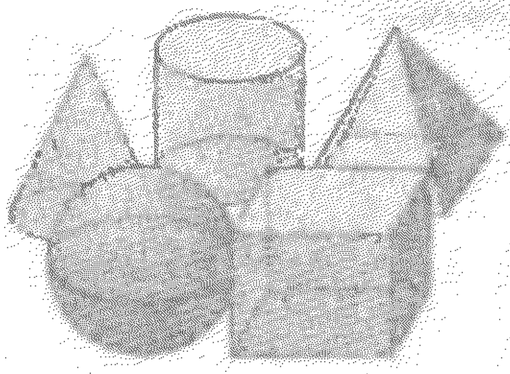
Опуклий многогранник називається правильним, якщо його гранями є рівні між собою правильні многокутники і в кожній з його вершин сходиться однакова кількість ребер.



Опуклий Неопуклий

Головні твердження

1. Перерізом опуклого многогранника є опуклий многокутник.
2. Вершинами перерізу є точки перетину січної площини з ребрами многогранника.
3. Сторонами перерізу є перетини січної площини з гранями многогранника.
4. Кількість сторін перерізу не може перевищувати кількості граней многогранника.

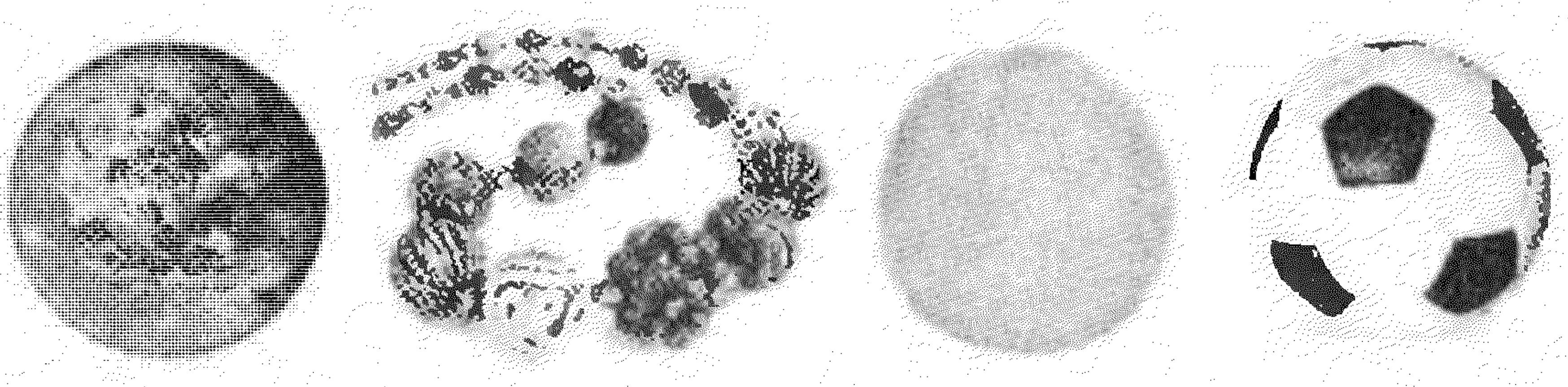


§15. Куля і сфера

Даний параграф присвячено розгляду класу фігур, знайомого кожній людині, навіть дитині, — кулям та їхнім поверхням — сферам.

Форму кулі мають як природні об'єкти, так і штучні, створені людиною (рис. 256, а–г).

Куля і сфера відносяться до числа найбільш симетричних фігур в геометрії. Вони є просторовими аналогами круга і кола. Ця аналогія проявляється як в означенні даних фігур, так і в їхніх властивостях.



а) б) в) г)

Рис. 256

Куля з центром O і радіусом R є фігурою, яка складається з усіх точок простору, що лежать від центра кулі O на відстані, яка не перевищує R.

Радіусом кулі називають як дану відстань R, так і відрізки, що мають цю довжину і відкладені від центра кулі O (рис. 257).

Поверхнею кулі є сфера. Вона складається з точок, віддалених від центра на

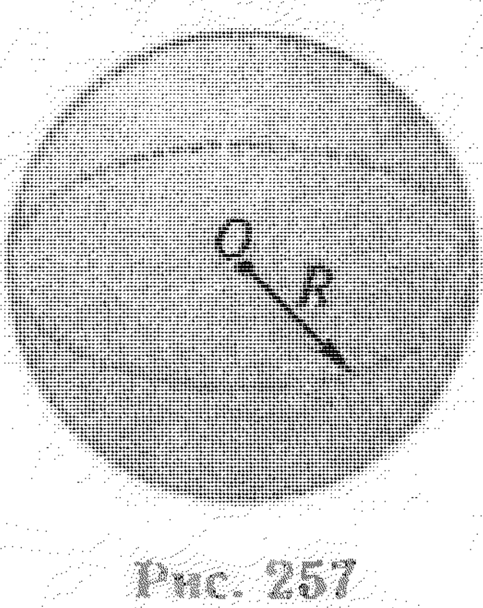


Рис. 257

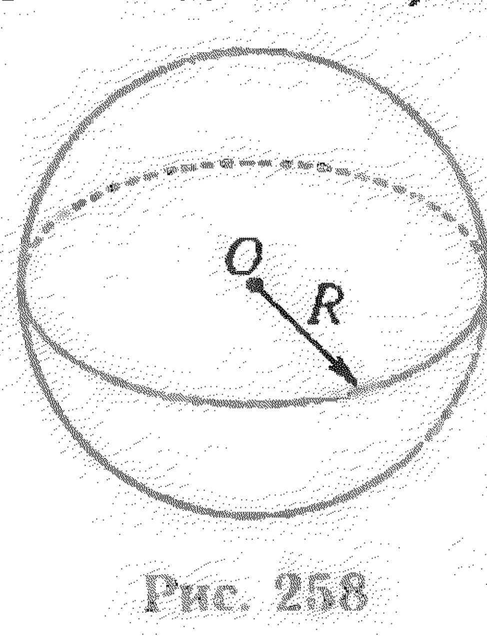


Рис. 258

відстань, яка дорівнює радіусу (рис. 258). Відрізок, що сполучає дві точки сфери і проходить через її центр, називається ***діаметром***.

У попередніх пунктах для характеристики тіла ми розглядали властивості його перерізів. У справедливості наступної теореми ми неодноразово переконувались, розрізаючи круглі яблука чи кавуни.

Теорема 1 *(про перерізи кулі).*

Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центром цього круга є або центр кулі, або основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

На рис. 259 площина α проходить через центр кулі O і переріз кулі цією площиною є кругом із центром O. Площина β перетинає кулю по кругу з центром O_1, який є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі O на січну площину β.

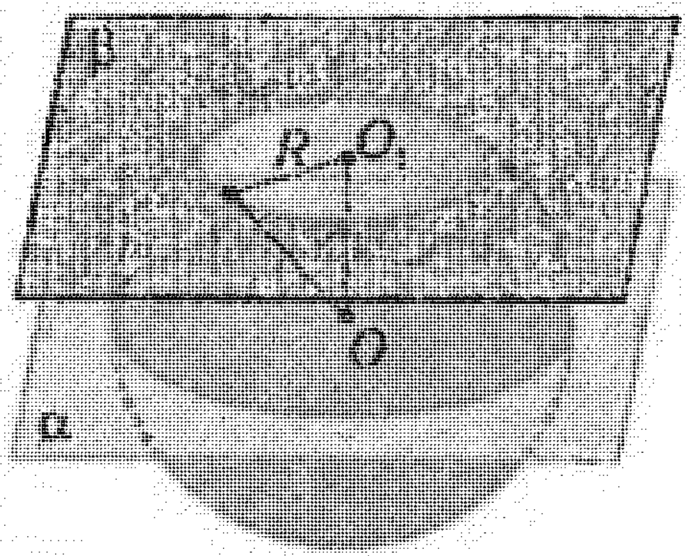


Рис. 259

Доведення теореми буде наведено нижче. Насправді цю теорему було вже доведено у § 5 за допомогою методу координат. Правда, там йшлося про перетин площини і сфери. Але фактично це та сама властивість.

Площина, яка проходить через центр кулі, називається ***діаметральною площиною***. Переріз кулі діаметральною площиною називається ***великим кругом***, а перетин сфери з діаметральною площиною — ***великим колом***.

Зображення кулі будують за допомогою ортогонального проектування. Зрозуміло, що існує діаметральний переріз, площина якого перпендикулярна до напряму проектування. Тому контурами кулі є переріз поверхні кулі цією площиною, тобто коло, радіус якого дорівнює радіусу кулі. Крім того, зображають і окремі елементи кулі: центр, її переріз діаметральною площиною, яка непаралельна напряму проектування. Цей переріз є кругом, не перпендикулярним до напряму проектування, тому його зображення обмежене еліпсом, центр якого збігається з центром кулі, а велика вісь — з горизонтальним діаметром (див. рис. 257). Найчастіше користуються зображенням сфери.

Щоб побудувати зображення сфери, необхідно:

1) побудувати коло (рис. 260, а);
2) зобразити центр кола (рис. 260, б);
3) побудувати еліпс, центр якого збігається з центром кола («екватор»), враховуючи видимі і невидимі лінії (рис. 260, в).

Іноді зображення сфери доповнюють зображенням точок її перетину з прямою, яка проходить через центр сфери перпендикулярно до зображення «екватора» — полюсів (рис. 260, г).

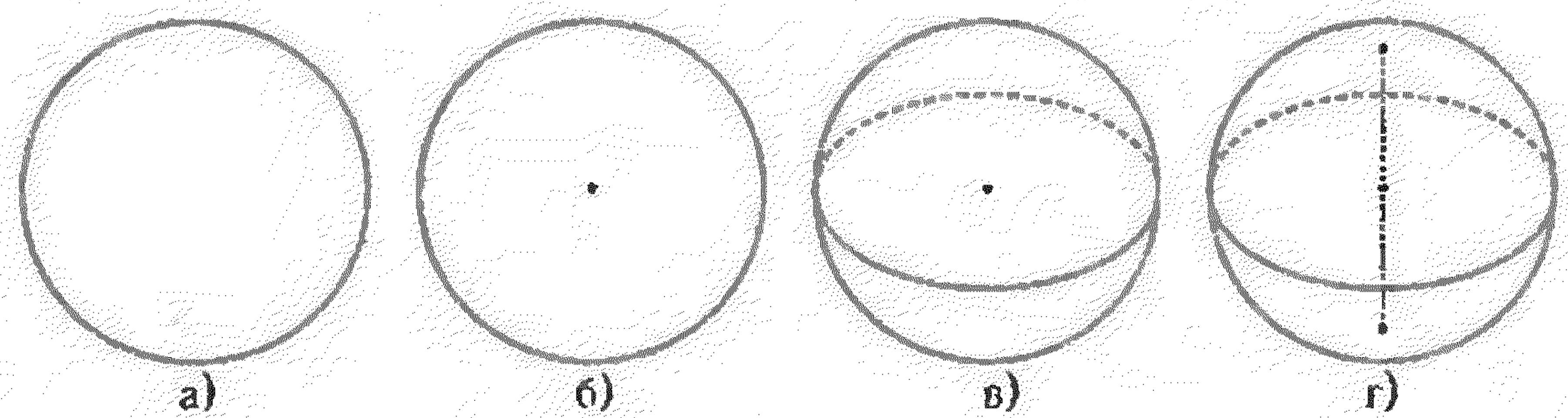


Рис. 260

Аналізуючи можливі випадки розміщення кулі і площини, можна зробити висновок, що куля і площина, здебільшого, або перетинаються по кругу, або не мають спільних точок. Менш очевидним є випадок, коли куля і площина можуть мати тільки одну спільну точку.

Площина називається дотичною до кулі, якщо вона має з нею одну спільну точку.

Дотична площина до кулі називається ***дотичною*** і ***до відповідної сфери*** (її поверхні). Зрозуміло, що дотична площина до сфери також має з нею одну спільну точку, яку називають ***точкою дотику***.

Дотична площина до сфери має важливу властивість, яка аналогічна властивості дотичної до кола у планіметрії.

Теорема 2 *(про площину, дотичну до сфери).*

Радіус сфери, проведений до точки дотику сфери і площини, є перпендикуляром до цієї площини.

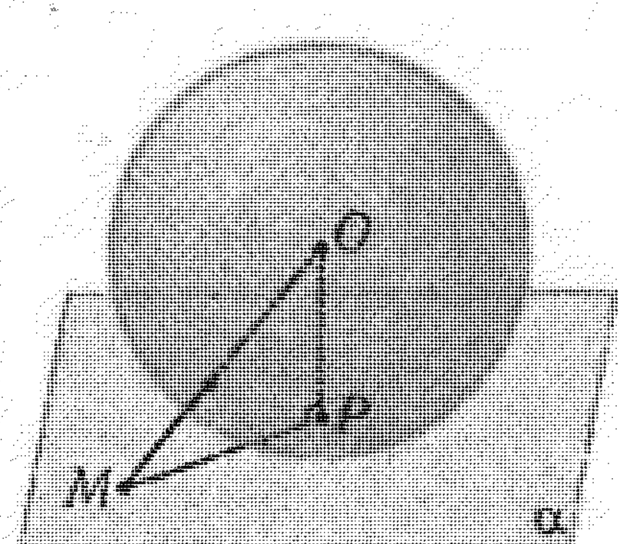


Рис. 261

□ Нехай M — довільна точка дотичної площини до сфери з центром O і радіусом R, відмінна від точки P — точки дотику площини до сфери (рис. 261). Оскільки точка M не належить кулі, яку обмежує дана сфера (чому?), а точка P належить сфері, то $OP = R < OM$. Тому OP — найкоротша відстань від центра сфери до точок дотичної площини. Отже, відрізок OP є перпендикуляром до точок цієї площини. ■

Справджується і обернене твердження.

Теорема 3 *(обернена до теореми про площину, дотичну до сфери).*

Площина, що проходить через кінець радіуса сфери, який їй належить, перпендикулярно до цього радіуса, є площиною, дотичною до сфери.

Для доведення цієї теореми досить скористатися доведенням теореми 2, провівши його у зворотному напрямку (спробуйте зробити це самостійно).

Теорема 3 дає змогу будувати дотичні площини до сфери. З теореми випливає, що через кожну точку сфери можна провести одну і лише одну дотичну до неї площину (доведіть це).

Пряма, яка лежить у дотичній до кулі площині і проходить через точку дотику, називається ***дотичною***. Зрозуміло, що пряма, дотична до кулі, має лише одну з нею спільну точку.

Куля є найпростішим тілом, оскільки вона визначається одним параметром — радіусом. Тому вона дуже часто зустрічається в комбінації з іншими тілами. Куля може міститись в іншому тілі і може містити інше тіло в собі. При цьому цікавими є «екстремальні» випадки: знайти «найбільшу» кулю, яка міститься в даному тілі, і «найменшу» кулю, яка містить дане тіло. Ці питання приводять до поняття вписаної і описаної куль. Найбільш просто вписана і описана кулі будуються для прямого кругового циліндра.

Куля називається ***вписаною у прямий круговий циліндр***, якщо вона дотична до обох його основ і до кожної твірної, що утворюють бічну поверхню циліндра (рис. 262).

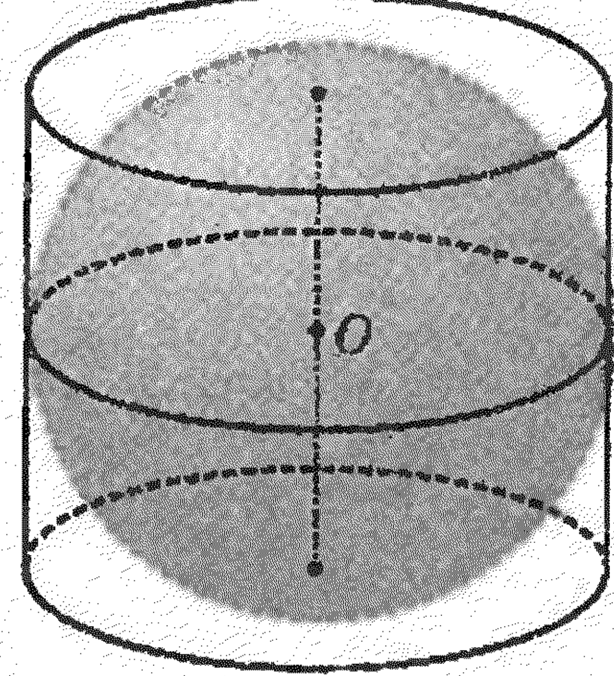


Рис. 262

Куля називається ***описаною навколо прямого кругового циліндра***, якщо обидва кола його основ належать поверхні кулі (рис. 263).

Куля називається ***вписаною в прямий круговий конус***, якщо вона дотична до його основи і до кожної твірної кону-

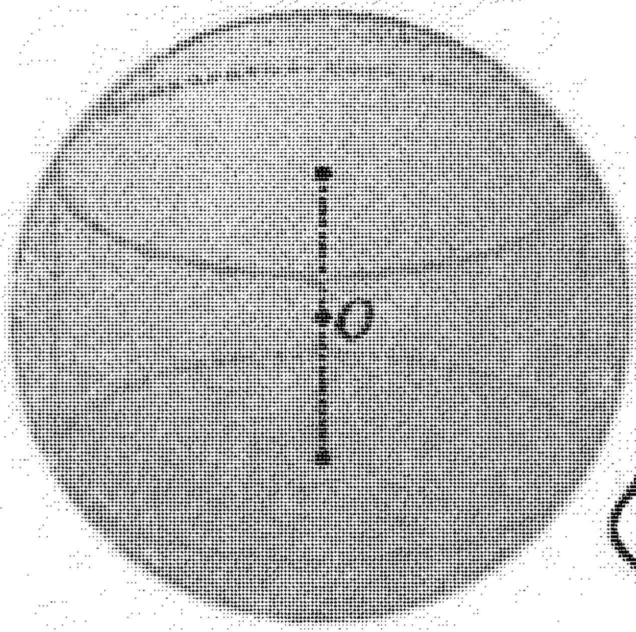


Рис. 263

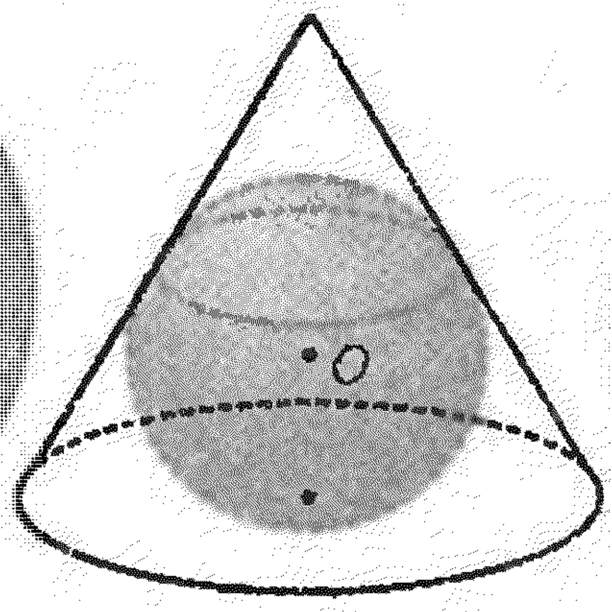


Рис. 264

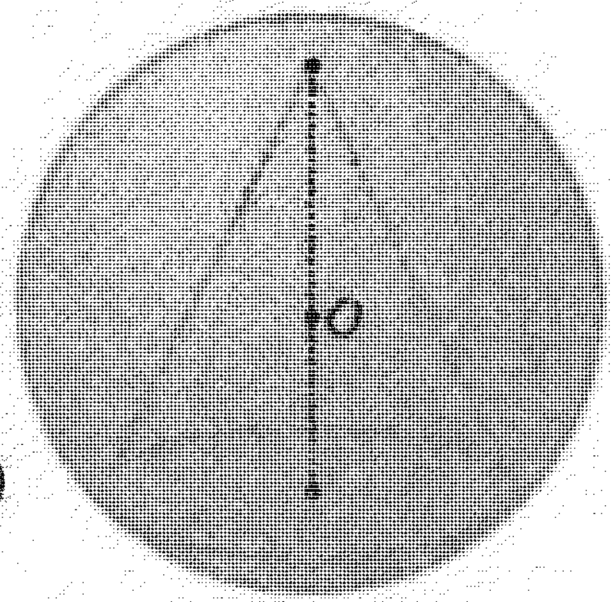


Рис. 265

са (рис. 264). Куля називається ***описаною навколо прямого кругового конуса***, якщо коло основи і вершина конуса належать поверхні кулі (рис. 265).

Куля називається ***вписаною в многогранник***, якщо всі грані многогранника дотичні до кулі. Куля називається ***описаною навколо многогранника***, якщо всі вершини многогранника належать поверхні кулі. На рис. 266 і рис. 267 зображено кулі, вписані в піраміду і призму, а на рис. 268 і рис. 269 — описані навколо згаданих вище многогранників.

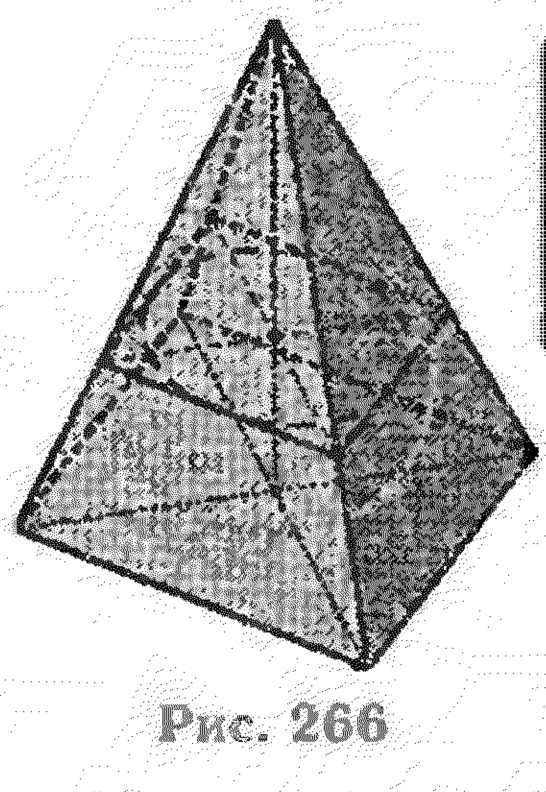


Рис. 266

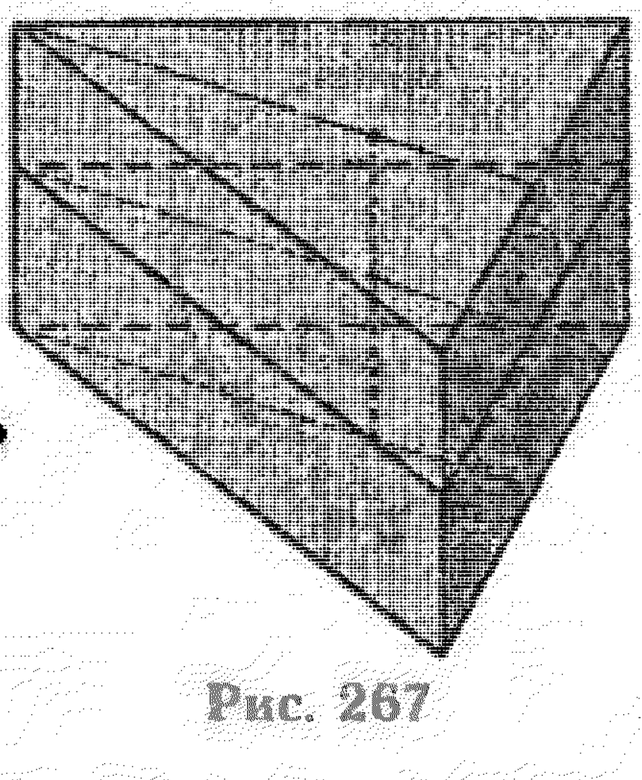


Рис. 267

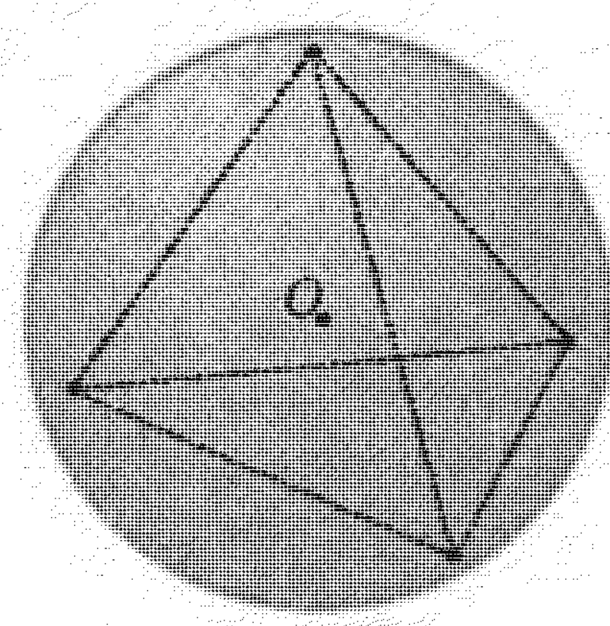


Рис. 268

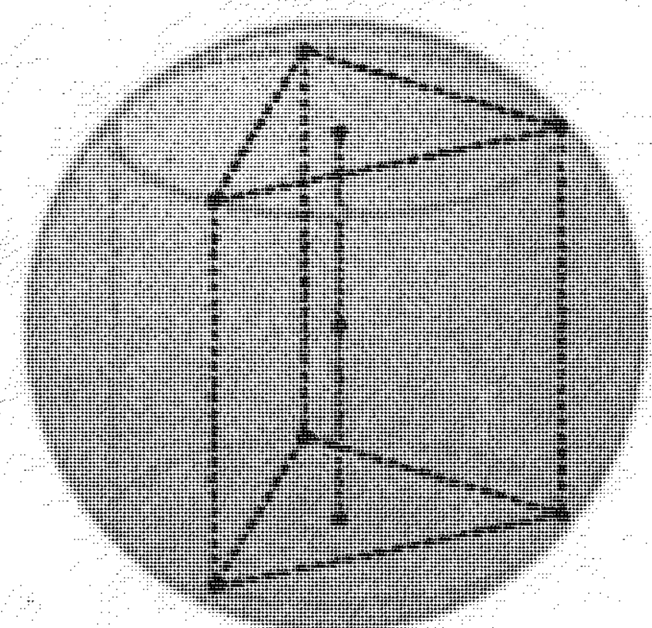


Рис. 269

Оскільки дотична площина і дотична пряма до кулі є дотичними до відповідної сфери і навпаки, то у наведених означеннях можна замінити кулю на сферу. У подальшому будемо користуватися комбінаціями тіл з кулею і сферою.

Приклад 1. Куля, радіус якої 5 см, перетинається площиною по кругу з радіусом 3 см. Знайти:
1) відстань від центра кулі до площини перерізу;
2) кут, під яким діаметр перерізу видно з центра кулі.

☐ Скористаємось перерізом кулі площиною, яка проходить через центр кулі O і центр перерізу O_1 (рис. 270). Відрізок AB є перетином даного і побудованого перерізів.

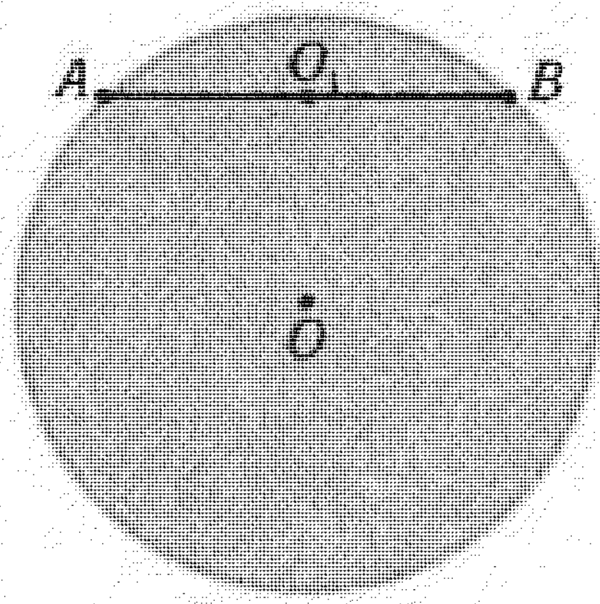


Рис. 270

1) З теореми 1 про переріз кулі випливає, що AB — діаметр даного перерізу, $OO_1 \perp AB$, а довжина відрізка OO_1 дорівнює відстані від центра кулі до площини перерізу. За умовою, $AO = 5$ см, $AO_1 = 3$ см. З прямокутного трикутника AOO_1 (рис. 271) маємо:

$$OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2} = \sqrt{25-9} = 4 \text{ (см)}.$$

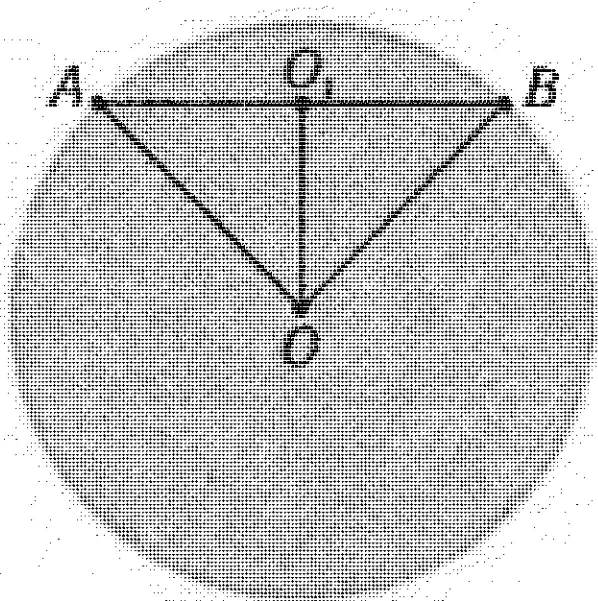


Рис. 271

2) Оскільки AB — діаметр даного перерізу, то шуканий кут дорівнює куту AOB на рис 271. Міра цього кута вдвічі більша від міри кута AOO_1, тому що $AO = OB$, а OO_1 — спільний катет прямокутних трикутників AOO_1 і BOO_1. Позначимо шуканий кут через α. Тоді з трикутника AOO_1 маємо: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AO_1}{AO} = \frac{3}{5}$. Звідси $\alpha = 2\arcsin\frac{3}{5}$.

Відповідь. 1) 4 см; 2) $2\arcsin\frac{3}{5}$.

Доведення теореми 1 про перерізи кулі.

☐ Нехай площина α перетинає кулю з радіусом R і проходить через її центр O (рис. 272), а M — довільна точка перерізу. Тоді $OM \leq R$. Тобто M є точкою круга з центром O і радіусом R, розташованого у січній площині. І навпаки, довільна точка цього круга лежить на відстані, не більшій ніж R, від центра кулі, тобто належить кулі. Отже, перерізом кулі є круг з центром O і радіусом R.

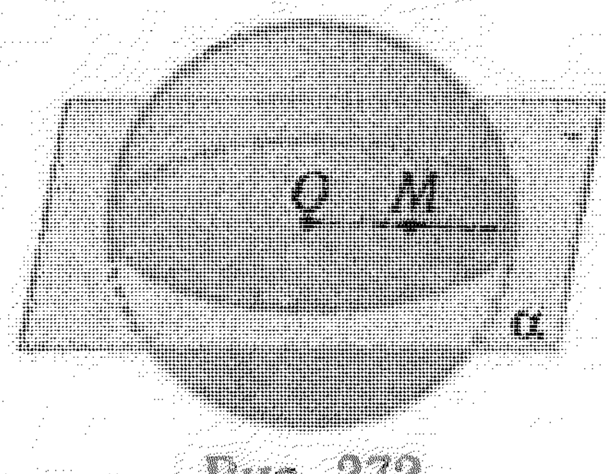


Рис. 272

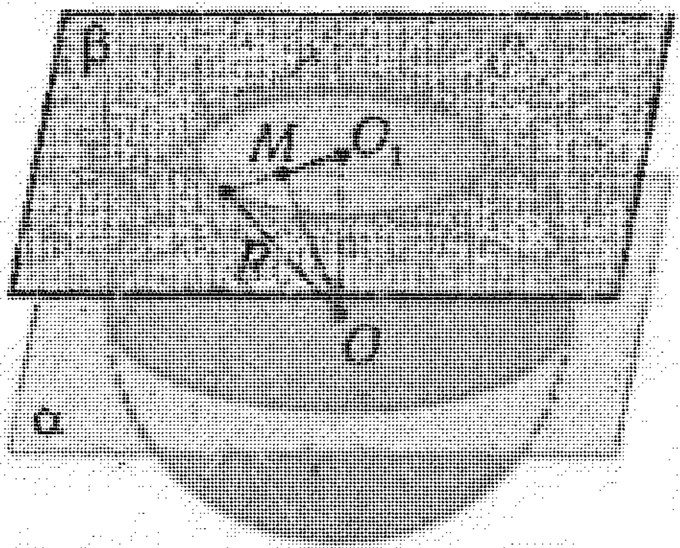


Рис. 273

Нехай площина перерізу β не проходить через центр кулі. Позначимо через O_1 основу перпендикуляра, опущеного з точки O на площину β (рис. 273). Візьмемо довільну точку M, яка належить перерізу. Трикутник OO_1M є прямокутним, оскільки $OO_1 \perp \beta$. Тому

$$O_1M^2 = OM^2 - OO_1^2.$$

Оскільки $OM \le R$, а величина $d = OO_1$ не залежить від M, то $O_1M^2 \le R^2 - d^2 = r^2$.

Остання нерівність означає, що всі точки перерізу належать кругу з центром у точці O_1 і радіусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Неважко переконатись у тому, що кожна точка цього круга належить кулі (доведіть). Одночасно ми довели і другу властивість перерізу. ■

Наступна теорема описує найважливіші симетрії кулі.

Теорема 4 *(про симетрії кулі).*

Кожна діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.

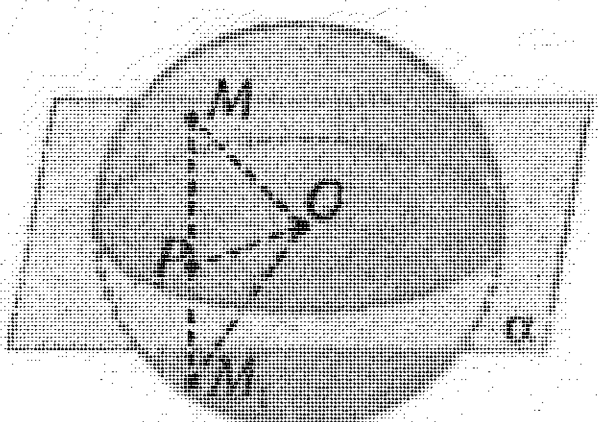


Рис. 274

□ Нехай α — діаметральна площина кулі з центром O і радіусом R. Її можна вважати горизонтальною (рис. 274). Візьмемо довільну точку M кулі і побудуємо симетричну до неї відносно площини α точку M_1. Для цього опустимо з точки M перпендикуляр MP на площину α і продовжимо його на відстань MP до точки M_1. Прямокутні трикутники OMP і OM_1P рівні (доведіть це!). Тому $OM_1 = OM \le R$, тобто точка M_1 належить даній кулі.

Ще простіше довести, що точка M_2, яка симетрична точці M відносно центра O, теж належить кулі. ■

Зрозуміло, що аналогічні симетрії має і сфера.

Приклад 2. Дано кулю з радіусом R. Через певну точку на поверхні кулі проведено дві площини: перша — дотична до кулі, друга — січна — під кутом 30° до першої. Знайти площу перерізу і відстань від центра кулі до цього перерізу.

☐ Нехай куля з центром O і радіусом R дотикається до площини α в точці P, а площина β проходить через цю точку під кутом 30° до площини α (рис. 275). Площина β перетинає площину α по деякій прямій l, а перерізом кулі площиною β є круг з центром у точці O_1.

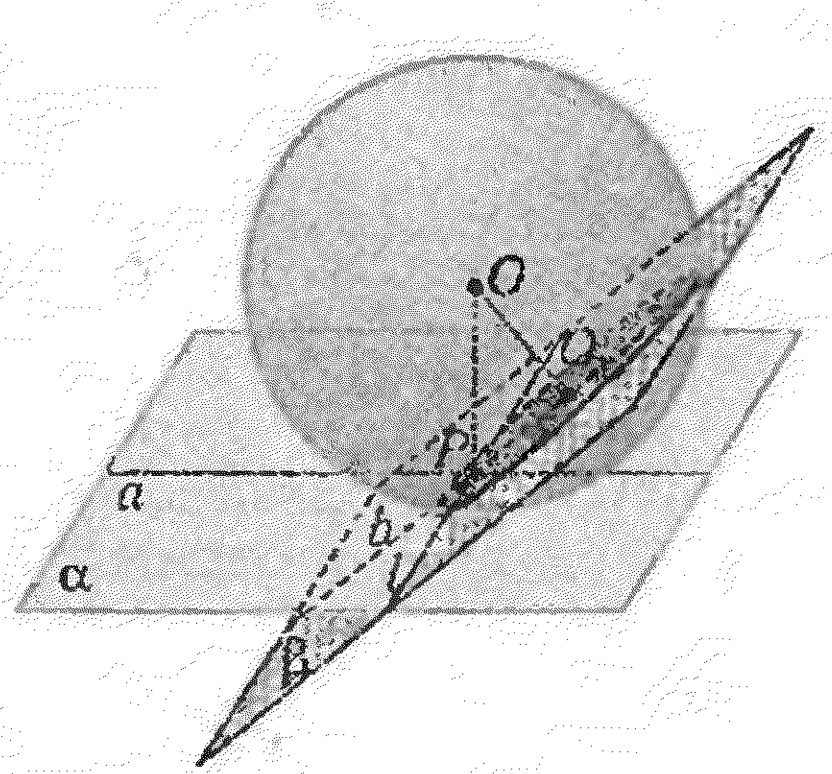


Рис. 275

Проведемо через точку P у площинах α і β прямі a і b перпендикулярно до прямої l. Кут між цими прямими дорівнює куту між площинами α і β (чому?), тобто дорівнює 30°. Площина γ, що проходить через прямі a і b, перпендикулярна до прямої l. Тому відрізок OP, який перпендикулярний до прямої l, лежить у площині γ і кут між прямими OP і b дорівнює $90° - 30° = 60°$.

Якщо в площині γ провести перпендикуляр OO_1 до прямої b, то він буде перпендикулярним і до площини β (чому?). Згідно з теоремою 1, точка O_1 є центром перерізу кулі площиною β. Точка P належить перерізу і лежить на поверхні кулі, тому O_1P є радіусом перерізу. З прямокутного трикутника OO_1P маємо:

$$OO_1 = OP \cdot \sin 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2}, O_1P = OP \cdot \cos 60° = \frac{R}{2}.$$

Отже, площа перерізу дорівнює $S = \pi PO_1^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. ■

Відповідь. $\frac{\pi R^2}{4}$; $\frac{R}{2}$.

Приклад 3. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

☐ Нехай дано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Круг, описаний навколо її основи, є перерізом кулі площиною основи піраміди. Його центр O_1 збігається з центром квадрата $ABCD$. Центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить на

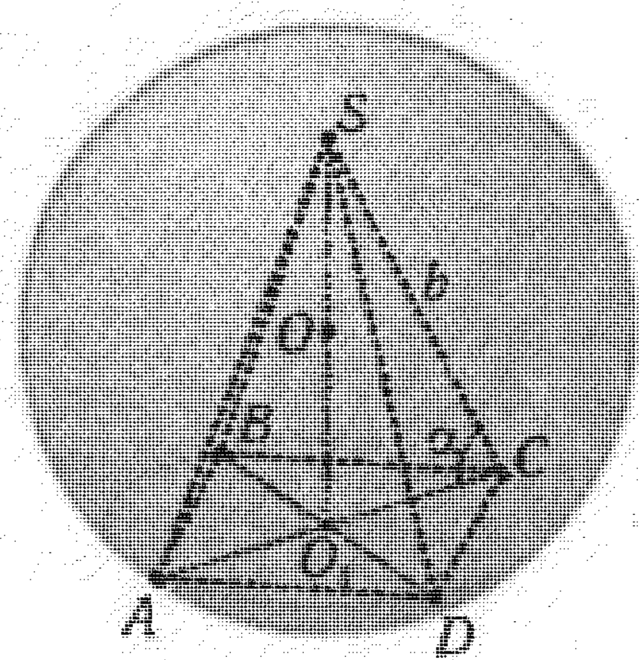


Рис. 276

прямій, яка перпендикулярна до площини $ABCD$ і проходить через точку O_1 (тобто на прямій SO_1, рис. 276).

Трикутник ASC вписаний у велике коло описаної навколо піраміди сфери. За умовою, $AS = b$, а $\angle SCA = \alpha$, оскільки CO_1 — проекція похилої CS на площину основи. Згідно з теоремою синусів,

$$b = 2R\sin\alpha,\ \ R = \frac{b}{2\sin\alpha},$$

де R — шуканий радіус. ■

Відповідь. $\dfrac{b}{2\sin\alpha}$.

Контрольні запитання

1°. Чи правильно, що через дві точки сфери можна провести лише одне велике коло?

2°. Чи можуть два різних кола на сфері мати три спільні точки?

3°. Чи може перерізом кулі бути еліпс?

4°. Два перерізи кулі мають однакову площу. Чи правильно, що січні площини рівновіддалені від центра кулі?

5°. Чи правильно, що через дану точку, яка не належить кулі, можна провести лише одну площину, дотичну до кулі?

6°. Чи можна провести спільну дотичну площину до двох куль, які не мають спільних точок?

7. Чи достатньо знати свій зріст і радіус Землі, щоб наближено визначити, як далеко можна оглянути Землю, стоячи на рівному місці?

8. Куля котиться по жолобу, утвореному двома плоскими поверхнями. По якій лінії рухається її центр?

9. Як виміряти радіус більярдної кулі?

Графічні вправи

1. На рис. 277 зображено сферу і точки A, B, C на її поверхні, O — центр сфери. Знайдіть кут ACB.

2. Знайдіть радіус сфери, зображеної на рис. 278, за наведеними даними, якщо O — центр сфери, O_1 — центр її перерізу площиною.

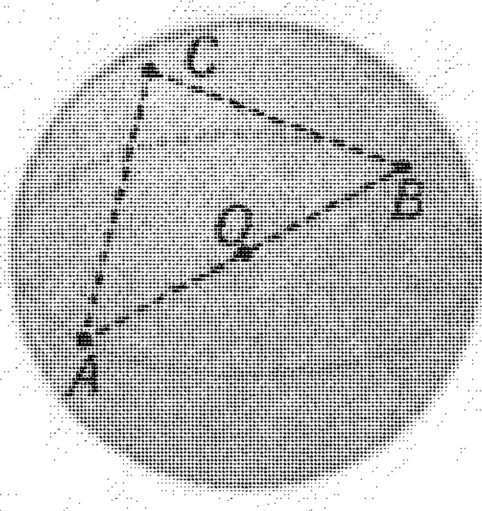


Рис. 277

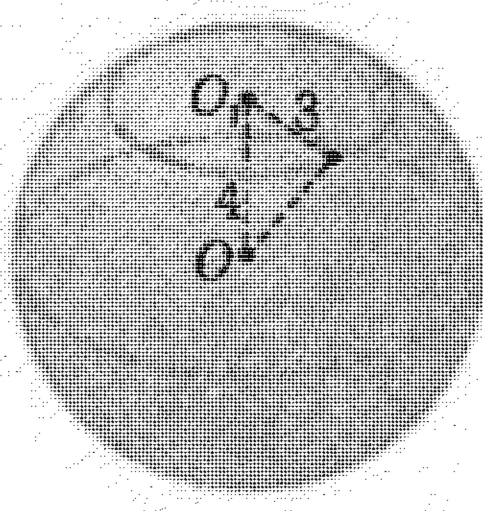


Рис. 278

Задачі

268. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть:
1°) площу перерізу кулі площиною, що проходить на відстані 3 см від центра кулі;
2°) кут, під яким переріз, розглянутий у завданні 1°), видно з центра кулі;
3) відстань між центром кулі і точкою, що знаходиться на дотичній площині на відстані 2 см від точки дотику;
4) сторону основи правильної трикутної призми, описаної навколо кулі;
5*) радіус основи прямого кругового конуса, описаного навколо кулі, висота якого дорівнює 12 см.

269. Переріз кулі площиною, віддаленою від її центра на 12 см, має площу 25π см². Знайдіть:
1°) радіус кулі;
2°) кут між площиною перерізу і радіусом, проведеним до точки перетину цієї площини з поверхнею кулі;
3) відстань між центром кулі і точкою дотичної площини, яка віддалена на 5 см від точки дотику;
4) сторону основи правильної трикутної призми, описаної навколо кулі;
5*) сторону основи правильної трикутної піраміди, вписаної в кулю, висота якої дорівнює 8 см.

270. Точка A лежить на прямій, дотичній до кулі, і розташована на відстані 12 см від точки дотику. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть:
1°) відстань від точки A до центра кулі;
2°) кут, під яким кулю видно з точки A;
3) відстань від центра кулі до перерізу, що має вдвічі меншу площу, ніж площа великого круга;
4) радіус основи прямого кругового конуса з вершиною в точці A, описаного навколо кулі.

271. Доведіть, що:
1°) кожна пряма, що проходить через центр кулі, є його віссю симетрії;
2) дотичні до кулі, проведені з точки A, яка не належить кулі, проходять через твірні прямого кругового конуса, а їхні відрізки, обмежені точкою A і точками дотику, рівні між собою;

3*) точки дотику кулі, вписаної в правильну n-кутну піраміду, до бічних граней є вершинами правильного n-кутника.

272. У правильній трикутній призмі висота дорівнює 2 см, а сторона основи — 12 см. Знайдіть:
1) радіус описаної кулі;
2) найбільший радіус кулі, яку можна помістити в призму;
3) площу перерізу кулі, описаної навколо призми, площиною бічної грані;
4) кут, що утворює з бічною гранню призми радіус описаної кулі, проведений до вершини призми;
5) радіус кулі, що дотикається до всіх ребер основ призми.

273. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при основі — 45°. Знайдіть:
1) радіус описаної кулі;
2) радіус вписаної кулі;
3) відстань між центрами описаної і вписаної куль.

274. Твірна прямого кругового конуса дорівнює 17 см, а його висота — 15 см. Знайдіть:
1) довжину кола, по якому дотикаються поверхні конуса і вписаної в нього кулі;
2) відношення радіусів вписаної й описаної куль.

275. У кулю вписано правильну чотирикутну призму з бічним ребром a і діагоналлю бічної грані l. Знайдіть:
1)° сторону основи призми;
2)° радіус кулі;
3) кут між діагоналлю призми та її основою;
4) кут між площиною, що проходить через протилежні сторони верхньої і нижньої основ, та основою призми.

276°. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см, 6 см і 12 см. Знайдіть радіус описаної кулі.

277°. Висота прямого кругового конуса дорівнює 2 см, твірна — 4 см. Знайдіть радіус описаної сфери.

278°. Висота прямого кругового конуса дорівнює 8 см, твірна — 10 см. Визначте радіус вписаної кулі.

279. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, усі ребра якої дорівнюють 2 см.

280. Визначте радіус кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди з висотою 4 см і бічним ребром 6 см.

281. Радіус кулі дорівнює 9 см. Визначте сторону основи вписаної правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 14 см.

282*. М'яч, радіус якого дорівнює 15 см, лежить: 1) біля стіни; 2) у куті кімнати. Чи поміститься в утвореному просвіті кулька для настільного тенісу, радіус якої дорівнює 1,5 см?

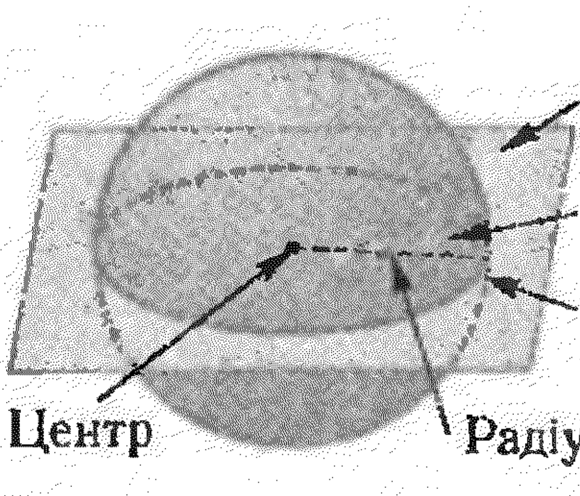
Вправи для повторення

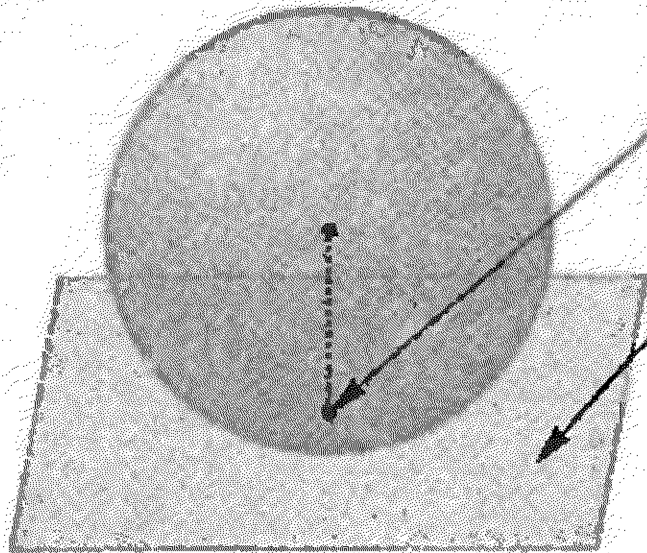
283. Опишіть перерізи прямого кругового циліндра і прямого кругового конуса площинами, перпендикулярними до їхніх висот.

284. Опишіть осі симетрії правильного трикутника, ромба, рівнобічної трапеції.

285. Доведіть, що точка перетину діагоналей рівнобічної трапеції рівновіддалена від бічних сторін.

Підсумок





Комбінації кулі з іншими тілами

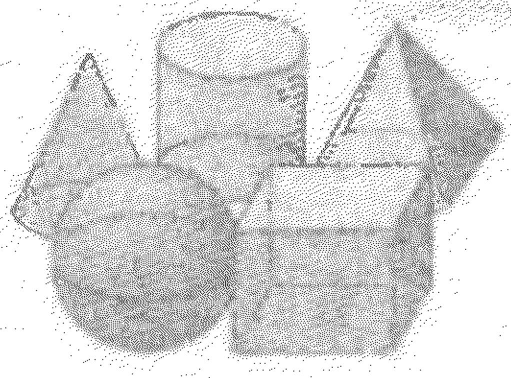
Куля називається ***вписаною у прямий круговий циліндр,*** якщо вона дотична до його основ і до кожної твірної, яка міститься на бічній поверхні циліндра. Куля називається ***описаною навколо прямого кругового циліндра,*** якщо обидва кола його основ належать поверхні кулі.

Куля називається ***вписаною у прямий круговий конус,*** якщо вона дотична до його основи і до кожної його твірної. Куля називається ***описаною навколо прямого кругового конуса,*** якщо коло основи і вершина конуса належать поверхні кулі.

Куля називається ***вписаною у многогранник***, якщо всі грані многогранника дотичні до кулі. Куля називається ***описаною навколо многогранника***, якщо всі вершини многогранника належать поверхні кулі.

Головні твердження

1. Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центром цього круга є або центр кулі, або основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.
2. Радіус сфери, проведений до точки дотику сфери і площини, є перпендикуляром до цієї площини.
3. Площина, що проходить через кінець радіуса кулі перпендикулярно до цього радіуса, є площиною, дотичною до сфери.
4. Кожна діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.



§16. Тіла обертання

Одним із важливих способів побудови тіл у природі і в результаті діяльності людей є утворення їх за допомогою обертання плоскої фігури навколо осі. Дослідження цього способу побудови тіл є головною метою параграфа.

Тіла обертання утворюються при обертанні плоскої фігури навколо осі, яка належить площині, де міститься фігура. Зокрема, так можна отримати кулю, прямі кругові циліндри і конуси. Важливість цього класу тіл пов'язана з тим, що людина здавна виробляла предмети, які мають форму тіл обертання. Це і виготовлення глиняного посуду за допомогою гончарного круга, і обробка металу чи дерева на токарних верстатах (рис. 279, а–г).

а) б) в) г)

Рис. 279

Нехай дано пряму l і плоску фігуру F, які лежать в одній площині (рис. 280). Обертаючи довільну точку фігури навколо прямої l, дістанемо коло з центром на прямій l.

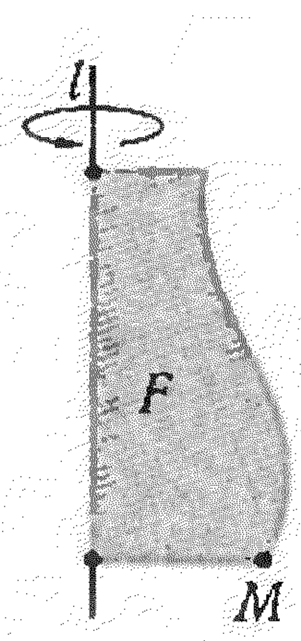


Рис. 280

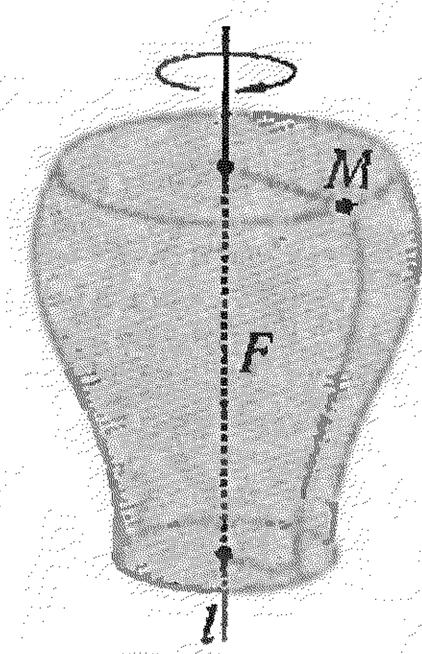


Рис. 281

Фігура, яка складена із кіл обертання всіх точок фігури F, називається фігурою

обертання (рис. 281). **Пряма l називається *віссю обертання*.**

Наприклад, обертаючи прямокутник навколо прямої, яка містить одну з його сторін, дістанемо прямий круговий циліндр (рис. 282). Якщо ж обертати прямокутний трикутник навколо пря-

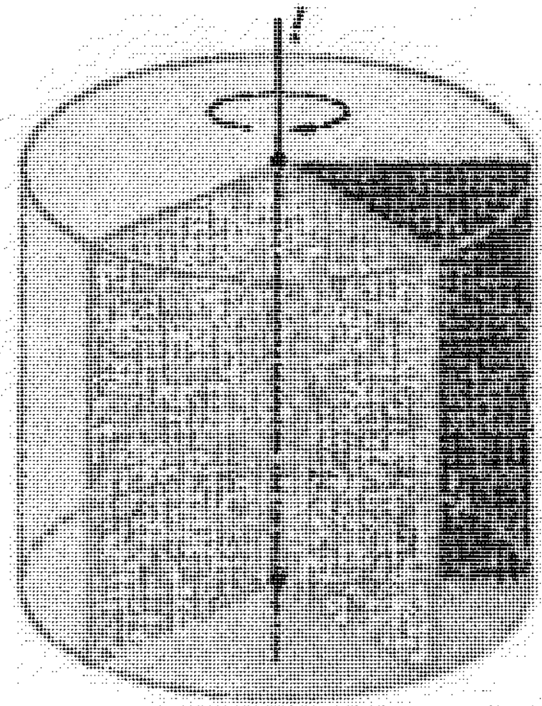


Рис. 282

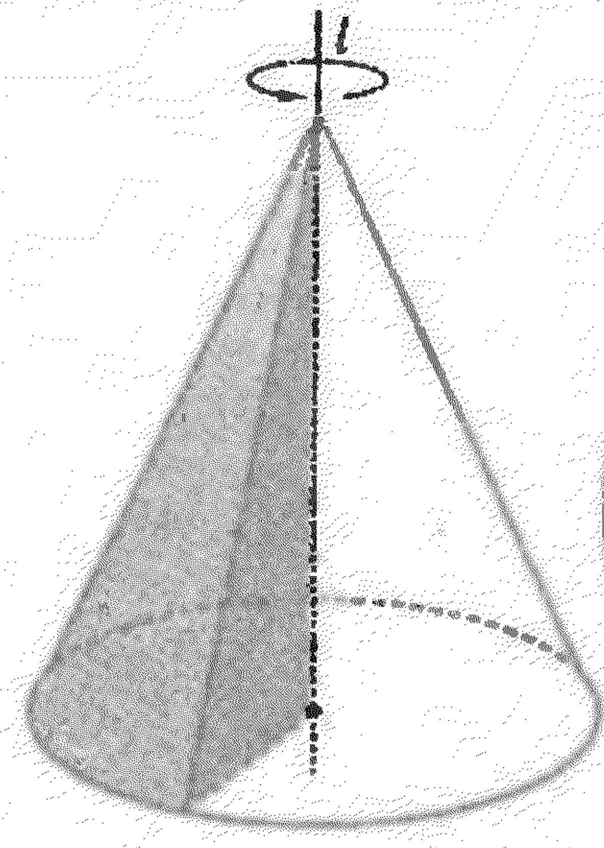


Рис. 283

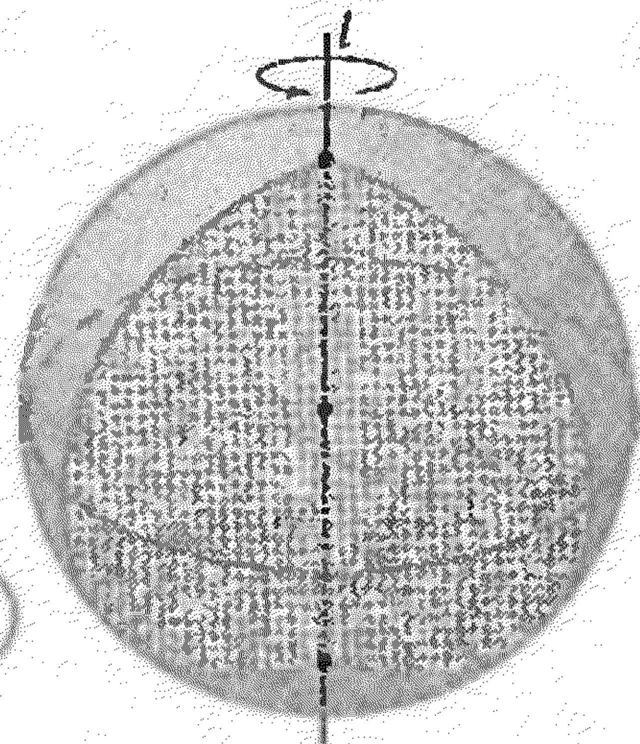


Рис. 284

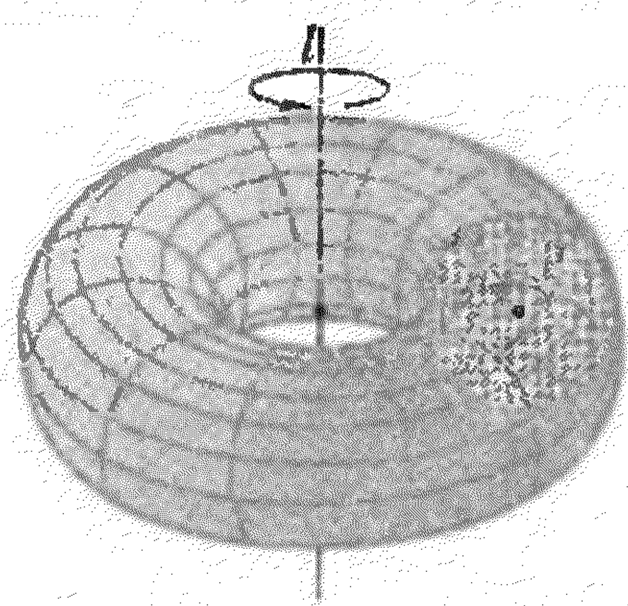


Рис. 285

мої, яка містить один із катетів, то дістанемо прямий круговий конус (рис. 283). Кулю можна дістати, якщо півкруг обертати навколо прямої, яка містить його діаметр (рис. 284). Неважко здогадатись, які фігури треба обертати і навколо чого, щоб дістати зрізаний прямий круговий конус, сферу. Дещо складніше це зробити для «бублика» (тора) (рис. 285).

Теорема 1 *(про симетрію тіл обертання).*

Вісь обертання є віссю симетрії фігури обертання, а площини, які проходять через цю вісь, є площинами симетрії.

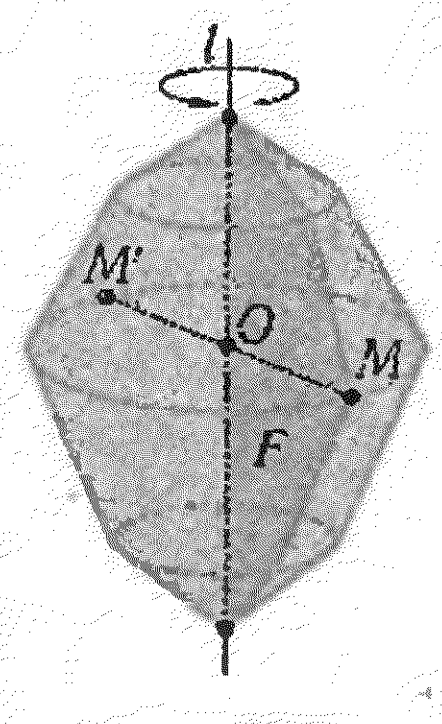


Рис. 286

□ Нехай M — довільна точка фігури, утвореної обертанням плоскої фігури навколо осі l (рис. 286). Коло, утворене обертанням точки M навколо осі l, розміщене в площині, перпендикулярній до осі, і його центр лежить на цій осі. Точка M', яка симетрична точці M відносно осі l, також лежить у цій площині і $MO = M'O$. Тобто точка, яка симетрична довільній точці фігури обертання відносно осі обертання, також належить цій фігурі. Отже, фігура обертання симетрична відносно осі.

Аналогічно доводять, що площина, яка проходить через вісь обертання, є площиною симетрії фігури обертання (доведіть це!). ■

Приклад. Описати фігуру, утворену при обертанні фігури, зображеної на рис. 287, навколо осі l.

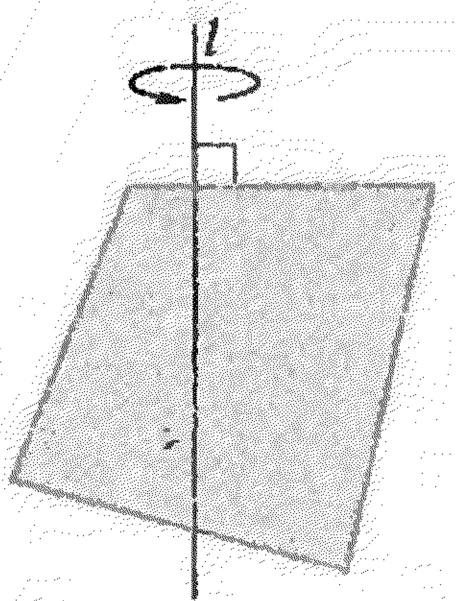


Рис. 287

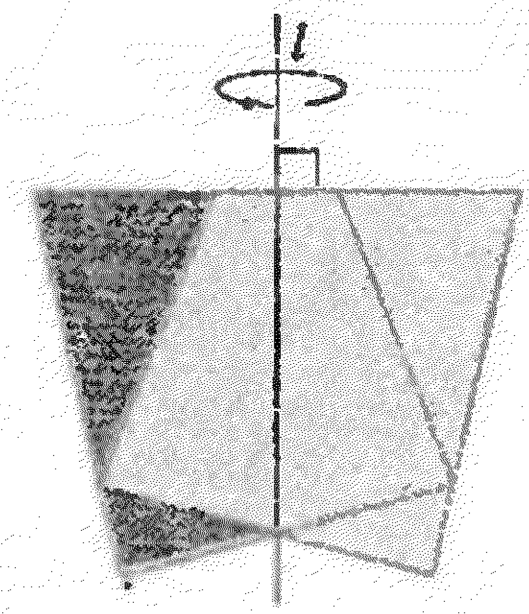


Рис. 288

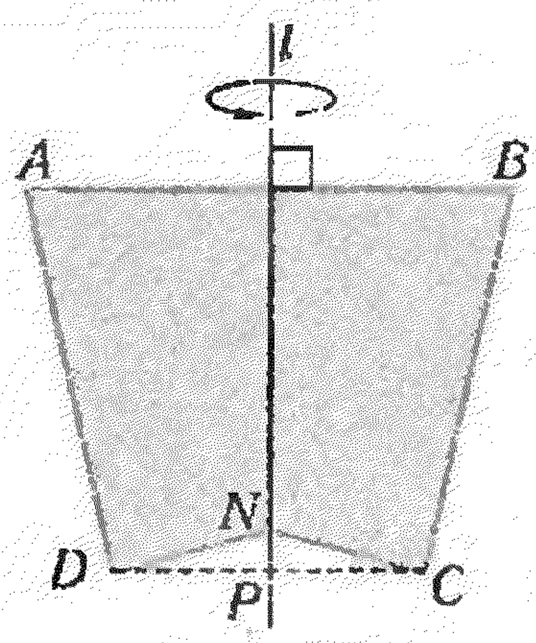
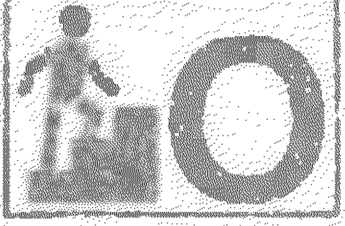


Рис. 289

□ Щоб описати вказану фігуру обертання, спочатку необхідно побудувати фігуру, симетричну даній відносно прямої l (рис. 288). Фігура, яка є об'єднанням даної і побудованої фігур, симетрична відносно прямої l. Її обертання дає той самий результат, що й обертання даної фігури (чому?). Фігуру, утворену обертанням фігури на рис. 289, тепер неважко описати. Чотирикутник $ABCD$ є рівнобічною трапецією, а пряма l — її віссю симетрії. Його обертання навколо осі l дає зрізаний конус. З цього конуса треба вилучити конус, утворений обертанням прямокутного трикутника NPC навколо цієї осі. ■



Фігури обертання широко використовуються для описання геометричних форм у навколишньому світі, у практичній діяльності. Це пов'язано як зі способом їх утворення, так і з їхніми властивостями симетрії.

Обертаючи навколо діаметра різні частини круга, дістанемо різні частини кулі. Частину кулі, яку дістали обертанням сегмента навколо діаметра, перпендикулярного до хорди, називають ***кульовим сегментом*** (рис. 290).

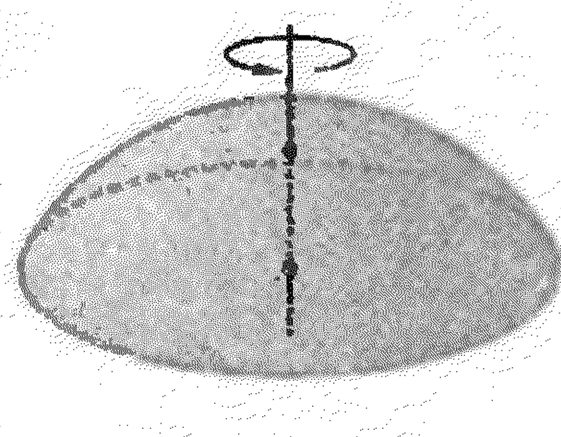


Рис. 290

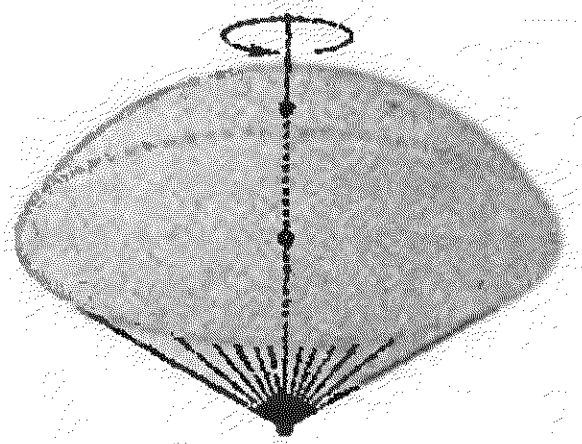


Рис. 291

Обертання сектора навколо діаметра відповідного круга дає частину кулі, яку називають ***кульовим сектором*** (рис. 291). Важливі застосування мають і фігури, які утворені обертанням еліпса (*а*), параболи (*б*), гіперболи (*в*) навколо їхніх осей симетрії (рис. 292). В результаті дістаємо поверхні обертання.

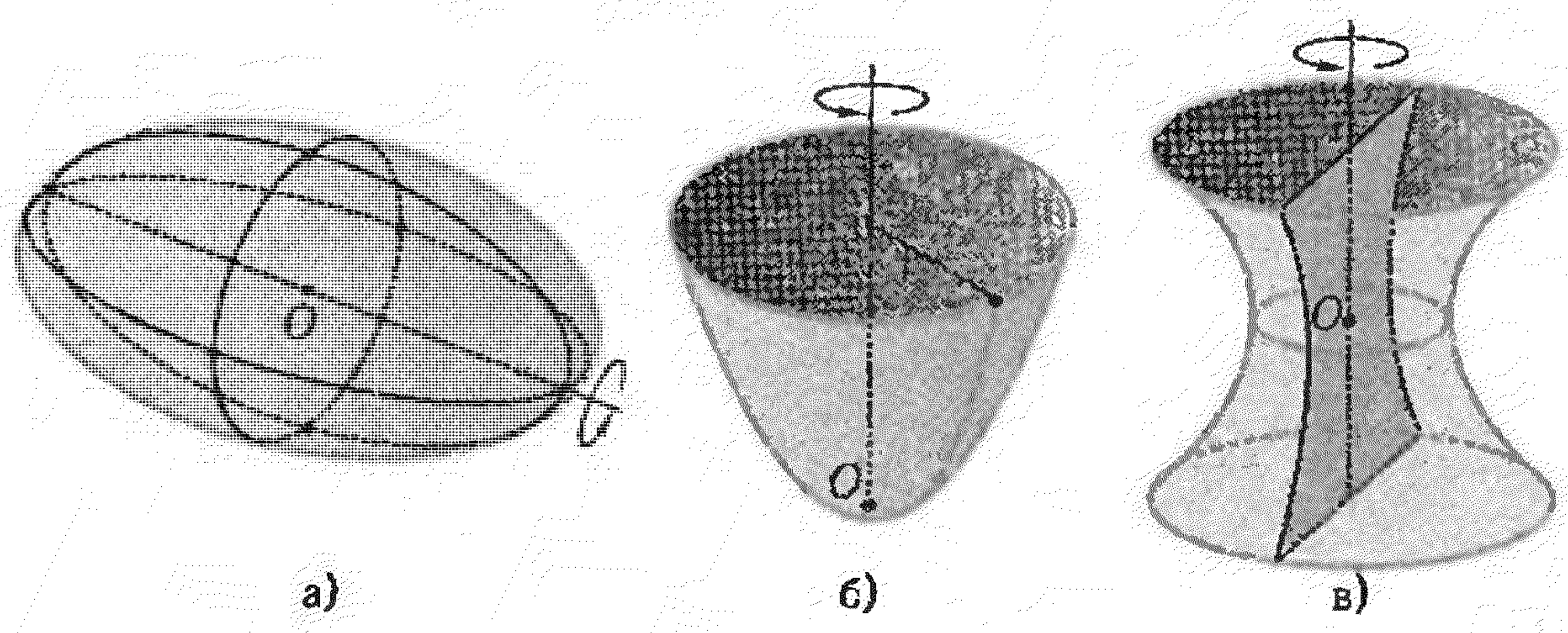


Рис. 292

Теорема 2 (*про перетин двох сфер*).

Перетином двох сфер є коло.

□ Якщо провести через пряму, що проходить через центри O і O_1 даних сфер, довільну площину, то у перерізі дістанемо два кола з центрами O і O_1, які перетинаються у точках M, M_1 (рис. 293, а), симетричних відносно прямої OO_1. Фігура, яку дістанемо обертанням цього перерізу навколо осі OO_1, складається із двох даних сфер. Спільні точки цих сфер дістанемо обертанням точок M і M_1. А оскільки таких точок дві і вони симетричні відносно осі обертання, то спільними точками сфер є коло (рис. 293, б). ■

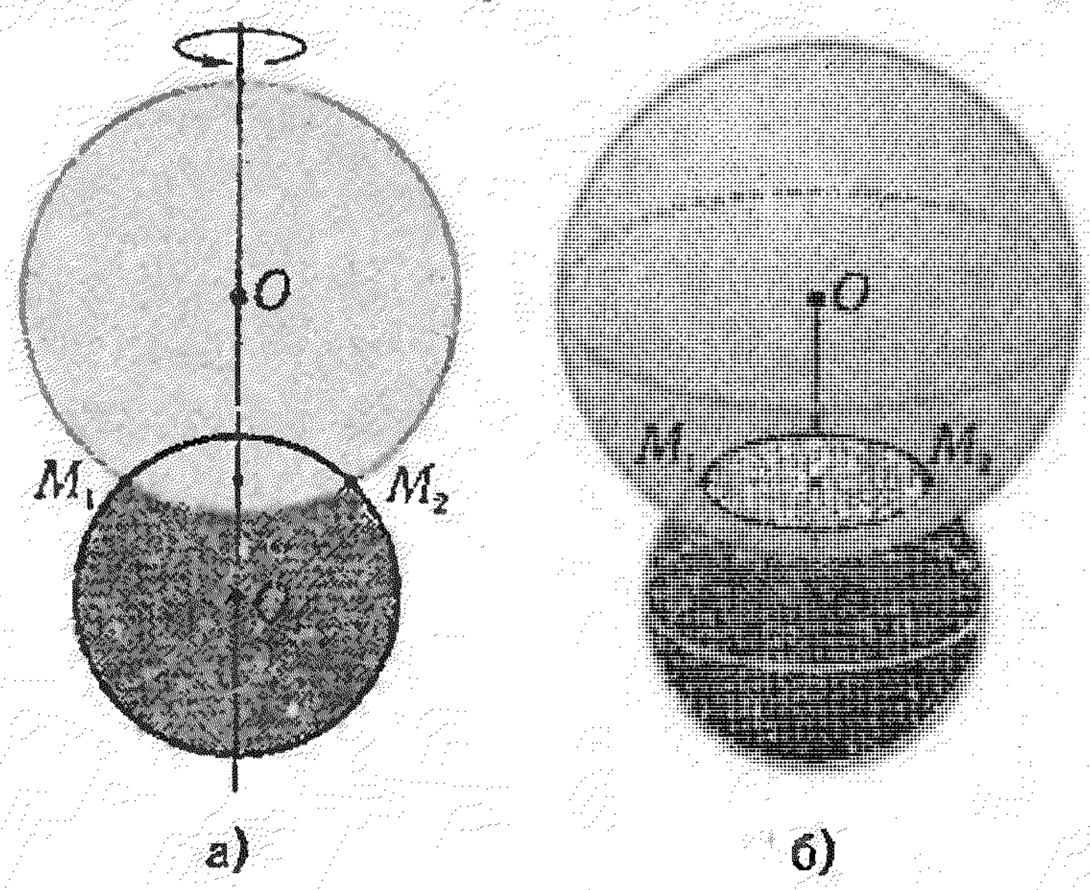


Рис. 293

Контрольні запитання

1°. Чи може фігура обертання мати тільки одну площину симетрії?
2. Чи може фігура обертання мати рівно дві осі симетрії?
3°. Чи всяка фігура обертання має центр симетрії?
4°. Чи правильно, що всякий переріз фігури обертання є кругом?
5°. Чи можна дістати піраміду обертанням деякої фігури навколо осі?
6°. Чи може фігура обертання бути многогранником?
7. Дано прямокутник зі сторонами a і b, $a > b$. У якого з циліндрів, одержаних унаслідок обертання прямокутника навколо його сторін, площа розгортки всієї поверхні більша?

Графічні вправи

1. Зобразіть осьовий переріз фігури, утвореної обертанням навколо осі фігури, зображеної на рис. 294, а)–в).

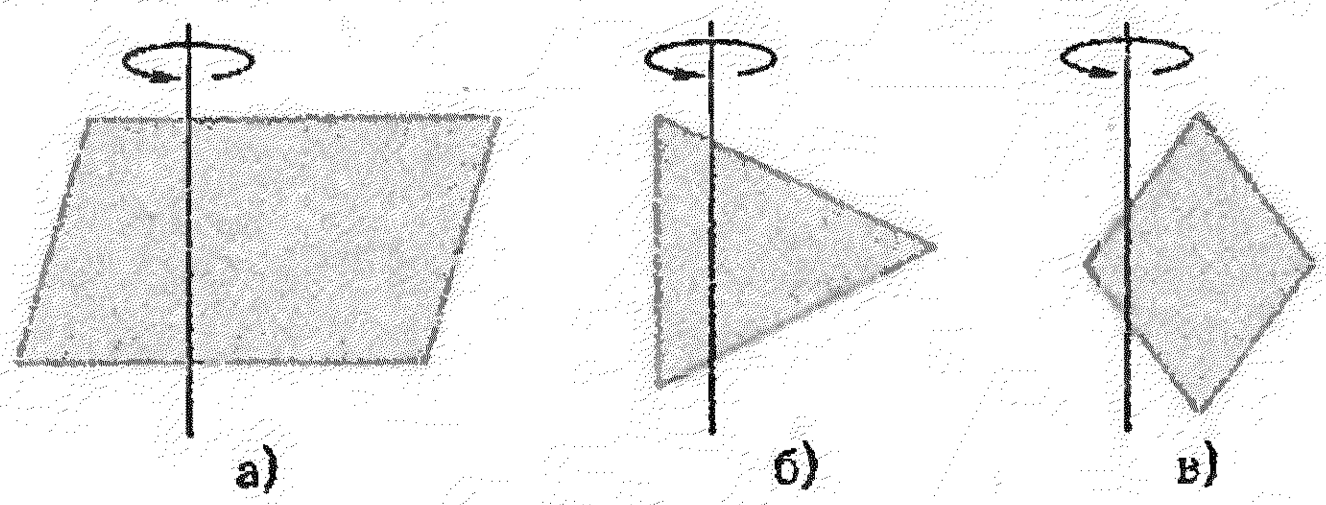


Рис. 294

2. Опишіть фігуру, яка утворена при обертанні прямокутного трикутника, зображеного на рис. 295, а)–д), навколо осі, паралельної одному з катетів або співпадаючої з прямою, що містить його.

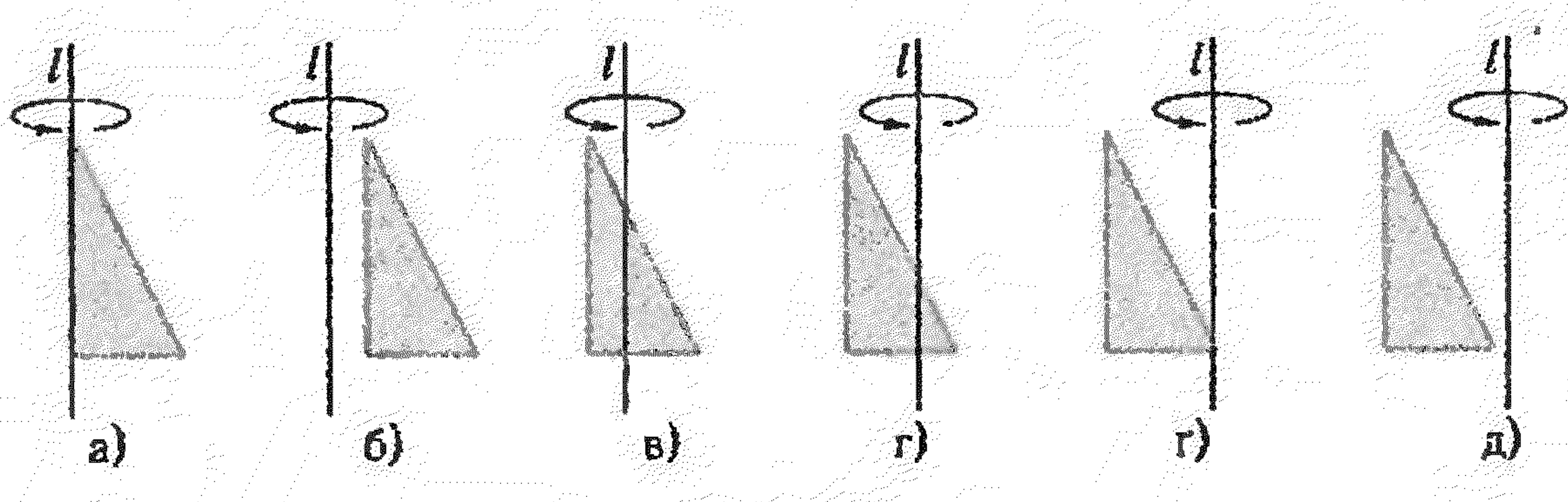


Рис. 295

Задачі

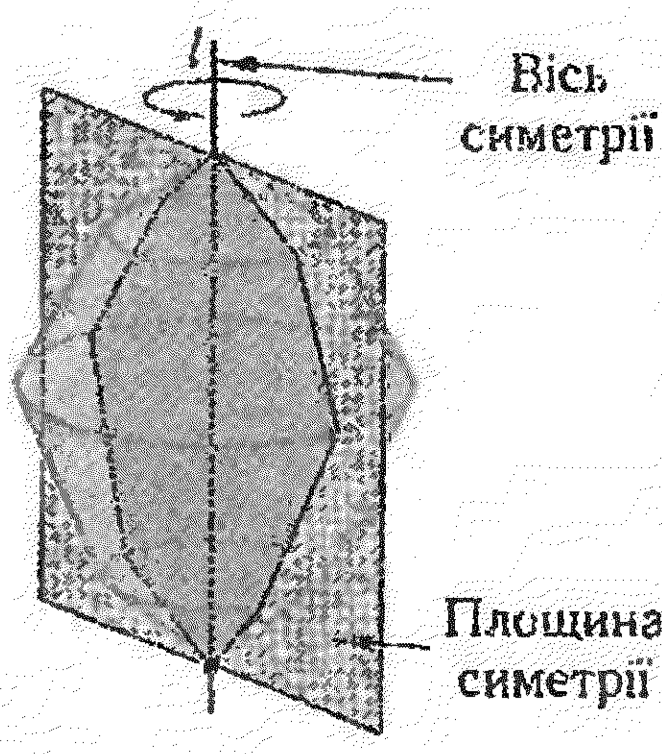
286°. Опишіть тіло, яке утворене при обертанні:
1°) трикутника навколо однієї з його сторін;
2) прямокутника навколо осі, паралельної одній з його сторін;
3) ромба навколо осі, яка містить його сторону;
4) круга навколо осі, яка його не перетинає;
5) рівностороннього трикутника навколо осі, яка паралельна висоті і проходить усередині трикутника.

287. Обертанням якої фігури і навколо якої осі можна дістати фігуру, форму якої має:
1) круглий загострений олівець; 2) глиняна миска;
3) склянка; 4) дзеркальна поверхня прожектора?

288*. Прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см обертається навколо діагоналі. Знайдіть:
1) площу осьового перерізу фігури обертання;
2) найбільшу і найменшу площі перерізів фігури обертання площинами, перпендикулярними до осі обертання.

Підсумок

Головні означення

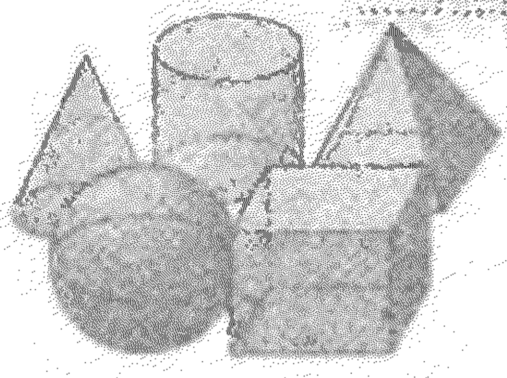


Нехай дано пряму l і плоску фігуру F, які лежать в одній площині. Обертаючи довільну точку фігури навколо прямої l, дістанемо коло з центром на прямій l. Фігура, яка складена із кіл обертання всіх точок фігури F, називається ***фігурою обертання.*** Пряма l називається ***віссю обертання.***

Тіло, яке є фігурою обертання, називається ***тілом обертання***, його поверхня — ***поверхнею обертання.***

Головні твердження

1. Вісь обертання є віссю симетрії фігури обертання, а площини, які проходять через цю вісь, є площинами симетрії.
2. Перетином двох сфер є коло.



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Геометричні тіла і поверхні»

Завдання для самоконтролю

1°. Чи завжди є прямокутником переріз прямого кругового циліндра площиною, паралельною твірній?
2°. Чи завжди площина, що проходить через середину твірної паралельно основі, є площиною симетрії прямого циліндра?
3. Чи можна розрізати прямий круговий циліндр на вісім частин трьома перерізами?
4°. Чи є призма правильною, якщо всі її бічні грані — рівні між собою прямокутники?
5. Чи може пряма п'ятикутна призма мати тільки три площини симетрії?
6°. Чи правильно, що всі діагоналі паралелепіпеда рівні між собою і точкою перетину поділяються навпіл?
7. Чи правильно, що відрізок, який з'єднує вершину кругового конуса з центром його основи, є висотою конуса?
8. Чи може висота конуса мати з ним лише одну спільну точку?
9°. Чи правильно, що всі перерізи прямого кругового конуса, які проходять через його вершину, є рівнобедреними трикутниками?
10. Чи завжди піраміда є правильною, якщо її бічні ребра утворюють рівні кути з висотою?
11°. Чи рівні між собою бічні ребра піраміди, які нахилені під одним кутом до площини її основи?
12. Чи можуть усі двогранні кути при основі піраміди бути рівними між собою, якщо в основі піраміди лежить прямокутник з нерівними сторонами?
13. Чи може верхня основа зрізаної піраміди не бути рівнобедреним трикутником, якщо нижньою її основою є рівнобедрений трикутник?
14. Чи може перерізом сфери радіуса R бути коло радіуса $1{,}1R$?

15°. Два перерізи сфери мають однакову довжину. Чи правильно, що січні площини рівновіддалені від центра сфери?

16°. Чи може мати пряма з кулею тільки одну спільну точку?

17°. Чи може тіло обертання бути многогранником?

18. Чи може фігура обертання мати тільки одну площину симетрії?

Відповіді до завдань для самоконтролю

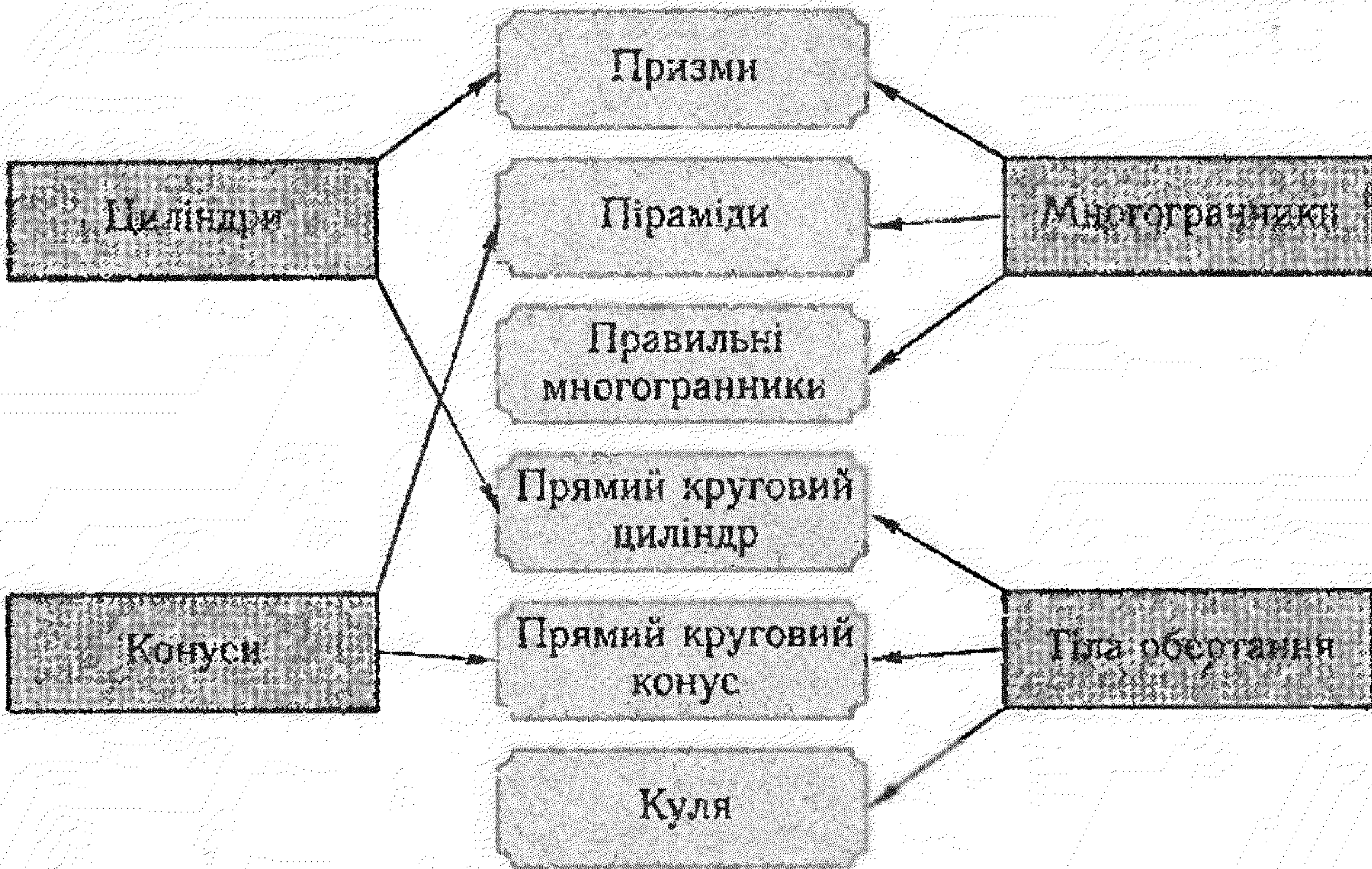
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Так	так	так	ні	ні	ні	ні	так	так
10	11	12	13	14	15	16	17	18
ні	так	ні	ні	ні	так	так	ні	ні

Зразок контрольної роботи №5

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть:
   1°) сторону основи піраміди;
   2) на якій відстані від вершини піраміди слід перетяти її висоту площиною, паралельною основі, щоб площа відповідного перерізу піраміди була удвічі меншою за площу основи;
   3*) радіус вписаної кулі.
2. Відрізок, кінці якого лежать на колах обох основ прямого кругового циліндра з висотою H, перетинає вісь циліндра і нахилений до площини основи під кутом α. Знайдіть:
   1°) радіус основи циліндра;
   2) площу перерізу циліндра площиною, що проходить через твірну під кутом β до площини осьового перерізу, проведеного через ту саму твірну;
   3*) радіус кулі, описаної навколо циліндра.

Класифікація геометричних тіл

Таблиця 44



Правильні многогранники

Таблиця 45

Тип многогранника	Кількість ребер при вершині	Кількість сторін грані	Кількість граней	Кількість ребер	Кількість вершин
Тетраедр	3	3	4	6	4
Куб (гексаедр)	3	4	6	12	8
Октаедр	4	3	8	12	6
Додекаедр	3	5	12	30	20
Ікосаедр	5	3	20	30	12

Розділ 6.

ОБ'ЄМИ І ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Вимірювання геометричних величин (довжин, кутів, площ, об'ємів) є однією з найважливіших задач геометрії. У цьому розділі розглянемо задачу вимірювання об'ємів геометричних тіл і площ їхніх поверхонь.

Застосування геометрії в побуті, виробництві, техніці дуже часто пов'язане з вимірюванням і обчисленням кількісних характеристик тіл. Найважливішими такими характеристиками тіла є його об'єм і площа його поверхні.

Вимірювання величин, зокрема, геометричних, є важкою математичною задачею. Не випадково, що лише наприкінці XIX — на початку XX століть була створена загальна теорія вимірювань. Незважаючи на те, що класичні формули обчислення об'ємів і площ поверхонь були відомі давньогрецьким ученим, для їхнього повноцінного обґрунтування знадобилося два тисячоліття. І це цілком зрозуміло. Поки не вдалося формалізувати ідеї граничного переходу, твердження про вимірювання величин не мали відповідного підґрунтя.

Об'єми і площі поверхонь найпростіших тіл ви обчислювали, починаючи з початкової школи. Настав час осмислити ці обчислення, усвідомити зміст основних понять, узагальнити прийоми обчислень величин, опанувати основними методами вимірювання об'ємів і площ поверхонь.

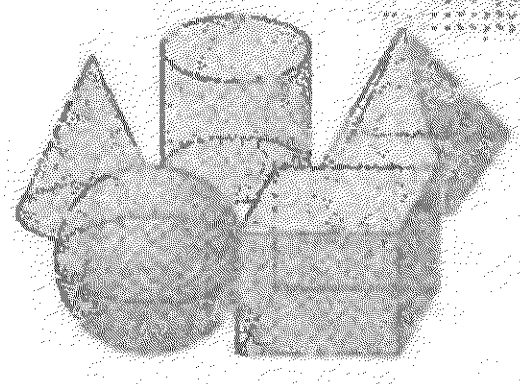
Історичний коментар

Важко прослідкувати початок історії розвитку вчення про геометричні тіла, але, як показують архітектурні пам'ятники стародавніх цивілізацій (Єгипту, Індії, Китаю тощо), їхнє будівництво неможливе без солідних знань про відповідні геометричні образи. Давньогрецькі математики виділили основні геометричні тіла, відкрили багато фактів про їхні будову і властивості. Характерним є і те, що наука про геометричні тіла знаходилась і знаходиться у неперервному розвитку: уточнюються означення, теорія збагачується новими результатами, методами, створюються основи для нових напрямків досліджень, формуються нові математичні науки.

На протязі XIX ст. увагою математиків користувалась проблема про можливість розбиття рівних за об'ємом многогранників на попарно рівні частини (досить назвати знамениту проблему Д. Гільберта про розбиття двох тетраедрів з рівними основами і висотами на рівні між собою тетраедри, розв'язану М. Деном (1878–1952) з негативною відповіддю).

Особливе місце в історії математики (й узагалі, в історії культури, філософії) займають правильні многогранники. Їхня теорія була побудована у VI–IV ст. до н. е. Краса і досконалість будови цих фігур пов'язувалась із досконалістю будови Всесвіту. Видатний давньогрецький філософ Платон (427–347 рр. до н. е.), іменем якого деколи називають правильні многогранники (Платонові тіла), у своїх творах інтерпретував елементи (атоми) складових природи — землі, води, повітря, вогню — у вигляді правильного тетраедра, куба, октаедра та ікосаедра. Форму додекаедра він приписував усьому світові.

Важливі відкриття в геометрії многогранників належать славетному українському математику Г.Ф. Вороному (1868–1908). Суттєвий внесок в узагальнену теорію поверхонь многогранників уніс український математик О.В. Погорелов (1919–2002).

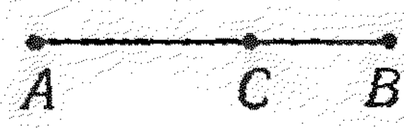
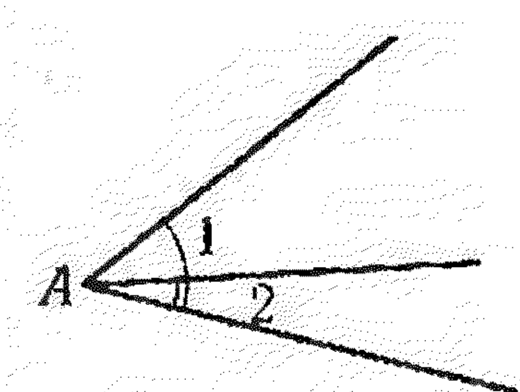


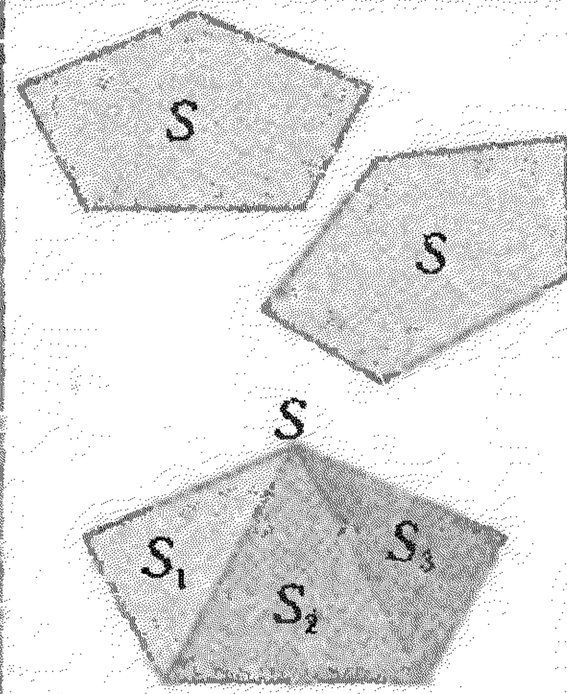
Готуємось до вивчення теми «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл»

Темою «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл» завершується розгляд геометричних величин, застосовних у виробництві, техніці, побуті тощо. Він ґрунтується на досвіді та результатах вимірювання довжин, кутів, площ плоских фігур. Для підготовки до вивчення теми у вигляді таблиць наведено найважливіший навчальний матеріал.

Вимірювання довжин, кутів, площ

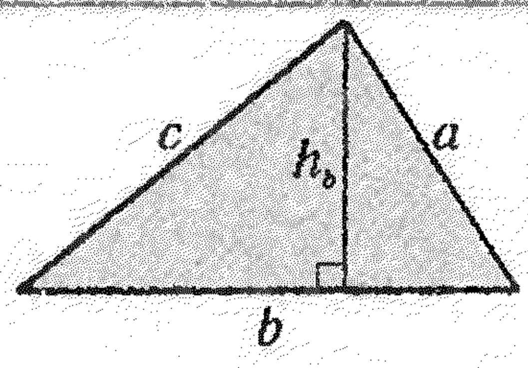
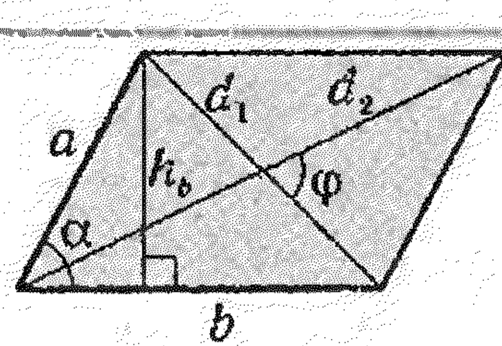
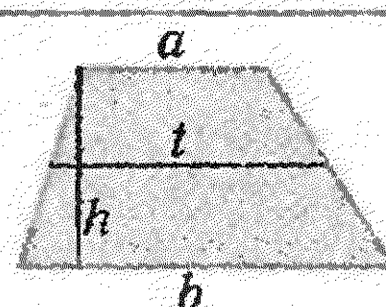
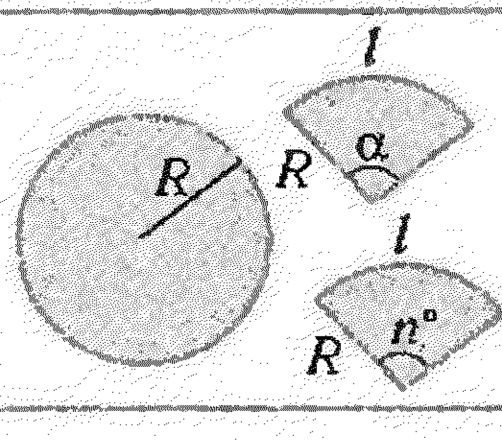
Таблиця 46

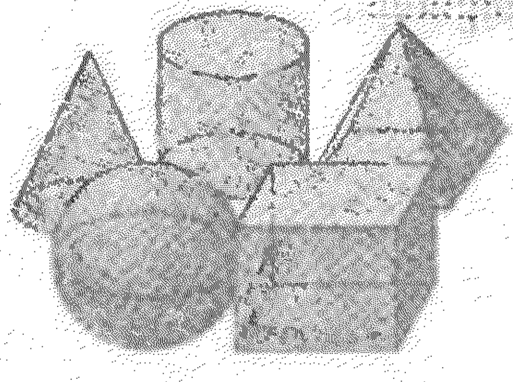
Назва величини	Властивості	Геометрична ілюстрація
Довжина відрізка	Кожен відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою точкою.	$AB=AC+CB$ 
Міра кута	Кожен кут має певну міру, більшу від нуля. Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що починається з його вершини і проходить між його сторонами. Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.	$\angle A=\angle 1+\angle 2$

Площа фігури	Площа многокутника — це додатна величина, яка має такі властивості: 1) рівні многокутники мають рівні площі; 2) якщо многокутник складений із кількох многокутників, що не мають спільних внутрішніх точок, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників; 3) площа квадрата зі стороною одиничної довжини, дорівнює одиниці площі.	 $S=S_1+S_2+S_3$

Площі плоских фігур

Таблиця 47

Фігура	Формули площі S	Рисунок
Трикутник R — радіус описаного кола r — радіус вписаного кола p — півпериметр	$S=\frac{1}{2}b\cdot h_b,\ \ S=\frac{1}{2}ab\sin C,$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ $S=rp=\frac{abc}{4R}.$	
Паралелограм	$S=b\cdot h_b,$ $S=ab\sin\alpha,$ $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$	
Трапеція a, b — основи h — висота t — середня лінія	$t=\frac{a+b}{2},$ $S=t\cdot h=\frac{a+b}{2}\cdot h.$	
Круг, сектор	$S=\pi R^2,$ $S_c=\frac{\alpha R^2}{2},\ S_c=\frac{\pi n^\circ}{360^\circ}R^2.$	



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл»

1. У скільки разів треба збільшити довжини сторін квадрата, щоб його площа збільшилась удвічі?

   А. У 2 рази. Б. У 4 рази. В. У $\sqrt{2}$ рази. Г. У 1,5 рази.

2. Як зміниться площа прямокутника, якщо одну сторону збільшити вдвічі, а другу зменшити вдвічі?

   А. Збільшиться в 2 рази. Б. Зменшиться в 2 рази.
   В. Збільшиться в 1,5 рази. Г. Не зміниться.

3. Середини сторін паралелограма послідовно з'єднали відрізками. У скільки разів площа утвореного чотирикутника менша за площу паралелограма?

   А. У 1,5 рази. Б. У 2 рази. В. У 3 рази. Г. У 4 рази.

4. Середини сторін опуклого чотирикутника послідовно з'єднали. Отриманий чотирикутник є ...

   А. паралелограмом. Б. прямокутником.
   В. ромбом. Г. трапецією.

5. Середини сторін деякого чотирикутника послідовно з'єднали. Отримали ромб. Яку з наступних властивостей має даний чотирикутник?

   А. Діагоналі поділяють кути навпіл.
   Б. Діагоналі взаємно перпендикулярні.
   В. Діагоналі точкою перетину діляться навпіл.
   Г. Діагоналі рівні.

6. В опуклому 10-кутнику провели всі діагоналі. Скільки всього проведено діагоналей?

   А. 80. Б. 70. В. 40. Г. 35.

7. На гіпотенузі і на катеті рівнобедреного прямокутного трикутника побудували квадрати. У скільки разів площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, більша за площу квадрата, побудованого на катеті?

   А. У 2 рази. Б. У 4 рази. В. У $\sqrt{2}$ рази. Г. У 1,5 рази.

8. Переріз конуса, паралельний основі, поділяє висоту у відношенні 2:1, рахуючи від вершини. Чому дорівнює відношення площі перерізу до площі основи?

А. 1:3. Б. 2:3. В. 1:9. Г. 4:9.

9. Яким є рівняння верхньої половини кола $x^2 + y^2 = 4$?

А. $x^2 + y^2 = 4$. Б. $y = \sqrt{4 - x^2}$. В. $x = \sqrt{4 - y^2}$. Г. $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

10. Якщо бічні ребра трикутної піраміди утворюють з висотою піраміди рівні кути, то висота піраміди проходить через точку перетину ...

А. висот основи. Б. медіан основи. В. бісектрис основи.
Г. серединних перпендикулярів до сторін основи.

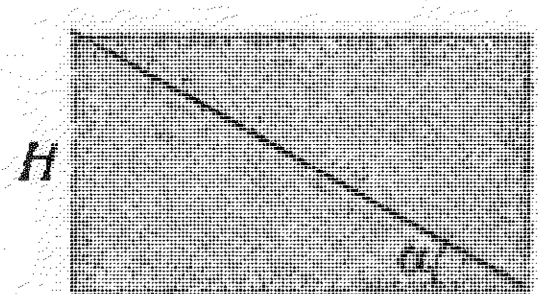
11. Якщо бічні грані трикутної піраміди утворюють рівні кути з висотою піраміди, то її вершина ортогонально проектується в точку перетину ...

А. висот основи. Б. медіан основи. В. бісектрис основи.
Г. серединних перпендикулярів до сторін основи.

12. Через середини двох сторін основи трикутної призми проведено площину, паралельну бічній грані призми, площа якої дорівнює S. Площа перерізу дорівнює ...

А. $\frac{1}{4}S$. Б. $\frac{1}{2}S$. В. S.
Г. величині, відмінній від наведених.

13. На рисунку дано розгортку бічної поверхні прямого кругового циліндра з висотою H. Радіус основи циліндра дорівнює ...



А. $\frac{H \operatorname{tg} \alpha}{2\pi}$. Б. $\frac{H \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}$.

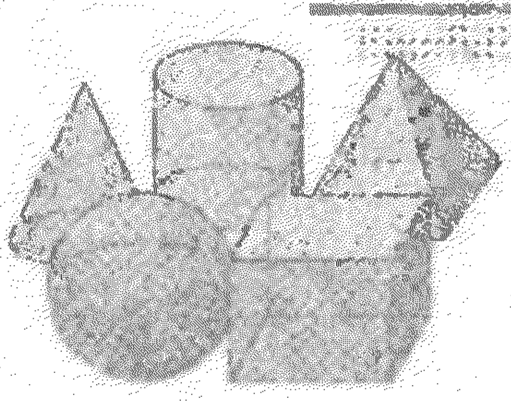
В. $\frac{H \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\pi}$. Г. $\frac{H \operatorname{tg} \alpha}{\pi}$.

14. Якою фігурою є переріз прямого кругового циліндра площиною, паралельною осі?

А. Квадратом. Б. Прямокутником.
В. Ромбом. Г. Трапецією.

15. Висоту конуса розділено на чотири рівні відрізки і через точки поділу паралельно основі проведено площини. Площа основи дорівнює S. Площа найбільшого перерізу дорівнює ...

А. $\frac{3}{4}S$. Б. $\frac{1}{4}S$. В. $\frac{1}{16}S$. Г. $\frac{9}{16}S$.



§17. Об'єм призми і циліндра

Вивчення об'ємів геометричних тіл має багато спільного з вивченням площ плоских фігур. Спочатку з'ясуємо характерні властивості геометричної величини, яку називають об'ємом, а потім, на основі цих властивостей, розглянемо формули для обчислення об'ємів призм і циліндрів.

1. Об'єм тіла

Серед геометричних фігур простору виділяють тіла, які моделюють об'ємність фізичних тіл. Характерною властивістю тіла є наявність у ньому внутрішніх точок. Сукупність внутрішніх точок характеризується місткістю. Якщо вважати геометричне тіло посудиною, поверхня якої збігається з поверхнею тіла, то мірою місткості (об'ємом) можна вважати величину, пропорційну кількості води, яка наповнює цю посудину. Очевидно, що в такому разі рівні тіла матимуть рівні об'єми. Зрозуміло також, що коли будь-яку посудину розділити тонкою перегородкою на дві частини, то місткість усієї посудини дорівнюватиме сумі місткостей її частин. У цьому пункті ми прагнутимемо перетворити ці природні уявлення про об'єм у чіткі математичні поняття.

Насамперед оберемо одиницю об'єму, тобто той еталон, за допомогою якого будемо вимірювати місткість даного тіла. При вимірюванні площ таким «еталоном» був одиничний квадрат. А за одиницю об'єму візьмемо об'єм одиничного куба, тобто куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини. Таким чином, 1 м^3 — це об'єм куба, довжина ребра якого дорівнює 1 м, 1 см^3 — це об'єм куба з ребром завдовжки 1 см і т. д.

Коли вибрано одиницю вимірювання величини, тоді сама величина характеризується числом, що показує, скільки одиничних еталонів відповідає даній величині. Зокрема, об'єм даного тіла — це число, яке показує, скільки одиничних кубів і їхніх частин рівноцінні даному тілу. Об'єм тіла T позначатимемо $V(T)$.

Далі припускатимемо, що тіла, які розглядаються, мають об'єм. Це означає, що для кожного з них визначена додатна величина, яка має такі властивості:

1) ***рівні тіла мають рівні об'єми;***

2) ***якщо тіло є об'єднанням кількох тіл, кожні два з яких не мають спільних внутрішніх точок, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів його складових;***

3) ***об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.***

Із цих властивостей випливає ще одна важлива властивість об'ємів:

4) ***об'єм тіла, яке є частиною іншого тіла, не перевищує об'єму всього тіла.***

Тіла, що мають рівні об'єми, називаються ***рівновеликими***. Відтак, маємо інше формулювання першої властивості: рівні тіла — рівновеликі. Зрозуміло, що обернене твердження — неправильне.

Основна задача, яку ми розв'язуватимо у цьому і наступних двох параграфах, полягає у виведенні формул для обчислення об'ємів різних видів тіл на основі перелічених властивостей. Почнемо з розгляду найпростішої формули.

Теорема 1 *(про об'єм куба).*

Об'єм V куба з ребром завдовжки a дорівнює a^3: $V = a^3$.

☐ Правильність наведеної формули не викликає сумнівів. Проблема полягає в її отриманні як наслідку наведених властивостей об'єму.

Якщо a — натуральне число: $a = m$, $m \in N$, то даний куб K можна розбити на m^3 одиничних кубів K_1 (рис. 296). Оскільки ці куби не мають спільних внутрішніх точок, то, згідно з властивостями 2 і 3, маємо:

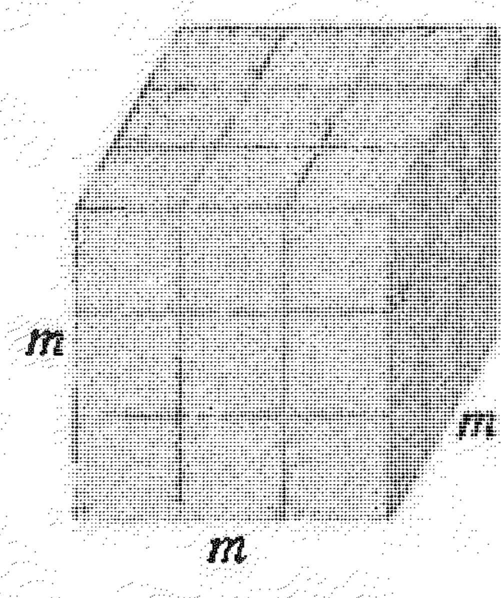


Рис. 296

$$V(K) = m^3 \cdot V(K_1) = m^3 = a^3.$$

Нехай $a = \dfrac{1}{n}$, де n — натуральне число. У цьому випадку зробимо навпаки: одиничний куб K_1 розіб'ємо на куби з ребром $\dfrac{1}{n}$. Їхня кількість дорівнюватиме n^3. Тоді

$$n^3 \cdot V(K) = V(K_1) = 1\text{, звідки } V(K) = \frac{1}{n^3} = a^3.$$

Випадок, коли a — додатне раціональне число, тобто $a = \frac{m}{n}$, де m, n — натуральні числа, неважко звести до двох попередніх за рахунок вибору нової одиниці довжини.

Найважчим є випадок, коли a — ірраціональне число. Доведення формули у цьому випадку буде розглянуто нижче. Воно ґрунтується на ідеї ***вичерпування***. Ця ідея використовується для доведення формули площі круга за допомогою послідовностей площ описаних і вписаних многокутників. У випадку куба з ірраціональним виміром такими послідовностями будуть об'єми кубів з раціональними довжинами сторін, які вичерпують даний куб зсередини і зовні. Об'єми таких кубів обчислюються за наведеною формулою. ■

Таким чином, обґрунтування формули для обчислення об'єму найпростішої просторової фігури — куба — забезпечується застосуванням двох методів.

1. ***Метод розбиття тіла на частини,*** об'єми яких відомі або ж легко обчислюється, з подальшим додаванням цих об'ємів.

2. ***Метод вичерпування,*** який ґрунтується на побудові послідовності тіл, які містять в собі дане тіло T і послідовності тіл, які містяться в даному тілі T. Причому при необмеженому зростанні номерів їхніх членів обидві послідовності об'ємів цих тіл прямують до одного і того самого числа. Це число і є об'ємом $V(T)$ даного тіла.

Ми будемо і далі користуватись цими методами. Аналогічні методи використовувались і при вимірюванні площ плоских фігур.

Враховуючи те, що поняття прямокутного паралелепіпеда є узагальненням поняття куба, формула для об'єму прямокутного паралелепіпеда є узагальненням розглянутої формули.

Теорема 2 *(про об'єм прямокутного паралелепіпеда).*

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів:

$$V = abc,$$

де a, b, c — виміри паралелепіпеда.

Приклад 1. Маса деталі кубічної форми становить 12 кг. Знайти масу деталі кубічної форми, зробленої з такого самого матеріалу, якщо її діагональ удвічі більша від діагоналі даної деталі.

□ Сторона a деталі кубічної форми дорівнює $\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$, де m — її маса, ρ — густина матеріалу, з якого зроблено деталь. Це випливає з рівностей $m = \rho V$ і $V = a^3$. Оскільки діагональ куба зі стороною a дорівнює $\sqrt{3}a$ (чому?), то діагональ деталі дорівнює $\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$. Звідси діагональ іншої деталі дорівнює $2\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$, а сторона – $2\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$. Знайдемо масу m_1 цієї деталі: $m_1 = \left(2\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}\right)^3 \cdot \rho = 8m = 8 \cdot 12 = 96$ (кг). ■

Відповідь. 96 кг.

Результат щодо об'ємів, отриманий у розв'язанні прикладу 1, має узагальнення.

Якщо ребро куба збільшиться (зменшиться) у k разів, то об'єм куба збільшиться (зменшиться) в k^3 разів.

Завершимо спочатку доведення теореми 1.

□ У випадку, коли a — ірраціональне число, розглянемо послідовності його десяткових наближень з недостачею a_n^- і з надлишком a_n^+, які прямують до a. Їм відповідають куби з ребрами a_n^- і a_n^+ (рис. 297). Позначимо їх через K_n^- і K_n^+ відповідно. Оскільки $K_n^- \subset K \subset K_n^+$, то $V(K_n^-) < V(K) < V(K_n^+)$. Але, згідно з доведеним вище, $V(K_n^-) = (a_n^-)^3$, $V(K_n^+) = (a_n^+)^3$. При необмеженому збільшенні n обидва числа $(a_n^-)^3$ і $(a_n^+)^3$ прямують до одного й того самого числа a^3. Тому $V(K) = a^3$. ■

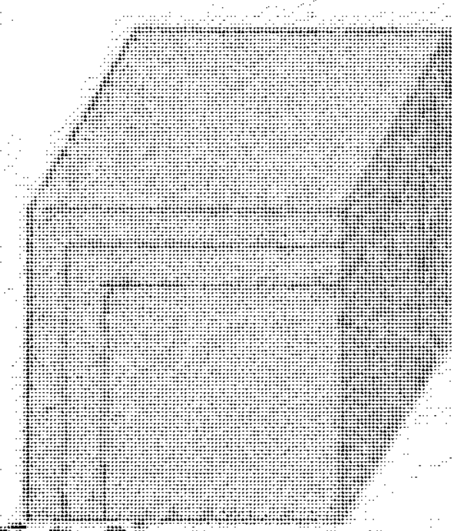


Рис. 297

Доведення теореми 1 добре ілюструє вказані методи обчислення об'ємів.

Доведення теореми 2.

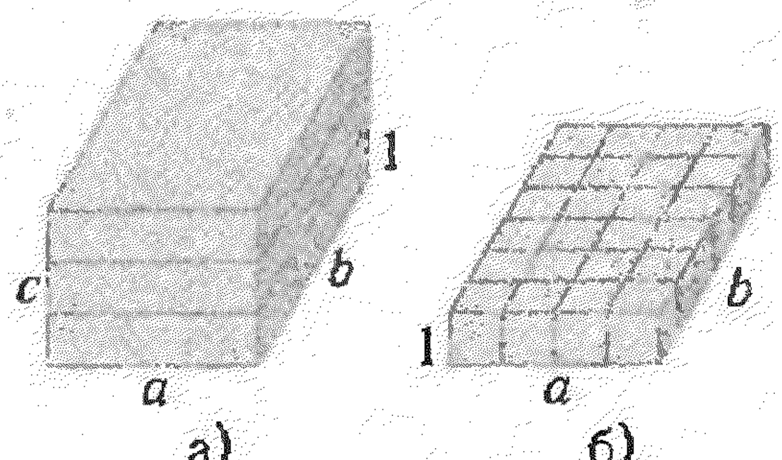


Рис. 298

☐ Якщо всі три виміри прямокутного паралелепіпеда є натуральними числами, то його можна розбити на abc одиничних кубів. Для цього спочатку його потрібно поділити на шари одиничної товщини (рис. 298, а), а потім кожен із таких шарів розбити на одиничні куби (рис. 298, б). В результаті матимемо abc однакових кубів. За властивостями об'ємів, $V = abc$.

Якщо виміри a, b, c — раціональні числа (і, певна річ, додатні), то обґрунтування формули зводиться до попереднього випадку. Для цього зобразимо дані числа у вигляді

$$a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{n}, c = \frac{q}{n},$$

де m, p, q, n— натуральні числа (доведіть, що це завжди можна зробити). Оберемо за одиницю довжини $\frac{1}{n}$. Згідно з новим масштабом, усі виміри паралелепіпеда є натуральними числами m, p, q. Тому $V = mpq$. Одиниця об'єму в новому масштабі дорівнює об'єму куба з ребром $a = \frac{1}{n}$, тобто $\frac{1}{n^3}$ (див. теорему 1). Тому в початковому масштабі вимірювання довжин об'єм V відрізняється від числа mpq на співмножник $\frac{1}{n^3}$. Отже,

$$V = mpq \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = abc.$$

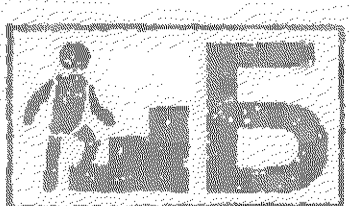
Нехай принаймні один вимір паралелепіпеда є ірраціональним числом. Замінимо виміри паралелепіпеда їхніми десятковими наближеннями з недостачею і з надлишком, які прямують до a, b, c: $a_n^- \le a \le a_n^+$, $b_n^- \le b \le b_n^+$, $c_n^- \le c \le c_n^+$. Дістанемо, як і в теоремі 1, дві послідовності $\{K_n^-\}, \{K_n^+\}$ прямокутних паралелепіпедів з раціональними вимірами.

Їхні об'єми $V(K_n^-) = a_n^- b_n^- c_n^-$, $V(K_n^+) = a_n^+ b_n^+ c_n^+$ при необмеженому зростанні n прямують до одного і того самого числа abc, яке дорівнює об'єму паралелепіпеда з вимірами a, b, c. ■

Контрольні запитання

1°. Чи може об'єм тіла виражатися: а) від'ємним числом; б) нулем?
2°. Чи рівновеликі тіла, якщо вони рівні?
3°. Чи рівні тіла, якщо вони рівновеликі?
4. Чи рівними є об'єми тіл, які дістали при перерізі кулі площиною, що проходить через центр кулі?
5°. Ребро одного куба у k разів більше за ребро другого куба. У скільки разів об'єм першого куба більший за об'єм другого куба?
6. Чи зможете ви підняти куб, ребро якого дорівнює 20 см, якщо 1 м^3 матеріалу, з якого зроблено куб, важить 20 т?
7. Пофарбований з усіх боків куб розпиляли на 27 однакових кубиків. Чи правильно, що тільки дві грані будуть пофарбовані у парної кількості кубиків?

2. Об'єм призми



Скориставшись основними властивостями об'єму, можна дістати формули для обчислення об'ємів багатьох тіл. Найпростіше це зробити для прямих призм.

Формулу для об'єму прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b, c можна записати у вигляді

$$V = S \cdot H,$$

де $S = a \cdot b$ — площа відповідної грані, а вимір c є висотою H, проведеною до цієї грані.

У цьому вигляді формула застосовна і для прямих паралелепіпедів.

Теорема 3 *(про об'єм прямого паралелепіпеда).*

Об'єм прямого паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту:

$$V = SH,$$

де S — площа основи паралелепіпеда, H — його висота.

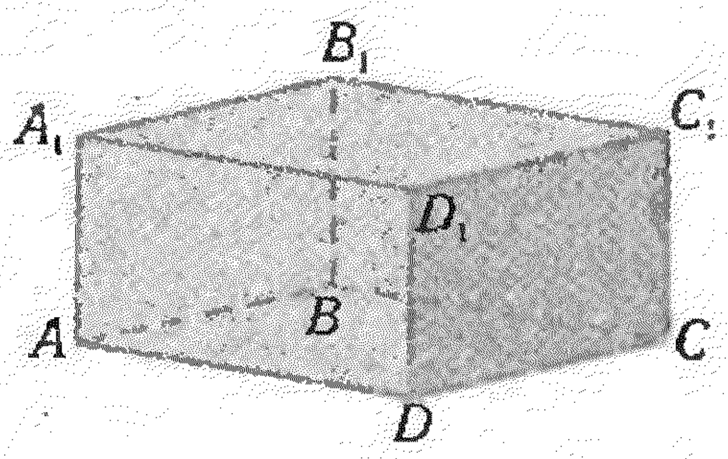


Рис. 299

☐ Розглянемо прямий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основою якого є паралелограм $ABCD$ (рис. 299). Спробуємо перетворити його на прямокутний паралелепіпед. Аналогічна ідея використовувалась у планіметрії при обчисленні площі паралелограма. Проведемо через ребра AA_1 і DD_1 площини, перпендикулярні до площини AA_1D_1D, і побудуємо прямокутний паралелепіпед $AMNDA_1M_1N_1D_1$ (рис. 300). Цей паралелепіпед рівновеликий даному паралелепіпеду, оскільки вони мають спільну частину — призму $ABNDA_1B_1N_1D_1$, до якої приєднані рівні (доведіть це!) трикутні призми $AMBA_1M_1B_1$ і $DNCD_1N_1C_1$. Крім того, основи розглянутих паралелепіпедів $ABCD$ і $AMND$ (рис. 300) рівновеликі, а висоти однакові. Тому об'єм прямого паралелепіпеда, як і прямокутного, дорівнює добутку площі основи на висоту. ■

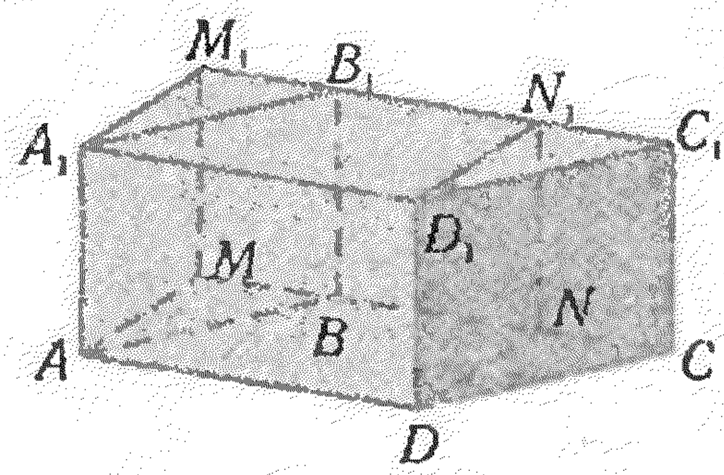


Рис. 300

У доведенні теореми 3 неявно передбачалося, що основа висоти паралелограма $ABCD$, проведеної з точки D, лежить між вершинами B і C. Це припущення не зменшує загальності доведення, тому що в паралелограмі завжди є вершина, що задовольняє зазначене припущення (доведіть це!).

Доведена формула справджується і для довільної прямої призми.

Теорема 4 *(про об'єм прямої призми).*

Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту:

$$V = SH,$$

де S — площа основи призми, H — висота.

Її доведення методом розбиття буде наведене нижче.

Приклад 2. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см. Знайти його об'єм, якщо:

1) паралелепіпед прямокутний і його діагональ нахилена до площини основи під кутом 30°;

2) одна з діагоналей основи дорівнює 4 см, а площа діагонального перерізу, що проходить через неї, дорівнює 24 см².

□ 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (рис. 301). Знайдемо площу S його основи: $S = 3 \cdot 4 = 12$ (см²). Для обчислення об'єму треба знайти висоту. З прямокутного трикутника ABD, за теоремою Піфагора, маємо: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} =$

$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см). З прямокутного трикутника BDD_1 знаходимо висоту:

$$H = DD_1 = BD \cdot \operatorname{tg} \angle B = 5 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ (см).}$$

Таким чином, $V = S \cdot H = 12 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$ (см³).

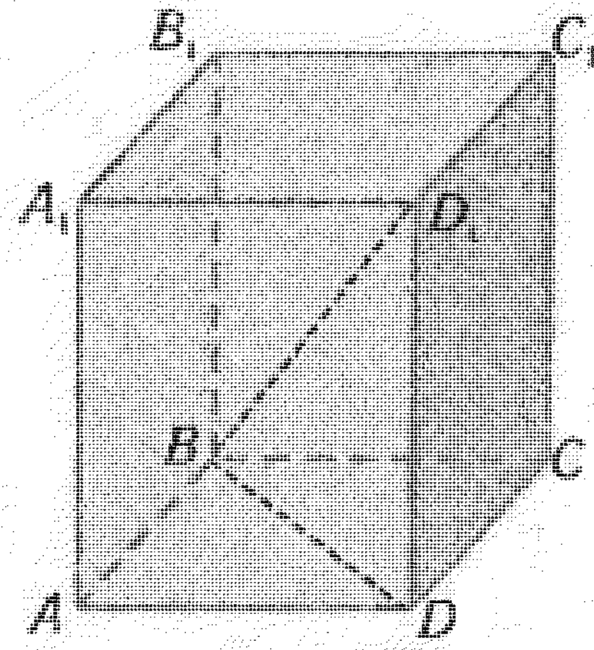


Рис. 301

2) Діагональним перерізом паралелепіпеда є прямокутник. Оскільки його площа дорівнює 24 см², а сторона 4 см, то друга сторона — 6 см. Тобто висота H паралелепіпеда дорівнює 6 см. Знайдемо площу основи паралелепіпеда (рис. 302), користуючись умовою і рівністю: $S_{ABCD} = 2S_{ABD}$. Площу рівнобедреного трикутника ABD знайдемо за формулою $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DM$, де DM — висота, проведена до сторони AB. З прямокутного трикутника BDM, за теоремою Піфагора, маємо:

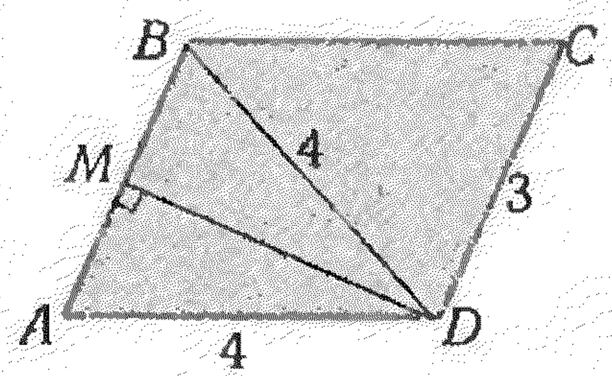


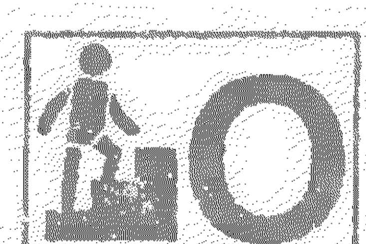
Рис. 302

$$DM = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \sqrt{16 - 2{,}25} = \sqrt{13{,}75} \text{ (см).}$$

Таким чином, $S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{13{,}75} = 3\sqrt{13{,}75}$ (см²).

Тоді $V = S_{ABCD} \cdot H = 3\sqrt{13{,}75} \cdot 6 = 18\sqrt{13{,}75}$ (см³). ■

Відповідь. 1) $20\sqrt{3}$ см³; 2) $18\sqrt{13{,}75}$ см³.



Доведення теореми 4.

□ З двох рівних прямих трикутних призм можна скласти прямий паралелепіпед (рис. 303). Тому об'єм прямої трикутної призми у два рази менший за об'єм цього паралелепіпеда. Проте саме у два рази меншою є площа основи трикутної призми. Тому для неї залишається правильною формула $V = SH$, де S — площа основи призми, H — висота.

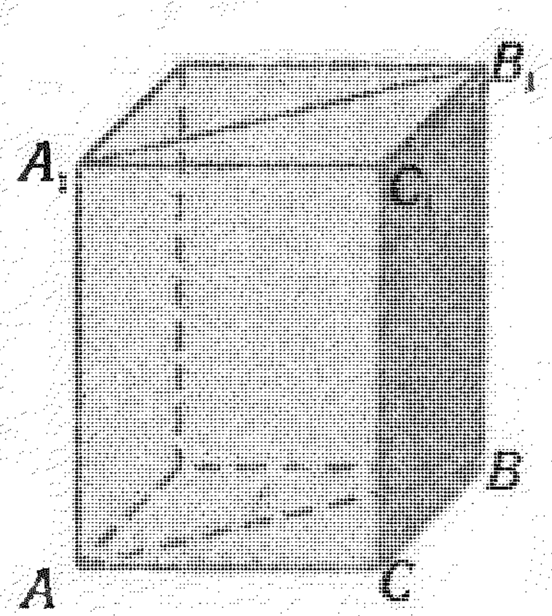


Рис. 303

Розглянемо довільну пряму призму. Її можна розбити на скінченне число прямих

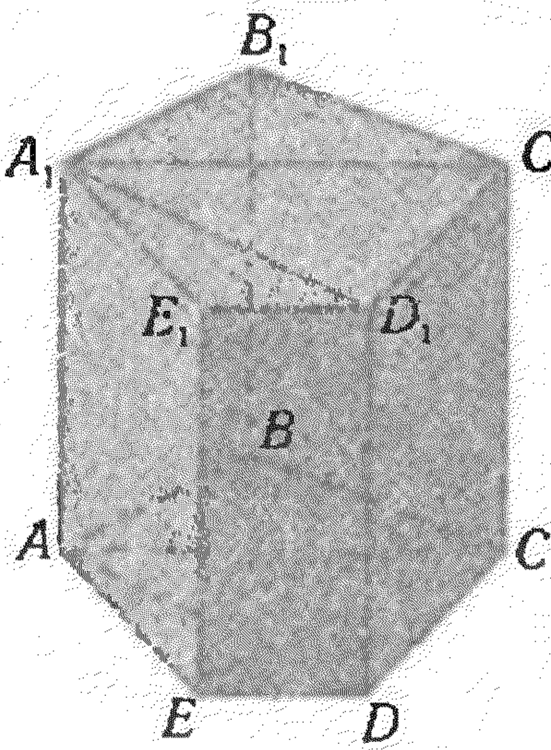


Рис. 304

трикутних призм, висоти яких збігаються з висотою даної призми (рис. 304). Для цього достатньо розбити основу призми на трикутники. Тому шуканий об'єм V дорівнює сумі об'ємів складових:

$$V = S_1 \cdot H + S_2 \cdot H + ... + S_n \cdot H,$$

де H — висота призм, а S_1, S_2, ..., S_n — площі трикутників, на які розбито основу. Звідси

$$V = (S_1 + S_2 + ... + S_n)H = SH,$$

де $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$ — площа основи даної призми. ■

Приклад 3. У правильній шестикутній призмі площа найбільшого діагонального перерізу дорівнює 4 м², а відстань між двома протилежними гранями — 2 м. Знайти об'єм призми.

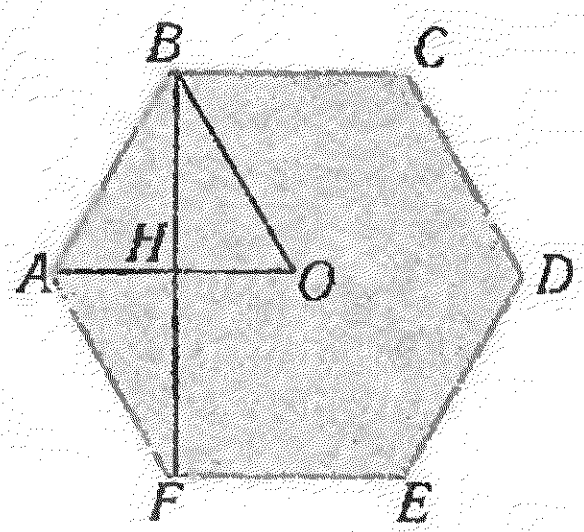


Рис. 305

□ При розв'язанні цієї задачі можна обмежитися зображенням основи, оскільки площини основ перпендикулярні до площин бічних граней. Нехай $ABCDEF$ — основа правильної призми, O — її центр (рис. 305). Знайдемо площу основи S_o. З умови задачі випливає, що $BF = 2$ м, оскільки $BF \perp BC$, $BF \perp FE$. Тоді $BH = 1$ м. З прямокутного трикутника ABH, за теоремою Піфагора, маємо: $AH^2 + BH^2 = AB^2$. Нехай $AB = x$, тоді $AH = \frac{x}{2}$. Отже, $\frac{x^2}{4} + 1 = x^2$, а $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ м. Тоді

$$S_o = 6 \cdot S_{ABO} = 6 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot BH = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = 2\sqrt{3} \quad (\text{м}^2).$$

Площа S найбільшого діагонального перерізу дорівнює: $S = d \cdot H$, де d — найбільша діагональ основи, H — висота призми.

Оскільки найбільша діагональ правильного шестикутника удвічі більша за його сторону, то $d = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Згідно з умовою задачі,

$S = 4$ м², тому $H = \dfrac{S}{d} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$. Таким чином, об'єм призми V дорівнює: $V = S_o \cdot H = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (м³). ■

Відповідь. 6 м³.

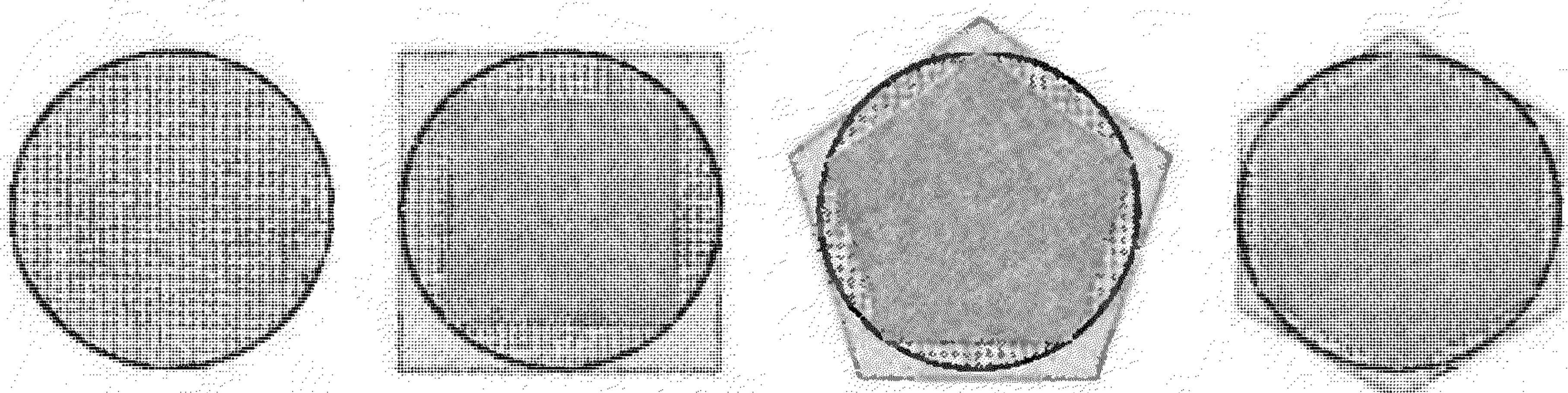
Контрольні запитання

1°. Як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо всі його виміри збільшити вдвічі?
2°. У скільки разів збільшиться об'єм прямої призми, якщо її висоту збільшити вдвічі?
3. Чи може об'єм прямого паралелепіпеда бути меншим від 1, якщо довжини його ребер більші від 100?
4. Площина поділяє два бічних ребра призми навпіл. Чи обов'язково вона поділяє призму на рівновеликі тіла?
5°. Як варто провести переріз через бічне ребро трикутної призми, щоб її об'єм поділився навпіл?
6. Чи рівні між собою об'єми двох призм із рівновеликими і розміщеними в даних двох паралельних площинах основами?

3. Об'єм циліндра

Б Прямі призми є окремим випадком прямих циліндрів. Тому природно, що формула для обчислення об'єму прямого циліндра має такий самий вигляд, як і для прямої призми.

Розглянемо найпростіший прямий циліндр — прямий круговий. Його основою є круг (рис. 306, а), який можна «вичерпати» зсередини і зовні правильними многокутниками — вписаними і описаними (рис. 306, б–г).



а) б) в) г)

Рис. 306

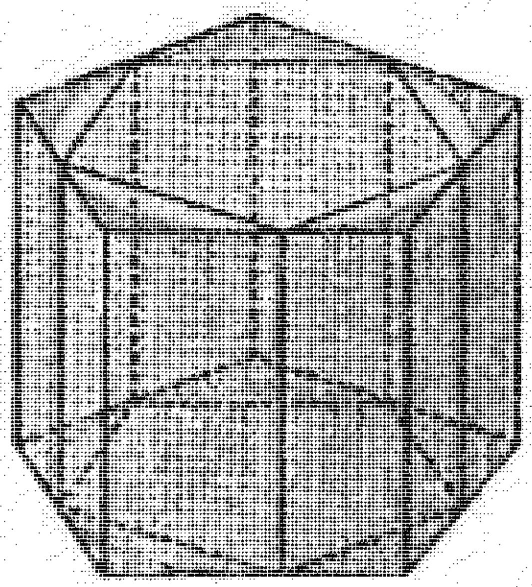


Рис. 307

Побудуємо прямі призми, основами яких є ці многокутники, а висоти дорівнюють висоті циліндра (рис. 307). Отримаємо дві послідовності прямих призм, вписаних у прямий круговий циліндр і описаних навколо нього. Позначимо через H висоту циліндра, а через S_n і S_n^- площі відповідно вписаних і описаних многокутників. Тоді об'єми побудованих призм дорівнюють відповідно $S_n^- \cdot H$ і $S_n \cdot H$. Оскільки площі S_n і S_n^- прямують при зростанні n до площі круга $S = \pi R^2$, де R — радіус основи циліндра, то шуканий об'єм прямого кругового циліндра обчислюється за формулою

$$V = S\,H \text{ або } V = \pi R^2 H.$$

Приклад 4. Діагональ осьового перерізу прямого кругового циліндра дорівнює 16 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайти об'єм:

1) циліндра;
2) правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр;
3) правильної шестикутної призми, описаної навколо циліндра.

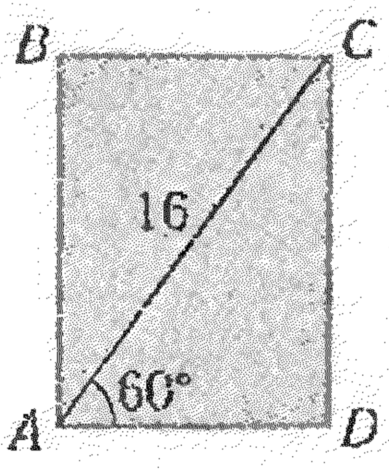


Рис. 308

☐ 1) Для розв'язування цієї задачі можна обмежитись зображенням осьового перерізу циліндра (рис. 308). Для обчислення об'єму циліндра знайдемо радіус його основи і висоту.

З прямокутного трикутника ACD маємо:

$$AD = AC \cdot \cos\angle A = 16 \cdot \cos 60^\circ = 8 \text{ (см)},$$

$$R = \frac{AD}{2} = 4 \text{ (см)}.$$

$$H = CD = AC \cdot \sin\angle A = 16 \cdot \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Тоді

$$V = \pi \cdot R^2 H = \pi \cdot 4^2 \cdot 8\sqrt{3} = 128\sqrt{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

2) Сторона квадрата, вписаного в круг з радіусом R, тобто основи призми, дорівнює $R\sqrt{2}$. У нашому випадку вона дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Тому об'єм правильної чотирикутної призми, вписаної у циліндр, дорівнює $V = S \cdot H = (4\sqrt{2})^2 \cdot 8\sqrt{3} = 256\sqrt{3}$ (см^3).

3) Сторона правильного шестикутника, описаного навколо круга з радіусом R, дорівнює $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, а його площа — $2R^2\sqrt{3}$. У на-

шому випадку: $S = 2 \cdot 4^2\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ (см²). Тому об'єм описаної призми дорівнює $V = S \cdot H = 32\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 768$ (см³). ■

Відповідь. 1) $128\sqrt{3}\pi$ см³; 2) $256\sqrt{3}$ см³; 3) 768 см³.

Приклад 5. Зі сталевого бруса, що має форму правильної чотирикутної призми з розмірами $a \times a \times l$, виготовляють дріт циліндричної форми з діаметром d. Знайти довжину виготовленого дроту, якщо $a = 10$ см, $l = 3{,}14$ м, $d = 2$ см.

□ Природно припустити, що об'єм дроту дорівнює об'єму бруса, тобто $V = a^2 l$. Якщо довжина дроту x, то $V = \pi\frac{d^2}{4}x$. Звідси

$$x = \frac{4a^2 l}{\pi \cdot d^2} \approx \frac{4 \cdot 10^2 \cdot 314}{3{,}14 \cdot 2^2} = 10000 \text{ (см), або } x \approx 100 \text{ м.}$$ ■

Відповідь. ≈ 100 м.

Узагальнимо знайдену формулу на випадок довільних прямих циліндрів (а не тільки таких, де основою є круг). Для цього скористаємось методом вичерпування.

Розглянемо прямий циліндр з основою D (рис. 309). Вважатимемо, як завжди, що плоска фігура D має площу $S(D)$, тобто існують такі послідовності многокутників M_n^- і M_n^+, що $M_{n-1}^- \subset M_n^- \subset D$, $D \subset M_n^+ \subset M_{n-1}^+$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S\left(M_n^+\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S\left(M_n^-\right) = S(D)$.

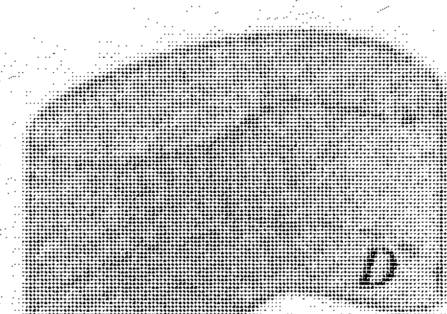


Рис. 309

У загальному випадку ми припускаємо, що многокутники M_n^- містяться в D, а многокутники M_n^+ містять у собі D, при цьому не обов'язково їхні вершини лежать на лінії, яка обмежує фігуру D. Послідовності цих многокутників вичерпують плоску фігуру D зовні і зсередини.

Теорема 5
(про об'єм прямого циліндра).

Об'єм прямого циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту:

$$V = S \cdot H,$$

де S — площа основи циліндра, H — висота.

□ Розглянемо дві послідовності прямих призм T_n^- і T_n^+ з основами M_n^- і M_n^+ і висотою H. Призми першої послідовності містяться в циліндрі T: $T_n \subset T$. Призми другої послідовності містять у собі цей циліндр: $T \subset T_n^+$. Тому $V\left(T_n^-\right) \le V\left(T\right) \le V\left(T_n^+\right)$. З теореми 4 випливає, що $V\left(T_n\right) = S\left(M_n\right)H, V\left(T_n^+\right) = S\left(M_n^-\right)H$. Послідовності $S\left(M_n\right)$ і $S\left(M_n^+\right)$ прямують до одного і того самого числа $S\left(D\right)$, тому $V(T)=S(D)H = S \cdot H$. ■

Приклад 6. Знайти найбільший об'єм прямого кругового циліндра, який міститься у прямому круговому конусі, що має радіус основи R і висоту H, причому основа циліндра лежить у площині основи конуса.

□ Очевидно, що висота і радіус основи циліндра перебувають у функціональній залежності. Якщо радіус циліндра вважати незалежною змінною і позначити через x, то висоту циліндра, що міститься в конусі, можна записати як функцію $H(x)$. А маючи радіус основи і висоту циліндра, визначаємо нову функцію $V(x)$, в якій виражена залежність об'єму циліндра від радіуса основи. Тепер залишиться дослідити функцію $V(x)$ на екстремум.

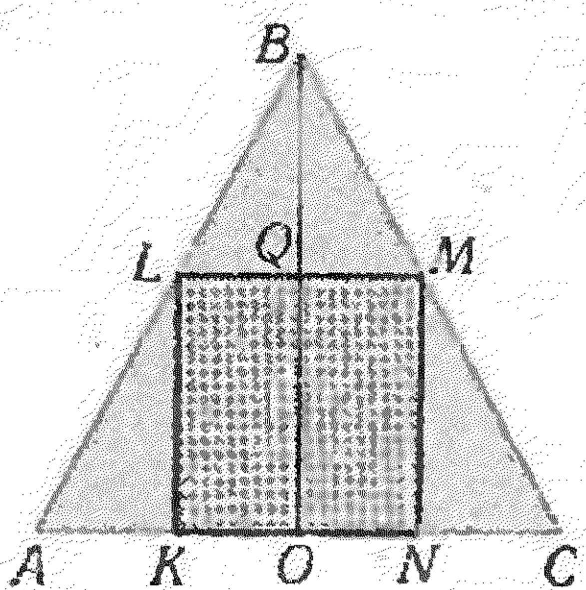


Рис. 310

Реалізуємо наведений план розв'язання задачі.

Нехай ABC — осьовий переріз прямого кругового конуса, $KLMN$ — осьовий переріз циліндра, вписаного у цей конус, BO — їхня вісь (рис. 310).

Позначимо радіус основи циліндра через x, $x \in (0; R)$, а його висоту – через $H(x)$.

З подібності трикутників ABO і LBQ маємо: $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{LQ}{BQ}$. Враховуючи, що $AO = R$, $BO = H$, $LQ = x$, $BQ = H - H(x)$, одержимо:

$$\frac{R}{H} = \frac{x}{H - H(x)} \text{ або } H(x) = \frac{H}{R}(R - x).$$

Тоді $V(x) = \pi \cdot x^2 \dfrac{H}{R}(R - x) = \dfrac{\pi \cdot H}{R}\left(Rx^2 - x^3\right)$, $x \in (0; R)$.

Знайдемо найбільше значення функції $V(x)$ на проміжку $(0; R)$. Для цього знайдемо за схемою, наведеною у § 8, найбільше значення цієї функції на відрізку $[0; R]$. Похідна досліджуваної функції дорівнює: $V'(x) = \dfrac{\pi \cdot H}{R}(2xR - 3x^2)$. Вона набуває нульового значення при $x = \frac{2}{3}R$. Оскільки $V(0) = V(R) = 0$, а $V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4\pi \cdot HR^2}{27}$, то найбільше значення на відрізку $[0; R]$, а відтак і на інтервалі $(0; R)$, функція набуває при $x = \frac{2}{3}R$. Отже, $V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4\pi \cdot HR^2}{27}$ — найбільший об'єм циліндра, який задовольняє умову задачі. ■

Відповідь. $\frac{4\pi \cdot HR^2}{27}$.

Контрольні запитання

1. Як зміниться об'єм циліндра, якщо радіус його основи збільшиться в 5 разів?
2. З двох дерев'яних колод одна вдвічі товща за другу і вдвічі коротша від неї. Яка з них важча — коротка чи довга?
3. Площина проходить через вісь прямого кругового циліндра. Чи поділяє вона циліндр на рівновеликі частини?
4. Чи існують рівновеликі, але не рівні прямі кругові циліндри?
5. На столі стоїть наполовину заповнена рідиною закрита циліндрична посудина, висота якої H дорівнює діаметру основи. Чому дорівнює площа вільної поверхні рідини, якщо вісь посудини розміщена горизонтально?
6. Циліндричний бак висотою H і з радіусом R основи на третину заповнено рідиною. Чи поміститься ця рідина в цистерні тієї самої висоти і з удвічі меншим радіусом основи?
7. Яка площа поперечного перерізу сталевої рейки, якщо відома маса m одного погонного метра рейки і густина сталі ρ?

Графічні вправи

1. Знайдіть масу бетонної плити з наскрізними отворами, форма якої і розміри наведено на рис. 311, якщо густина бетону дорівнює ρ.
2. Деталь зроблено з металу, густина якого дорівнює 10 г/см^3. При обробці заготовки відходи становлять 1,5% металу. Знайдіть масу заготов-

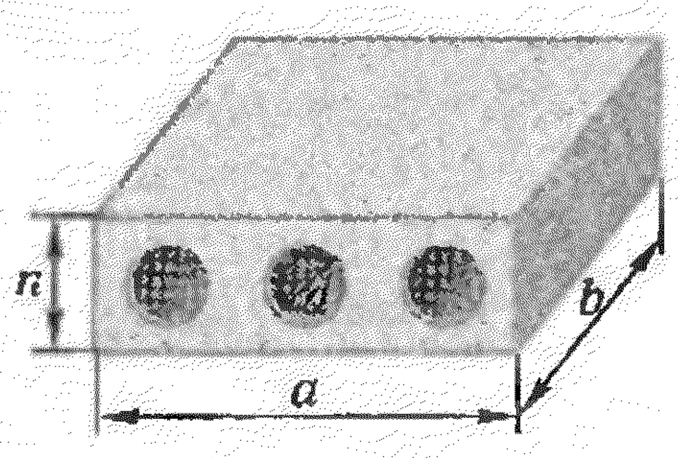
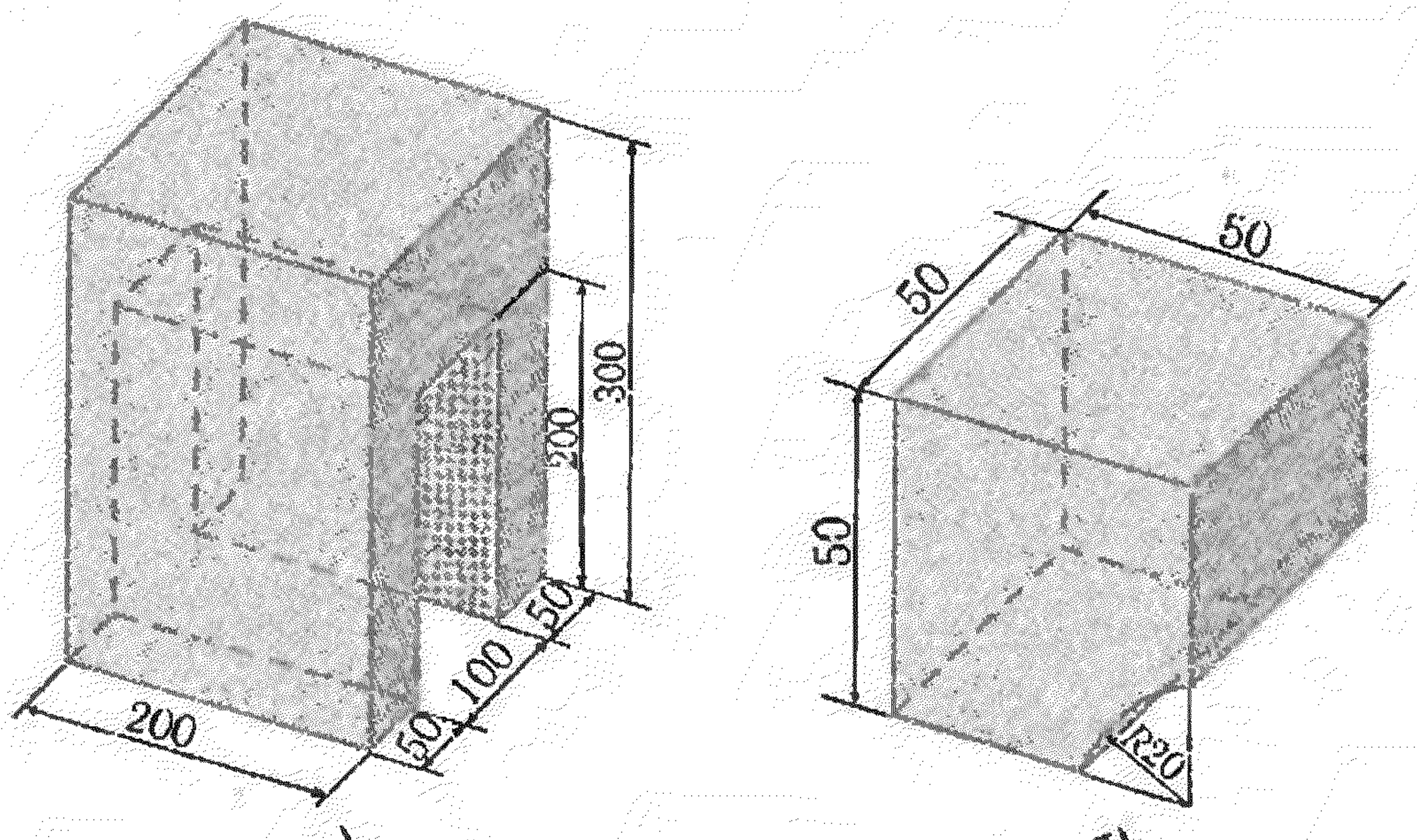


Рис. 311

ки, з якої зроблено деталь, яку зображено: 1) на рис. 312, а); 2) на рис. 312, б) (розміри подано в мм).



а) б)

Рис. 312

3. Знайдіть масу залізобетонної балки завдовжки 6 м, поперечний переріз якої зображено на рис. 313 (розміри подано в мм, $\rho = 4$ г/см^3).

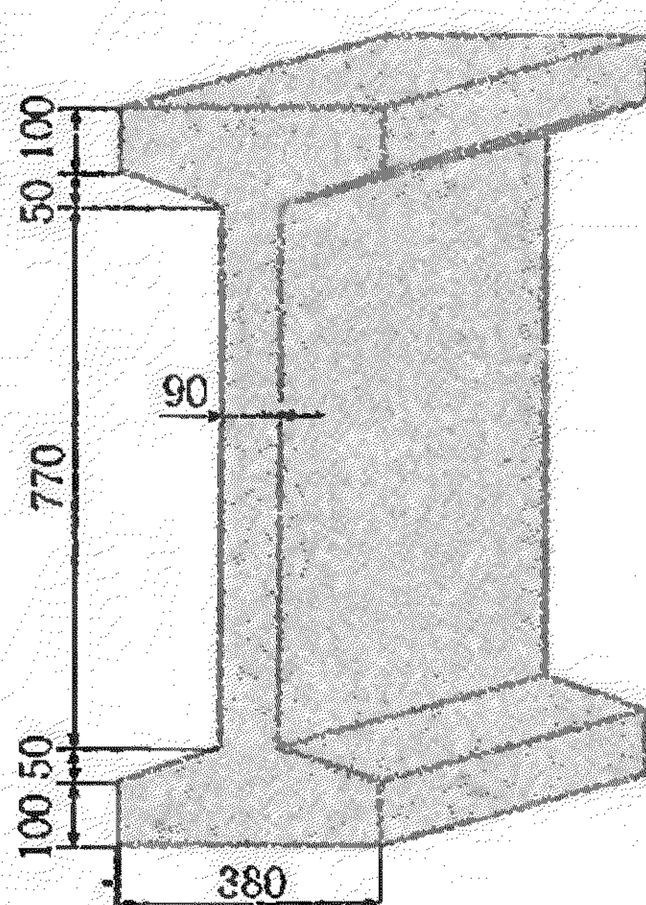


Рис. 313

4*. У схилі гори треба зробити виїмку для прокладання залізниці на ділянці, що піднімається під кутом φ до горизонту (рис. 314). Кут укосу боків виїмки α, ширина виїмки внизу b, глибина посередині h. Скільки кубічних метрів землі припадає на 1 лінійний метр виїмки?

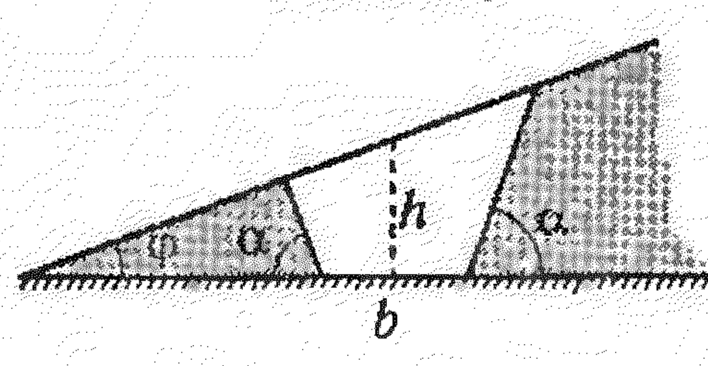


Рис. 314

Задачі

289. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть його об'єм, якщо:
1°) паралелепіпед прямокутний і довжина його діагоналі дорівнює 15 см;
2°) паралелепіпед прямокутний і діагональ меншої бічної грані дорівнює 5 см;
3) кут між сторонами основи дорівнює 45°, а відстань між меншими ребрами двох основ, що не належать одній грані, дорівнює 4 см;
4*) відстань між більшими сторонами основ, що не належать одній грані, дорівнює 7 см, а площа перерізу, що проходить через ці сторони, вдвічі більша від площі основи.

290. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо:
1) периметри трьох попарно суміжних його граней дорівнюють 6 см, 8 см, 10 см;
2) довжина діагоналі паралелепіпеда дорівнює 6 см, а його виміри відносяться, як 3:2:1;
3) відстані від центра симетрії паралелепіпеда до його ребер дорівнюють 7 см, 8 см, 9 см;
4*) діагональ паралелепіпеда дорівнює d і утворює з його основою кут α, а з однією із бічних граней — кут β.

291. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, якщо:
1°) всі ребра призми мають довжину $2\sqrt{3}$ см;
2°) радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а висота призми — 3 см;
3°) площа основи призми дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2, а її висота втричі більша від сторони основи;
4) діагональ бічної грані призми дорівнює a й утворює із площиною основи кут α;
5) радіус кола, вписаного в основу, дорівнює 1 см, а бічні грані є квадратами;
6) бічне ребро призми дорівнює висоті основи, а площа перерізу, що проходить через бічне ребро і висоту основи, дорівнює 12 см^2;
7*) сторона основи дорівнює a і відомо, що в призму можна вписати кулю.

292. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо:
1°) діагональ призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані — 12 см;
2) діагональ бічної грані дорівнює 8 см і утворює з діагоналлю суміжної бічної грані кут 60°;
3*) площа діагонального перерізу дорівнює S, а діаметр описаної кулі — d.

293. Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, якщо:
1°) всі ребра призми дорівнюють по 1 м;
2) сторона основи дорівнює 1 м і в призму можна вписати кулю;
3) найбільша діагональ призми дорівнює d і утворює із площиною основи кут α;
4*) переріз, що проходить через паралельні сторони двох основ, має площу S і нахилений до площини основи під кутом α.

294*. Знайдіть об'єм прямої призми, якщо:
1) в основі призми лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом при вершині α, а площа перерізу, що проходить через нерівну сторону однієї основи призми і протилежну вершину другої основи вдвічі більша від площі основи;
2) діагональ призми нахилена до основи під кутом β, а в основі призми лежить рівнобічна трапеція, в якої діагональ дорівнює a, а кут між діагоналлю і більшою основою дорівнює α;
3) в основі призми лежить ромб із гострим кутом α, а її більша діагональ має довжину l і нахилена до основи під кутом β;
4) в основі призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α, а бічне ребро призми має довжину l і складає з діагоналлю більшої бічної грані кут β.

---

295. Відрізок, що з'єднує центр верхньої основи прямого кругового циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює l і нахилений до основи під кутом φ. Обчисліть об'єм циліндра, якщо:
1°) $l = 6$ см, $\varphi = 30°$; 2°) $l = 8$ см, $\varphi = 60°$; 3) $l = 10$ см, $\varphi = 15°$.

296. Знайдіть об'єм прямого кругового циліндра, якщо:
1°) він має квадратний осьовий переріз із площею S;

2) він описаний навколо правильної чотирикутної призми зі стороною основи a і висотою h;
3*) він вписаний у кулю з радіусом R і має найбільший об'єм серед усіх циліндрів, вписаних у цю кулю;
4*) площина, що проходить через центр нижньої основи під кутом φ до основи, перетинає верхню основу по хорді, яка має довжину a і стягує дугу α.

297. У циліндричній цистерні з горизонтальною віссю вода займає $\frac{3}{4}$ її висоти. Довжина цистерни 4,8 м, діаметр – 1,4 м. Знайдіть об'єм води в цистерні.
298. Свинцева труба ($\rho = 11,4$ г/см^3) з товщиною стінки 4 мм має внутрішній діаметр 13 мм. Знайдіть масу 25 м труби.
299. 1,17 кг сталевого дроту діаметром 2,5 мм витягнули в дріт діаметром 1,5 мм. На скільки збільшилася довжина дроту ($\rho = 7,8$ г/см^3)?
300. Бетононасос переміщує 15 м^3 бетону за одну годину. З якою швидкістю бетон переміщається трубою з діаметром 15 см?
301. Правильна шестикутна чавунна ($\rho = 7,28$ г/см^3) призма висвердлена по осі. Її довжина 4,5 м, діаметр циліндричного отвору — 32 см, сторона основи — 32 см. Визначте масу призми.
302. Скільки циліндричних бочок заввишки 1,5 м і з діаметром основи 0,8 м потрібно мати, щоб перелити в них рідину з циліндричної цистерни, довжина якої 4,5 м і діаметр основи 1,6 м?
303. Скільки ящиків, що мають форму паралелепіпеда з розмірами $1,4 \times 1 \times 0,8$ (м), можна розмістити в контейнері такої самої форми, розміри якого становлять $2,4 \times 3,0 \times 4,2$ (м)?
304. Ціна діаманта пропорційна квадрату його об'єму. Як вигідніше продавати діамант: цілим чи розпиляним на частини?

Вправи для повторення

305. Обчисліть площу:
1) трикутника зі сторонами 3 см і 4 см і кутом 45° між ними;

2) паралелограма з діагоналями 10 см і 12 см і кутом 30° між ними;

3) рівнобічної трапеції з основами 4 см і 16 см і бічною стороною 10 см.

306. Обчисліть інтеграл: 1) $\int_0^2 dx$; 2) $\int_0^3 xdx$; 3) $\int_{-1}^1 (1-x^2)dx$.

307. Виразіть як функцію від x площу затушованої частини квадрата зі стороною 1 (рис. 315, а–в).

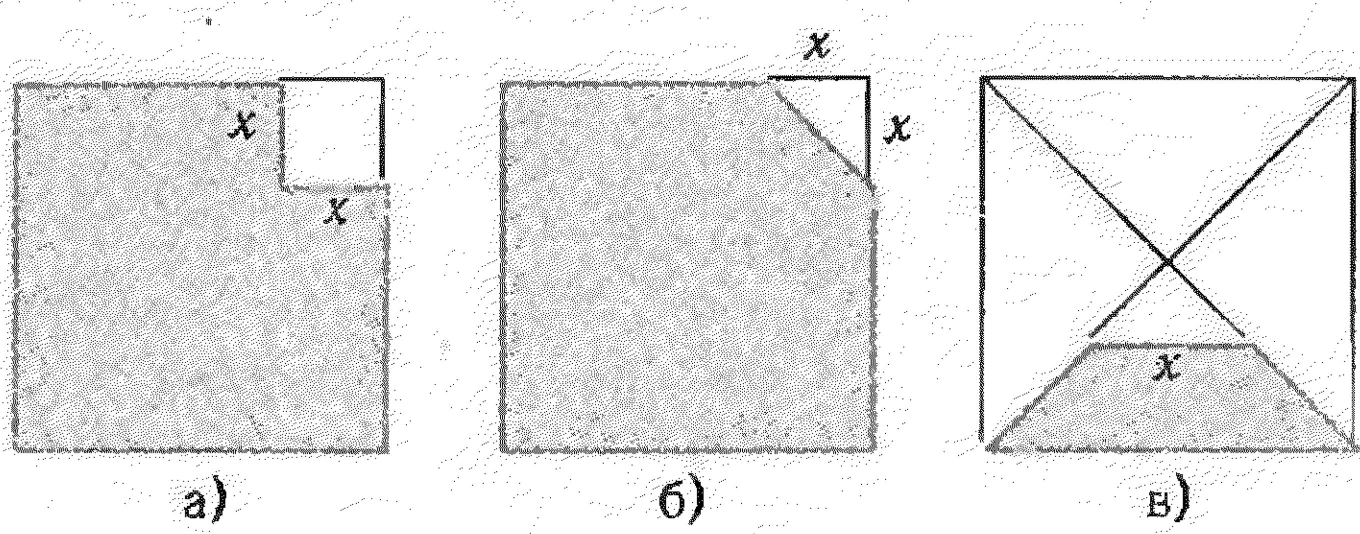


Рис. 315

Підсумок

Головні означення

Нехай тіла, які розглядаються, мають об'єм. Це означає, що для кожного з них визначена додатна величина — об'єм, яка має такі властивості:

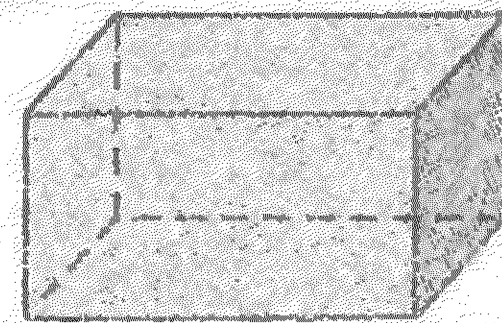
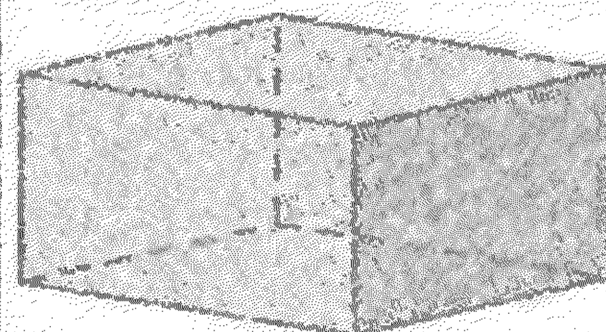
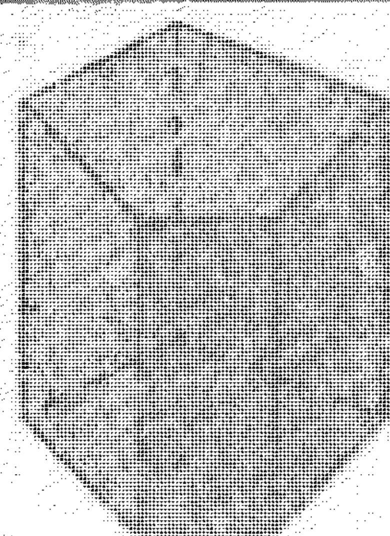
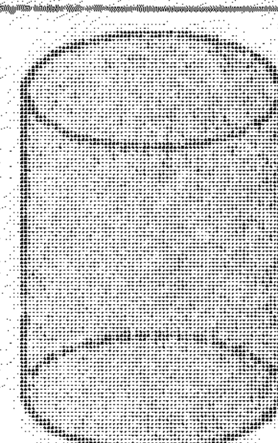
1) рівні тіла мають рівні об'єми;

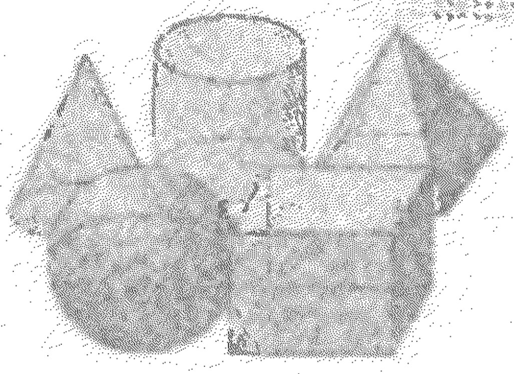
2) якщо тіло є об'єднанням кількох тіл, кожні два з яких не мають спільних внутрішніх точок, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів його складових;

3) об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Тіла, що мають рівні об'єми, називаються рівновеликими.

Головні формули об'ємів тіл

Тіло	Формула об'єму V	Позначення	Зображення
Прямокутний паралелепіпед	$V = abc$, або $V = SH$	a, b, c — виміри паралелепіпеда S — площа основи, H — висота	
Прямий паралелепіпед	$V = SH$	S — площа основи, H — висота	
Пряма призма	$V = SH$	S — площа основи, H — висота	
Прямий циліндр	$V = SH$	S — площа основи, H — висота	
Прямий круговий циліндр	$V = \pi R^2 H$	R – радіус основи, H – твірна	



§18. Об'єм тіла обертання

Ідея вичерпування, яку ми використовували в попередньому параграфі при обчисленні об'ємів, реалізується за допомогою формул, що містять інтеграл. Одну з таких формул розглянемо в цьому параграфі.

1. Об'єм тіла із заданими поперечними перерізами

Нехай потрібно обчислити об'єм тіла T. Оберемо у просторі вісь x і будемо перетинати тіло T площинами, перпендикулярними до осі x. Через $S(x)$ позначимо площу перерізу, що відповідає точці x (рис. 316). Проекцією тіла T на вісь є деякий відрізок, кінці якого позначимо через a і b.

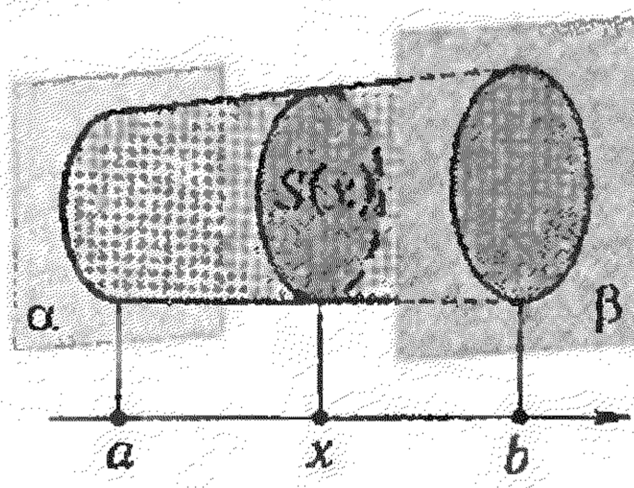


Рис. 316

Таким чином, маємо функцію $S = S(x)$, $x \in [a; b]$, значеннями якої є площі поперечних перерізів тіла. Природно цю функцію вважати неперервною.

Теорема 1 *(про об'єм тіла із заданими поперечними перерізами).*

Об'єм тіла із заданими поперечними перерізами $S = S(x)$, $x \in [a; b]$, обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

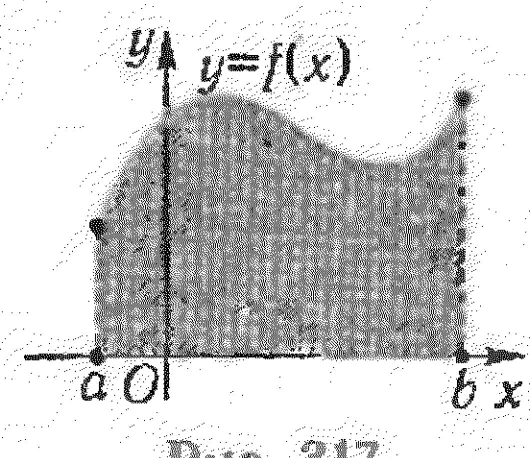


Рис. 317

Ідея доведення зводиться до розрізання тіла на тоненькі часточки — прошарки, наближеного обчислення об'єму кожної такої часточки і додавання цих об'ємів.

Неважко обчислити за формулою (1) об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x

криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 317).

Теорема 2 *(про об'єм тіла обертання)*

Об'єм тіла, одержаного внаслідок обертання навколо осі x криволінійної трапеції, обмеженої графіком невід'ємної неперервної на $[a; b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

☐ Перерізом одержаного тіла площиною, що проходить через точку x перпендикулярно до осі x, є круг з радіусом $f(x)$. Тому площа $S(x)$ цього перерізу дорівнює $\pi f^2(x)$. Підставивши цей вираз у формулу (1), отримаємо шукану формулу. ■

Доведена формула дає змогу обчислити об'єм відомих нам тіл обертання, зокрема, об'єм кулі.

Теорема 3 *(про об'єм кулі).*

Об'єм кулі з радіусом R обчислюється за формулою

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

☐ Розглянемо кулю, як тіло обертання півкруга навколо його діаметра. Можна вважати, що куля утворена обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$ (рис. 318), навколо осі x.

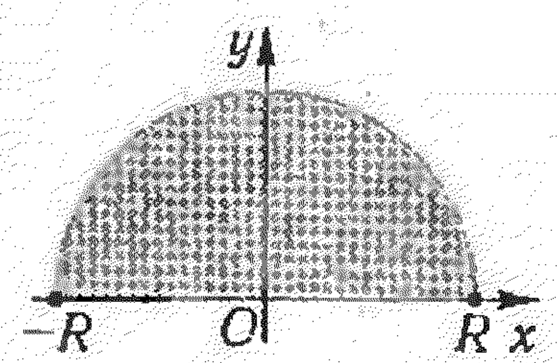


Рис. 318

Застосувавши теорему 2, маємо:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx =$$

$$= 2\pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3. \ ■$$

Приклад 1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням прямокутника зі сторонами довжиною a і b навколо осі, яка містить його сторону.

☐ Відповідь до цієї задачі нам відома, оскільки фігурою обертання буде прямий круговий циліндр з відомими висотою і радіу-

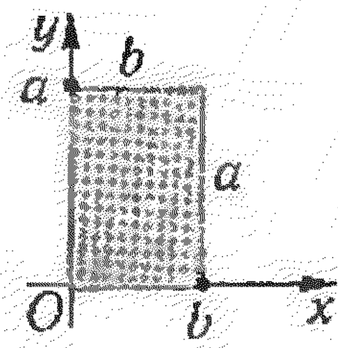


Рис. 319

сом основи. Одержимо цей самий результат за допомогою інтегральної формули.

Нехай прямокутник обертається навколо осі x, яка містить його сторону завдовжки b (рис. 319). Даний прямокутник в обраній системі координат обмежений графіком функції $y = a$ і прямими $x = 0$, $x = b$ і $y = 0$. Тому, за теоремою 2, шуканий об'єм V дорівнює

$$V = \pi\int_0^b a^2dx = \pi a^2 x\Big|_0^b = \pi a^2 b.$$

З точністю до позначень одержана формула збігається з очікуваною.

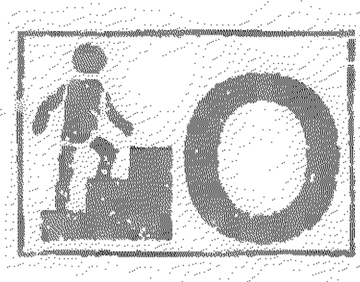
Приклад 2. Три металеві кулі з радіусами 4 см, 6 см і 8 см переплавлено в одну кулю. Обчислити її радіус.

☐ Природно припустити, що об'єм V утвореної кулі дорівнює сумі об'ємів даних куль. Отже,

$$V = \frac{4}{3}\pi\cdot 4^3 + \frac{4}{3}\pi\cdot 6^3 + \frac{4}{3}\pi\cdot 8^3 = 1056\pi \ (\text{см}^3).$$

Нехай радіус утвореної кулі R, тоді $\frac{4}{3}\pi\cdot R^3 = 1056\pi$. Звідси $R = \sqrt[3]{792} = 2\sqrt[3]{99} \approx 9{,}3$ (см). ■

Відповідь. ≈ 9,3 см.



Доведення теореми 1.

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних відрізків точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$. Через ці точки проведемо площини, перпендикулярні до осі x. Ці площини розбивають дане тіло на n прошарків: $T_1, T_2, ..., T_n$, що містяться між сусідніми перерізами (рис. 320). Кожен з таких прошарків можна наближено вважати циліндром, якщо значення n — достатньо велике, і, відповідно, товщина кожного прошарку є малою.

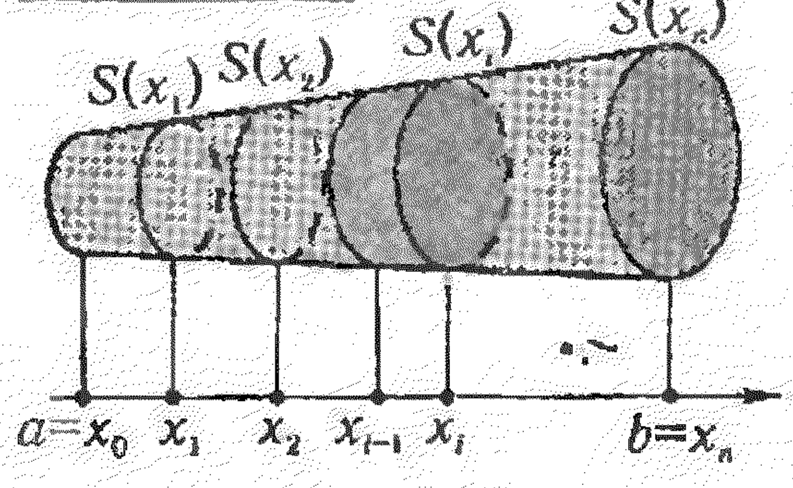


Рис. 320

У цьому разі можна вважати, що для тіла T_i площа основи відповідного циліндра дорівнює $S(x_i)$. Таким чином, маємо наближену рівність

$$V(T_1) \approx S(x_1) \cdot \frac{b-a}{n} = S(x_1) \cdot \Delta x,$$

де $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Зрозуміло, що при збільшенні n рівність стає більш точною. Із властивостей об'ємів випливає, що

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) + \ldots + V(T_n) \approx S(x_1) \cdot \Delta x + S(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + S(x_n) \cdot \Delta x =$$

$$= \left(S(x_1) + S(x_2) + \ldots + S(x_n)\right) \cdot \Delta x.$$

Права частина цієї рівності є інтегральною сумою для функції $S = S(x)$, $x \in [a; b]$. При збільшенні n вона прямує до інтеграла від функції $S = S(x)$ на проміжку $[a; b]$:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\left(S(x_1) + S(x_2) + \ldots + S(x_n)\right) \cdot \Delta x\right) = \int_a^b S(x)dx.$$

На підставі геометричних міркувань природно вважати, що при збільшенні n стає точнішою наближена рівність

$$V(T) \approx \left(S(x_1) + S(x_2) + \ldots + S(x_n)\right) \cdot \Delta x,$$

тобто

$$V(T) = \lim_{n \to \infty}\left(\left(S(x_1) + S(x_2) + \ldots + S(x_n)\right) \cdot \Delta x\right).$$

Тому справджується формула (1). ■

Скористаємось доведеною формулою для обчислення об'єму похилого циліндра, зокрема, похилої призми.

Теорема 4

(про об'єм похилого циліндра).

Об'єм похилого циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту:

$$V = S \cdot H,$$

де S — площа основи циліндра, H — його висота.

□ Проведемо вісь x через довільну точку O нижньої основи циліндра перпендикулярно до неї (рис. 321), і нехай O — початок координат. Тоді будь-який переріз циліндра площиною, перпендикулярною до осі x, буде рівним основі (доведіть це!). Тому функція $S(x)$ для всіх x набуває одного і того самого значення, яке

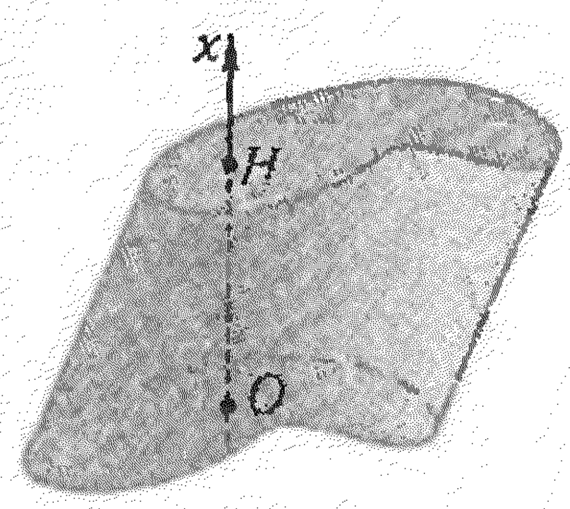


Рис. 321

дорівнює площі основи: $S(x) = S$. Величина x змінюється від 0 до H. За формулою (1), при $a = 0$, $b = H$ маємо

$$V = \int_0^H S dx = Sx\Big|_0^H = SH. \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти об'єм кульового сегмента.

□ Кульовий сегмент можна одержати внаслідок обертання сегмента навколо прямої, що перпендикулярна до хорди сегмента і проходить через її середину. Якщо вибрати систему координат, як це зображено на рис. 322, а), і позначити радіус кульового сегмента через R, а його висоту — через H, то обчислення шуканого об'єму зведеться до обчислення інтеграла:

$$V = \pi \int_{R-H}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R} =$$

$$= \pi\left(\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2(R-H) - \frac{(R-H)^3}{3}\right)\right) = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

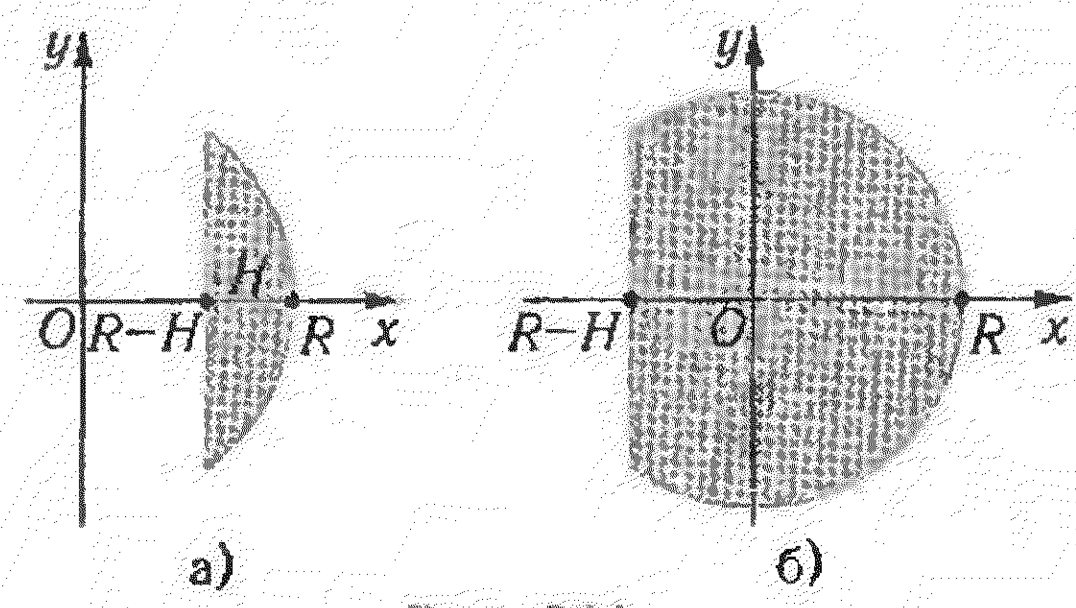


Рис. 322

Висота H кульового сегмента може бути і більшою від R (рис. 322, б). В даному випадку це не має значення. $\blacksquare$

Відповідь. $\pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$.

Приклад 4. Знайти об'єм кулі, вписаної:

1) в куб із ребром a;
2) у прямий круговий циліндр із радіусом основи R і висотою $2R$;
3) у правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а висота — H.

□ 1) Радіус кулі, вписаної в куб із ребром a, дорівнює $\frac{a}{2}$, тому її об'єм V дорівнює: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi \cdot a^3}{6}$.

2) Радіус кулі, вписаної у такий циліндр, дорівнює R, тому $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

3) Для розв'язання цієї задачі зручно скористатися перерізом піраміди, який проходить через її вершину і точки дотику кулі до протилежних граней піраміди. Оскільки точки дотику кулі належать апофемам, то площина перерізу проходить через середини протилежних ребер основи і центр кулі. Тому перерізом піраміди є рівнобедрений трикутник ASB з основою $AB = a$ і висотою $H = SC$. Перерізом кулі є круг, вписаний у цей трикутник (рис. 323). Таким чином, задача зводиться до обчислення радіуса цього круга.

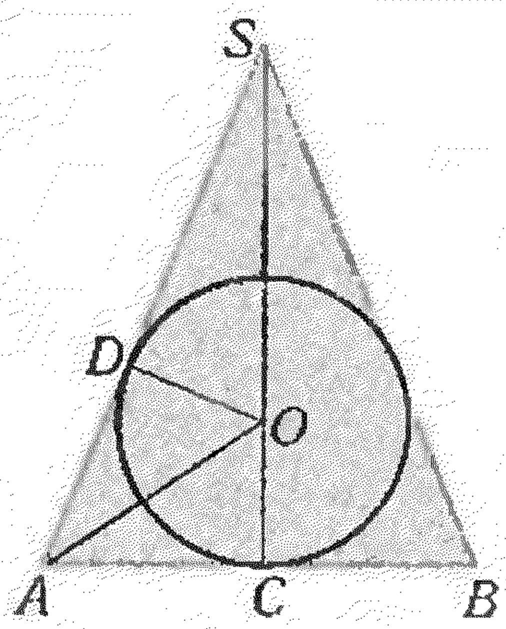


Рис. 323

Нехай D — точка дотику круга до бічної сторони AS. З подібності трикутників SAC і SOD маємо: $\frac{SA}{SO} = \frac{AC}{OD}$. Нехай радіус круга дорівнює r, тоді $OD = OC = r$, $SO = H - r$, $AC = \frac{a}{2}$. З прямокутного трикутника ASC маємо: $SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + H^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4H^2}}{2}$. Підставивши ці значення у наведену пропорцію, одержимо рівняння відносно r: $\frac{\sqrt{a^2 + 4H^2}}{2(H - r)} = \frac{a}{2r}$. Розв'язавши його, знайдемо шуканий радіус кулі: $r = \frac{aH}{a + \sqrt{a^2 + 4H^2}}$.

Тоді шуканий об'єм дорівнює $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{aH}{a + \sqrt{a^2 + 4H^2}}\right)^3$. ■

Відповідь. 1) $\frac{\pi \cdot a^3}{6}$; 2) $\frac{4}{3}\pi \cdot R^3$; 3) $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{aH}{a + \sqrt{a^2 + 4H^2}}\right)^3$.

Контрольні запитання

1°. Як обчислити об'єм стовпчика, складеного з 23 монет?

2°. Як обчислити об'єм соснової колоди довжиною: а) 1 м; б) 10 м?

3. Каркасну модель похилої трикутної призми перетворили на пряму. Чи зміниться при цьому об'єм призми?
4. Чи зміниться об'єм призми, якщо її верхню основу паралельно змістити відносно попереднього положення в площині цієї основи?
5°. Як зміниться об'єм кулі, якщо її радіус зменшити втричі?
6°. Чи збільшиться вдвічі об'єм кулі, якщо її діаметр збільшити вдвічі?
7. Чи можна у циліндр, об'єм якого дорівнює 2, розмістити кулю, що має вдвічі менший об'єм?
8. Чи можна в кулю з об'ємом 3 см^3 помістити куб з ребром 1 см?
9. Чому дорівнює відношення об'єму кулі, описаної навколо куба, до об'єму кулі, вписаної в цей куб?
10. Що б ви вибрали: удвох з'їсти кавун з радіусом 10 см, чи вдесятьох — кавун, радіус якого складає 20 см?
11. Як обчислити радіус металевої кульки, скориставшись лінійкою і прозорою циліндричною посудиною з водою?

2. Об'єм піраміди і конуса

Формула для обчислення об'ємів тіл за площами його поперечних перерізів дає змогу обчислювати також об'єми конусів. У цьому випадку її використання ґрунтується на властивостях перерізів конуса, паралельних основі.

Теорема 5 *(про об'єм конуса).*

Об'єм конуса дорівнює одній третій добутку площі основи на висоту:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

де S — площа основи конуса; H — висота.

Доведення теореми буде наведено нижче.

Для прямого кругового конуса наведена формула набуває вигляду

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

де R — радіус основи конуса, а H — його висота.

Нагадаємо, що піраміди є одним із видів конусів. Тому в теоремі 5 подано формулу також для обчислення об'ємів пірамід.

Приклад 5. Висота прямого кругового конуса дорівнює H, а кут при вершині осьового перерізу — α. Знайти об'єм конуса.

☐ Для розв'язання задачі можна обмежитись зображенням осьового перерізу (рис. 324). За умовою, $SO = H$, $\angle ASB = \alpha$. Оскільки SO є бісектрисою кута ASB, то $\angle ASO = \frac{\alpha}{2}$. Тоді радіус основи $r = OA$ знайдемо з прямокутного трикутника ASO : $AO = SO \cdot \operatorname{tg} \angle ASO = H \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

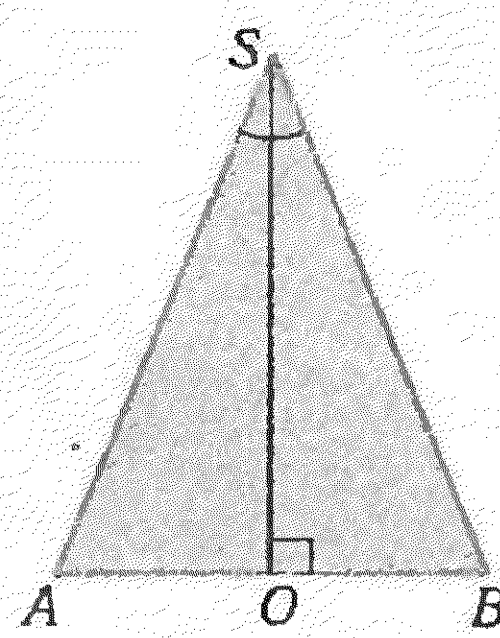


Рис. 324

Отже,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(H \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 H = \frac{1}{3}\pi H^3 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$ ■

Відповідь. $\frac{1}{3}\pi H^3 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

Приклад 6. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічне ребро — 9 см. Знайти об'єм піраміди.

☐ На рис. 325 подано зображення піраміди $SABCD$, де SO — її висота. Для розв'язання задачі необхідно знайти висоту піраміди. Оскільки AO — половина діагоналі квадрата зі стороною 8 см, то: $AO = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (см). З прямокутного трикутника SAO, за теоремою Піфагора, маємо:

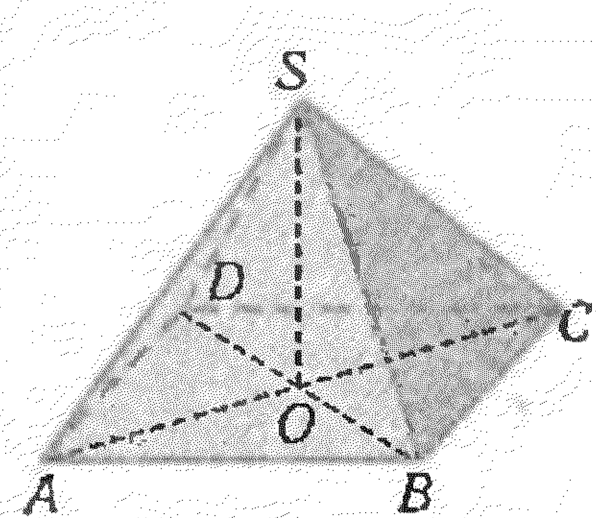


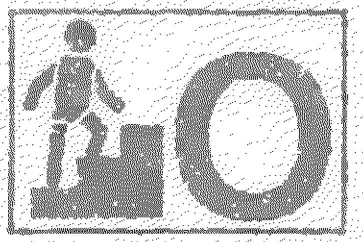
Рис. 325

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 7 \text{ (см)}.$$

Таким чином,

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 7 = 149\frac{1}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $149\frac{1}{3}$ см^3.



Доведення теореми 5.

□ Розглянемо довільний конус. Вісь x проведемо перпендикулярно до площини основи через його вершину, яку й візьмемо за початок координат. Виберемо напрям осі від вершини конуса до площини основи (рис. 326). Тоді площина основи перетинає вісь у точці $x = H$, де H — висота конуса. Обчислимо площу перерізу $S(x)$, $x \in [0; H]$. Оскільки площина перерізу перпендикулярна до осі x, то вона паралельна площині основи конуса (чому?). Тому, згідно з теоремою про властивості перерізів, паралельних основі (§ 12), маємо:

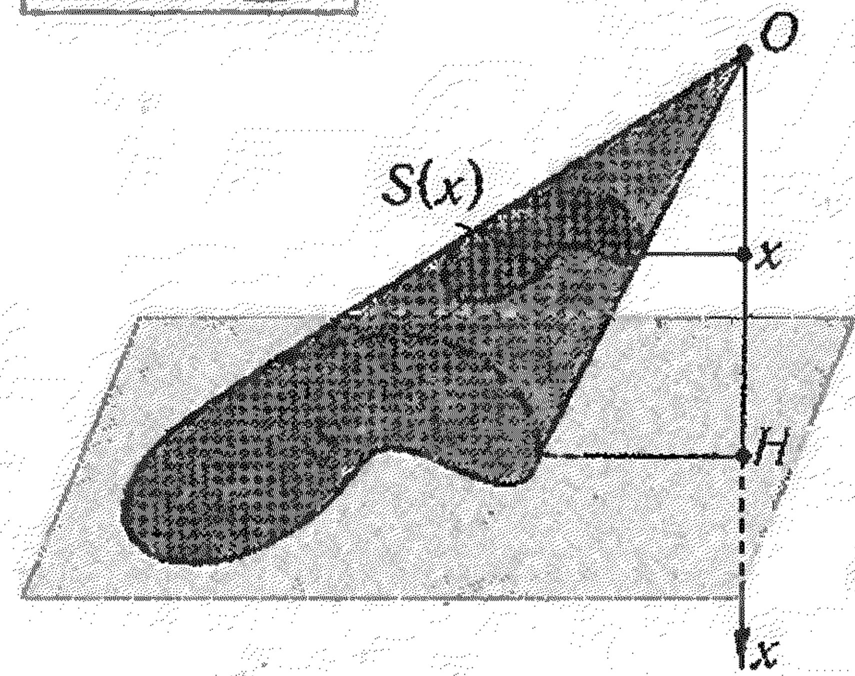


Рис. 326

$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2, \text{ тобто } S(x) = \frac{S}{H^2}x^2.$$

Обчислюємо об'єм конуса, скориставшись інтегральною формулою (1) п. 1:

$$V = \int_0^H S(x)dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}SH. \blacksquare$$

Теорема 6 *(про об'єм зрізаного конуса).*

Об'єм зрізаного конуса, площі основ якого дорівнюють S і s, а висота дорівнює H, обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3}\left(S + \sqrt{Ss} + s\right)H.$$

□ Добудуємо даний зрізаний конус до повного (рис. 327). Нехай його висота дорівнює $H + h$, а площа основи — S. Побудуємо координатну вісь x так, як ми її будували при доведенні теореми 5. Подальші міркування також аналогічні наведеним у теоремі 5. Функція $S(x)$ має такий самий вигляд — змінилася тільки її область визначення. У даному випадку $x \in [h; H + h]$. Отже,

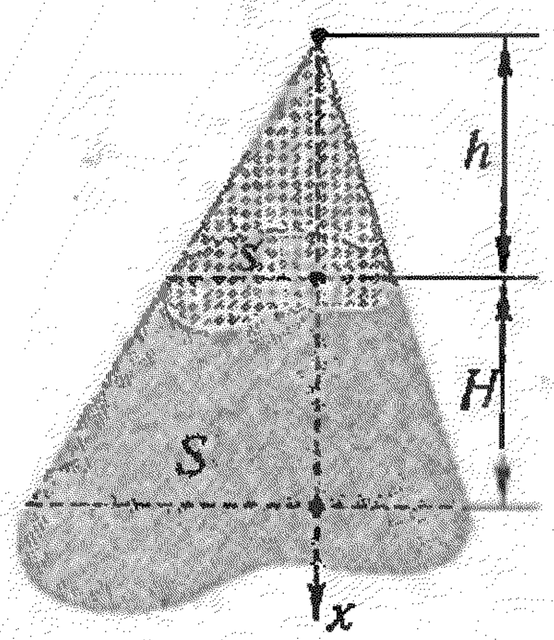


Рис. 327

$$V=\int_h^{H+h}S(x)dx=\frac{S}{(H+h)^2}\int_h^{H+h}x^2dx=\frac{S}{(H+h)^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_h^{H+h}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{S}{(H+h)^2}\left((H+h)^3-h^3\right)=\frac{1}{3}\frac{SH}{(H+h)^2}\left((H+h)^2+(H+h)h+h^2\right).$$

Оскільки основи зрізаного конуса паралельні, то скориставшись властивістю перерізу конуса, паралельного основі (теорема 3 §12), матимемо:

$$\frac{s}{S}=\frac{h^2}{(H+h)^2}.$$

Відтак вираз для V можна записати у вигляді:

$$V=\frac{1}{3}SH\left(1+\frac{h}{H+h}+\frac{h^2}{(H+h)^2}\right)=\frac{1}{3}SH\left(1+\sqrt{\frac{s}{S}}+\frac{s}{S}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}H\left(S+\sqrt{S\cdot s}+s\right).\ \blacksquare$$

При доведенні теореми 6 можна об'єм V зрізаного конуса подати у вигляді різниці об'ємів "повних" конусів з основами, що співпадають з основами зрізаного конуса (їхні площі відповідно S і s), і висотами $H+h$ і h відповідно. Тоді $V=\frac{1}{3}S(H+h)-\frac{1}{3}sh$, і після перетворень, аналогічних наведеним вище, одержимо шукану формулу.

Приклад 7. Знайти об'єм кульового сектора.

☐ Розглянемо спочатку випадок, коли кульовий сектор складається з кульового сегмента заввишки H і конуса, вершина якого збігається з центром кулі, а основою є основа сегмента (рис. 328). Якщо R — радіус кулі, то висота конуса дорівнює $R-H$, а радіус основи $r=\sqrt{R^2-(R-H)^2}$. Об'єм кульового сектора знаходимо, скориставшись формулами для обчислення об'єму кульового сегмента (приклад 3) і конуса (теорема 5):

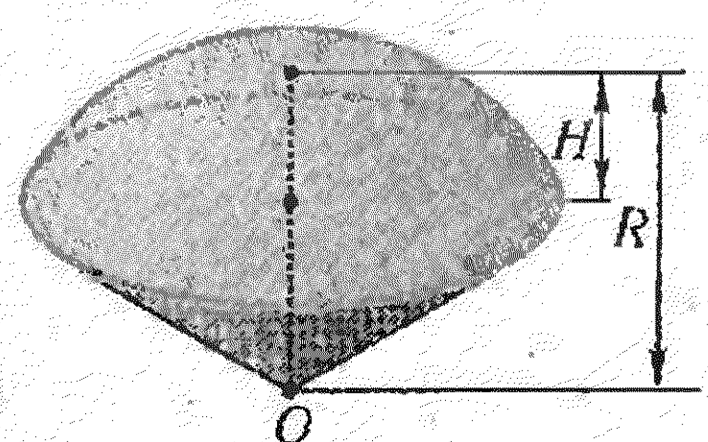


Рис. 328

$$V=\pi\left(R-\frac{H}{3}\right)H^2+\frac{1}{3}\pi\left(R^2-(R-H^2\right)(R-H)=$$

$$= \pi H^2 R - \frac{\pi H^3}{3} + \frac{1}{3}\pi H(2R - H)(R - H) = \frac{2}{3}\pi R^2 H .$$

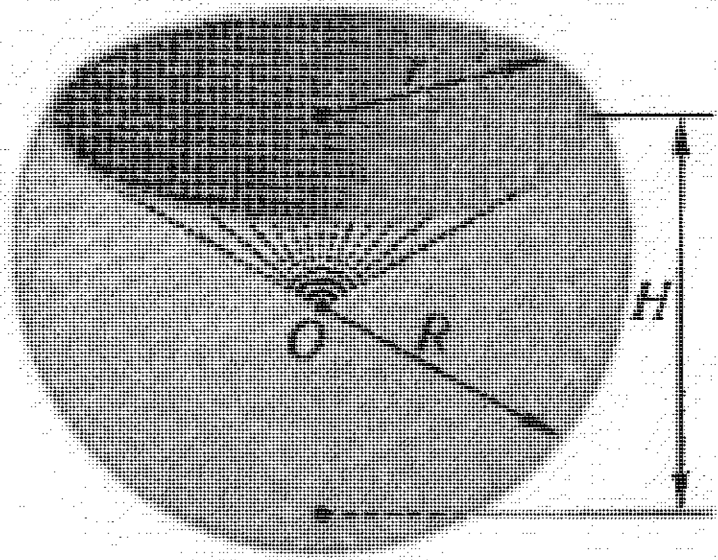


Рис. 329

Аналогічно розглядається випадок, коли кульовий сектор є результатом вилучення конуса з кульового сегмента (рис. 329). Цікаво те, що формула для обчислення об'єму зберігає свій вигляд, тобто

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H ,$$

де H — висота відповідного кульового сегмента. ■

Відповідь. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Контрольні запитання

1°. Чи рівні об'єми тіл, утворених у результаті перерізу прямого кругового конуса площиною, що проходить через його вісь?

2. Правильна чотирикутна піраміда перерізана площиною, що проходить через її висоту. Чи рівні об'єми одержаних пірамід?

3°. У скільки разів зменшиться об'єм прямого кругового конуса, якщо радіус його основи зменшити втричі?

4°. Чи збільшиться вдвічі об'єм прямого кругового конуса, якщо збільшити вдвічі діаметр його основи?

5. Чи зміниться об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо сторони її основи збільшити вдвічі, а висоту зменшити в чотири рази?

6°. Чи мають рівновеликі піраміди з рівними висотами рівновеликі основи?

7. Призма і піраміда мають спільну основу, а висота призми — вдвічі менша за висоту піраміди. Об'єм якого тіла більший?

8°. Чи рівні об'єми конусів, основи яких збігаються з однією основою даного циліндра, а вершини належать другій основі?

9. Як провести переріз у конусі, щоб одержати конус, об'єм якого вдвічі менший від об'єму даного конуса?

10. Чи завжди куб з об'ємом 1 см^3 можна помістити в прямий круговий конус з об'ємом 1000 см^3?

11. У кулю вписано прямий круговий конус так, що його основою слугує великий круг кулі. У скільки разів об'єм кулі більший від об'єму конуса?
12. Які вимірювання й обчислення доцільно зробити, щоб знайти масу купи щебеню, яка має форму конуса?
13. Деталь, що має форму правильної чотирикутної піраміди, утворює виступ над корпусом. Вершина деталі недоступна. Які вимірювання потрібно зробити, щоб визначити об'єм піраміди?
14. Рідину, що міститься в циліндричній склянці, діаметр основи якої дорівнює 6 см, а висота — 9 см, треба перелити у конічну посудину висотою 11 см і з діаметром основи 9 см. Чи поміститься рідина у конічній посудині?

Графічні вправи

1. Знайдіть об'єм рідини в посудині, яка зображена на рис. 330.
2. Знайдіть об'єм прямого кругового циліндра за:
   1) його осьовим перерізом, зображеним на рис.331;
   2) його розгорткою, зображеною на рис 332.

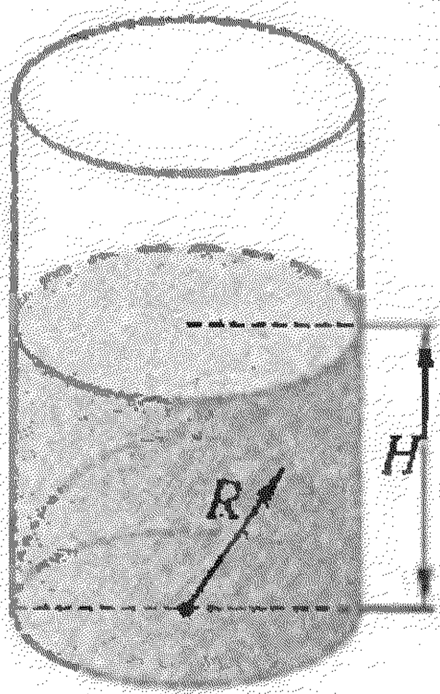


Рис. 330

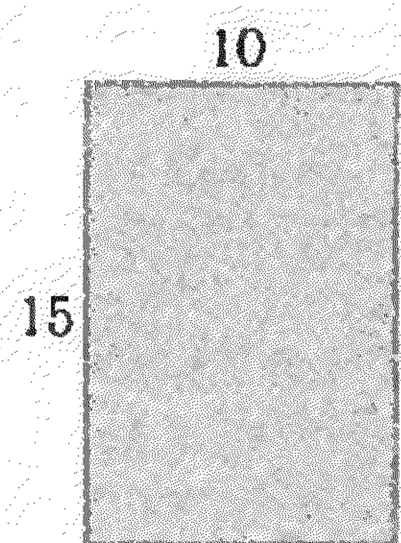


Рис. 331

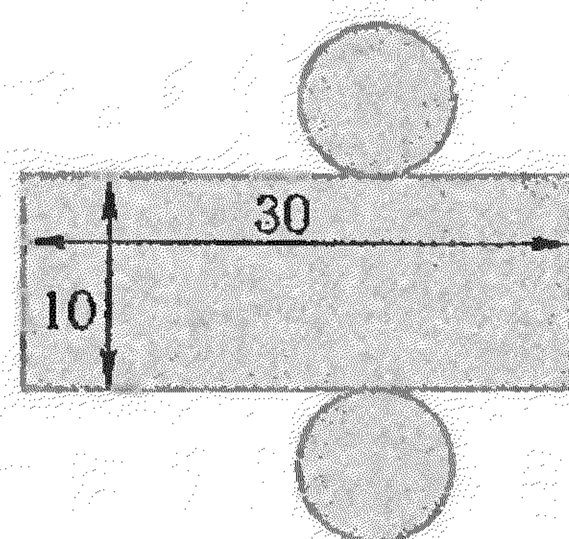


Рис. 332

3. Знайдіть об'єм прямого кругового конуса за:
   1) його осьовим перерізом, зображеним на рис. 333;
   2) розгорткою його бічної поверхні, зображеною на рис 334.

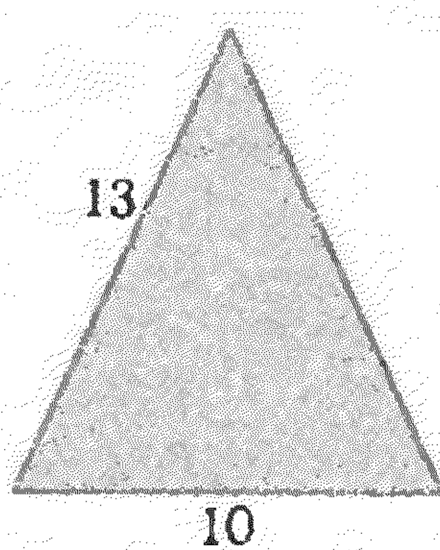


Рис. 333

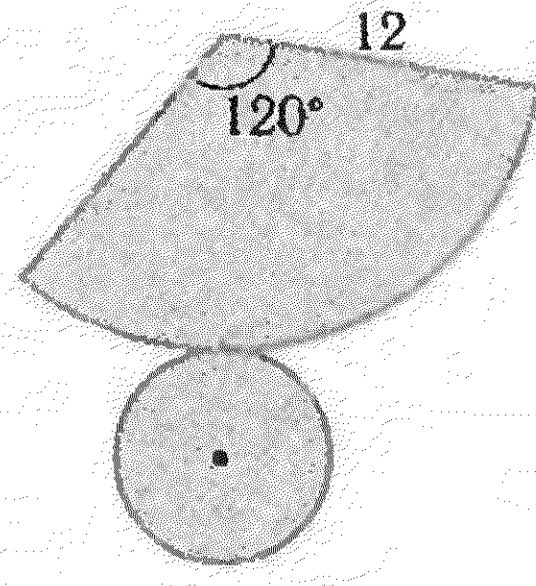


Рис. 334

4. Знайдіть об'єм прямого кругового зрізаного конуса за:
1) його осьовим перерізом, зображеним на рис. 335;
2) розгорткою його бічної поверхні, зображеною на рис. 336.

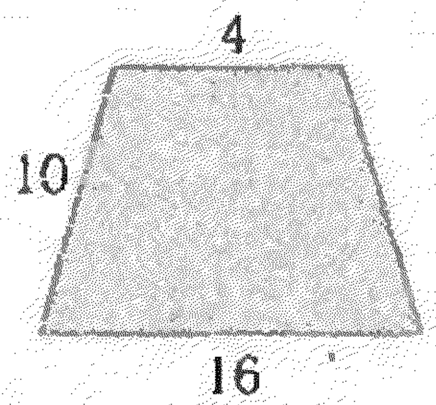


Рис. 335

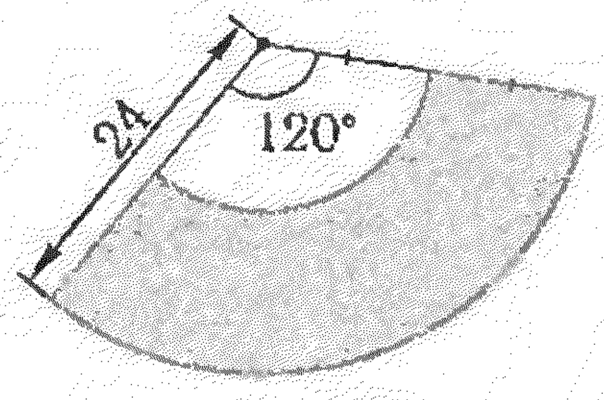


Рис. 336

Задачі

308. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x криволінійної трапеції, обмеженої лініями:
1°) $y = R$, $x \in [0; H]$, $x = 0$, $x = H$, $y = 0$;
2) $y = kx$, $x \in [0; H]$, $x = 0$, $x = H$, $y = 0$;
3) $y = x^2$, $x \in [0; 1]$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

309°. Знайдіть об'єм кулі, якщо площа її перерізу, що знаходиться від центра на відстані 4 см, дорівнює 9π см^2.

310°. Зовнішній діаметр порожнистої чавунної кулі дорівнює 8 см, а внутрішній — 4 см. Знайдіть масу цієї кулі, якщо густина чавуну дорівнює 7300 кг/м^3.

311. Резервуар для води складається з півкулі, радіус якої дорівнює 14 дм, і циліндра, основа якого має такий самий радіус. Яку висоту має циліндрична частина, якщо резервуар містить 12 000 л води?

312. З прямого кругового циліндра вирізали півкулю, основа якої збігається з основою циліндра. Радіус півкулі дорівнює 2 см, площа осьового перерізу циліндра — 64 см^2. Знайдіть об'єм утвореного тіла.

313. Чавунний зливок має форму двох куль, з'єднаних циліндричним стержнем. Діаметри куль 12 см, відстань між центрами — 30 см, діаметр циліндричного стержня — 4 см. Визначте масу зливка ($\rho = 7{,}2$ г/см^3).

314. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною a. Одне з бічних ребер дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

315. Знайдіть об'єм похилої трикутної призми, якщо в її основі лежить:
1°) правильний трикутник зі стороною 4 см, а бічне ребро дорівнює 6 см і нахилене до площини основи під кутом 30°;
2) рівнобедрений прямокутний трикутник із катетом a, бічне ребро, що проходить через вершину прямого кута основи, дорівнює l і нахилене до суміжних сторін основи під кутом α;
3) рівнобедрений прямокутний трикутник із катетом a, бічне ребро, що проходить через вершину цього трикутника, віддалене на h від протилежної грані і дорівнює l.

316. Доведіть, що об'єм похилої призми дорівнює добутку довжини бічного ребра на площу перерізу, який перпендикулярний до бічного ребра і перетинає всі бічні ребра.

317. Обчисліть об'єм похилої трикутної призми, довжина бічного ребра якої дорівнює l, ортогональний до бічного ребра переріз є ромбом зі стороною c, а кут між суміжними бічними гранями дорівнює α.

---

318. Твірна прямого кругового конуса дорівнює 6 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть:
1°) об'єм конуса;
2°) діаметр кулі, рівновеликої конусу;
3) об'єм правильної чотирикутної піраміди, вписаної в конус;
4) об'єм вписаного в даний конус прямого кругового циліндра, висота якого дорівнює 3 см;
5*) об'єм кулі, вписаної в конус;
6*) об'єм кулі, описаної навколо конуса.

319. Твірна прямого кругового конуса дорівнює l, а кут при вершині осьового перерізу — α. Знайдіть:
1°) об'єм конуса;
2°) діаметр кулі, рівновеликої конусу, якщо $l = 6$ см, $\alpha = 90°$;
3) об'єм правильної трикутної піраміди, вписаної в конус;
4*) об'єм кулі, вписаної в конус;
5) об'єм кулі, описаної навколо конуса.

320. Купа піску має форму конуса, довжина кола основи якої дорівнює 25 м, а довжина твірної — 5 м. Скільки ходок тритонної машини потрібно для його перевезення, якщо маса 1 м^3 піску дорівнює 2 т?

321. Скільки тонн породи містить терикон конічної форми з твірною 0,2 км, якщо кут його схилу дорівнює 46°, а густина породи — 2 т/м³?

322. Рідина, яка заповнює конічну посудину висотою 0,18 м і з діаметром основи 0,24 м, переливається в циліндричну посудину з діаметром основи 0,1 м. Як високо буде знаходитись рівень поверхні рідини в циліндричній посудині?

323. Копиця сіна має форму прямого кругового циліндра з конічним верхом. Довжина кола основи циліндра дорівнює 20,5 м, висота копиці — 4 м, а висота її циліндричної частини — 2,2 м. Знайдіть масу сіна, якщо його густина 0,03 г/см³.

324*. З паперового круга, радіус якого дорівнює 8 см, вирізали фігуру, що має форму сектора з центральним кутом $\frac{2\pi}{3}$. З решти круга зробили лійку. Знайдіть її місткість.

---

325. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічне ребро — 9 см. Визначте:
1°) об'єм піраміди;
2°) радіус кулі, рівновеликої даній піраміді;
3) об'єм зрізаної піраміди, яку дістали при перерізі даної піраміди площиною, що паралельна основі і поділяє висоту у відношенні 1:3, якщо рахувати від вершини;
4) на якій відстані від вершини слід провести площину, паралельну основі, щоб поділити піраміду на дві рівновеликі частини.

326. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b, а кут при основі бічної грані дорівнює α. Знайдіть:
1°) об'єм піраміди;
2°) об'єм прямого кругового конуса, вписаного в піраміду;
3) відношення об'ємів вписаного в піраміду прямого кругового конуса й описаного навколо неї прямого кругового конуса;
4*) об'єм зрізаної піраміди, одержаної проведенням через центр основи даної піраміди січної площини, паралельної бічній грані.

327. Основою піраміди є прямокутник, сторони якого дорівнюють 6 см і 8 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Бічне ребро дорівнює 13 см. Знайдіть:
1°) об'єм піраміди;

2°) висоту рівновеликої даній піраміді правильної чотирикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 4 см;
3) об'єм зрізаної піраміди, яку одержали внаслідок перерізу даної піраміди площиною, паралельною основі і розміщеною на відстані 9 см від неї;
4) відстань від вершини піраміди до площини, яка паралельна її основі і поділяє піраміду на дві рівновеликі частини.

328. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням:
1) рівностороннього трикутника навколо сторони, довжина якої дорівнює $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ см;
2) рівностороннього трикутника зі стороною 6 см навколо осі, що проходить через вершину трикутника паралельно протилежній стороні;
3) ромба з діагоналями $\sqrt{15}$ см і $\frac{60}{\pi}$ см навколо більшої діагоналі;
4) прямокутного трикутника з катетом 6 см і протилежним кутом 30° навколо гіпотенузи;
5) трапеції з основами 6 см і 12 см, висотою 6 см і гострими кутами при більшій основі навколо меншої основи;
6) рівнобедреного трикутника з основою 12 см і кутом при вершині 120° навколо середньої лінії, паралельної основі.

Вправи для повторення

329. Побудуйте розгортку поверхні:
1) прямого кругового циліндра заввишки 3 см і з діаметром основи 5 см;
2) прямого кругового конуса, довжина твірної якого дорівнює 4 см, а радіус основи — 2 см.

330. Як виміряти площу фігури, зображеної на рис. 337? Чому вона дорівнює?

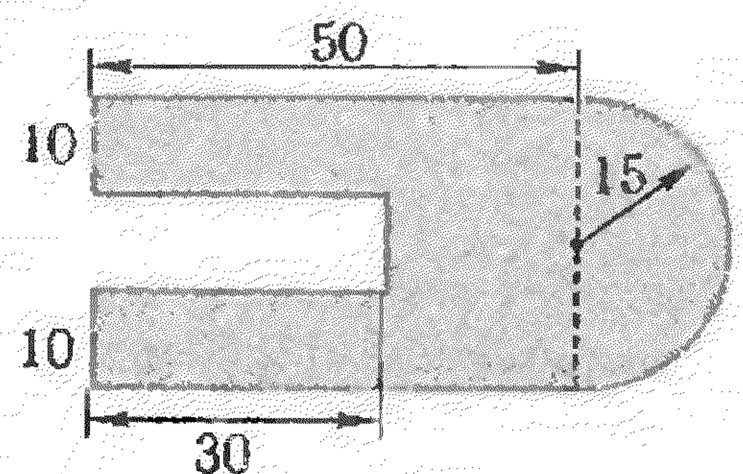


Рис. 337

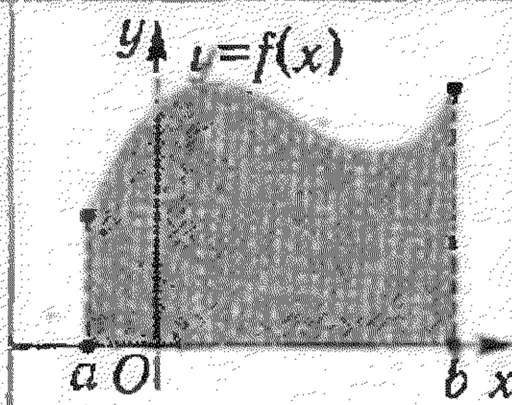
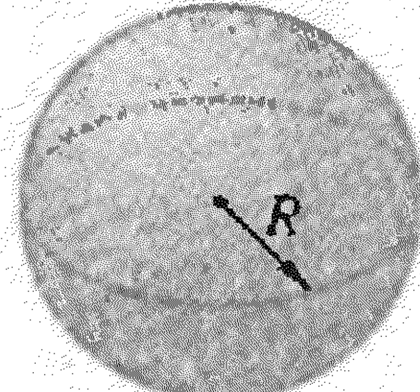
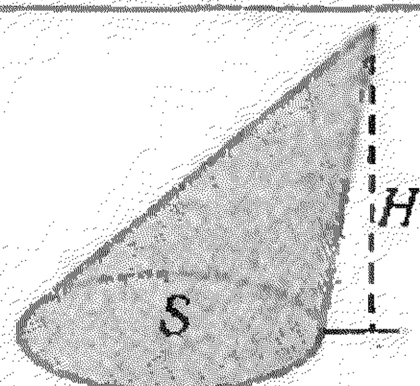
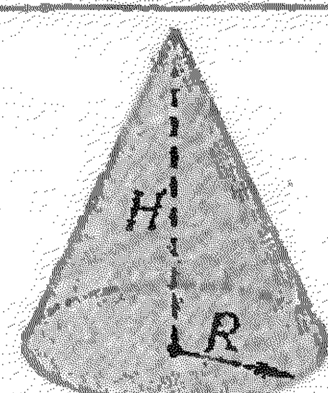
Підсумок

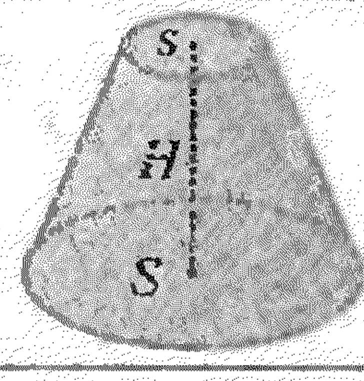
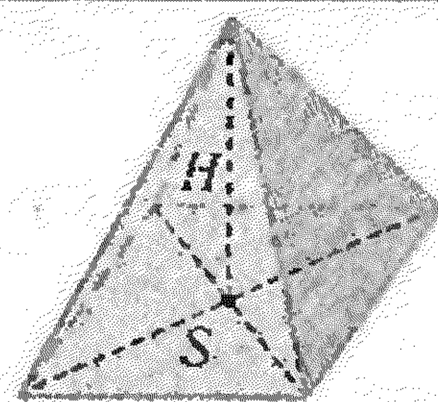
Головне твердження

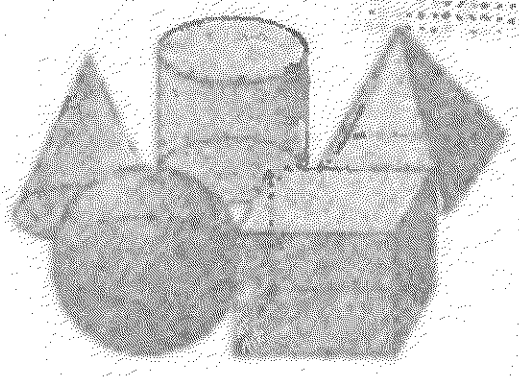
Об'єм тіла із заданими поперечними перерізами $S = S(x)$, $x \in [a; b]$, обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Формули для обчислення об'ємів тіл, які випливають із цього твердження

Тіло	Формула об'єму	Позначення	Зображення
Тіло, одержане обертанням навколо осі x криволінійної трапеції	$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$		
Куля	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	R — радіус кулі	
Конус	$V = \frac{1}{3}SH$	S — площа основи, H — висота	
Прямий круговий конус	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	R — радіус основи, H — висота	

Зрізаний конус, зокрема, зрізана піраміда	$V = \frac{1}{3}\left(S + \sqrt{Ss} + s\right)H$	S і s — площі основ, H — висота	
Піраміда	$V = \frac{1}{3}SH$	S — площа основи, H — висота	



§ 19. Площі поверхонь геометричних тіл

Крім об'єму, важливою числовою характеристикою геометричного тіла є площа його поверхні. Це поняття узагальнює поняття площі плоскої фігури, а в деяких випадках — навіть зводиться до нього (наприклад, у випадку многогранників). Цей та інші підходи до визначення і вимірювання площі поверхні тіла ми розглянемо у цьому параграфі.

1. Площа поверхні многогранника

Б

Найпростіше означення має площа поверхні многогранника. Це пов'язано з її будовою.

Площею поверхні многогранника називається сума площ усіх його граней.

Обчислимо площі поверхонь найпростіших видів многогранників — призм і пірамід. Площа повної поверхні цих многогранників складається із площі бічної поверхні і площі основ. Позначимо ці площі відповідно через $S_п$, $S_б$, $S_о$.

Для призми справджується формула

$$S_п = S_б + 2S_о.$$

Площа основи обчислюється в залежності від її форми. Бічна поверхня прямої призми складається з прямокутників, одна зі сторін яких дорівнює висоті призми, а сума довжин суміжних з нею сторін дорівнює периметру основи. Отже, справджується наступне твердження.

Теорема 1 *(про площу бічної поверхні прямої призми).*

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту:

$$S_б = PH,$$

де P — периметр основи; H — висота призми.

Площу повної поверхні піраміди також легко виразити через площу бічної поверхні і площу основи:

$$S_п = S_б + S_о.$$

Теорема 2 *(про площу бічної поверхні правильної піраміди).*

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра основи на апофему:

$$S_б = \frac{1}{2}ph,$$

де p — периметр основи; h — апофема.

□ Усі бічні грані даної правильної n-кутної піраміди є рівними між собою рівнобедреними трикутниками, основи яких дорівнюють a, а висоти — h (вони є апофемами піраміди).

Тому площа однієї бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}ah$, а площа всієї бічної поверхні дорівнює:

$$S_б = n\left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{2}(na)h = \frac{1}{2}ph,$$

де $p = na$ — периметр основи піраміди. ■

Приклад 1. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 6 м і 8 м і утворюють між собою кут 30°. Бічне ребро дорівнює 5 м. Знайти площу:
1) бічної поверхні паралелепіпеда;
2) повної поверхні паралелепіпеда.

□ 1) За теоремою 1, маємо: $S_б = P \cdot H = (6+8)\cdot 2\cdot 5 = 140$ (м²).

2) Оскільки $S_п = S_б + 2S_о$ і, за формулою площі паралелограма, за двома сторонами і куту між ними маємо $S_о = 6\cdot 8\cdot \sin 30° = 24$ (м²), то $S_п = 140 + 2\cdot 24 = 188$ (м²). ■

Відповідь. 1) 140 м²; 2) 188 м².

Приклад 2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 дм. Бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайти:

1) площу бічної поверхні піраміди;

2) довжину ребра куба, площа поверхні якого дорівнює площі повної поверхні піраміди.

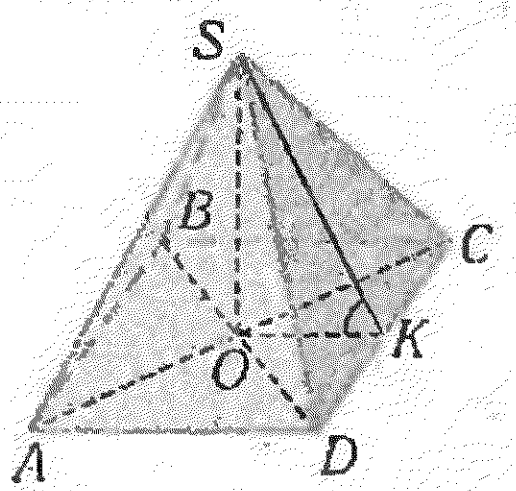


Рис. 338

☐ Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, SO — її висота, O — центр квадрата $ABCD$ (рис. 338). Якщо K — середина DC, то SK — апофема і $\angle SKO$ — кут нахилу бічної грані до площини основи, тобто $\angle SKO = 60°$.

1) За теоремою 2, $S_б = \frac{1}{2} p \cdot h$, де p — периметр основи; h — апофема. З прямокутного трикутника SOK знайдемо апофему SK:

$$SK = \frac{OK}{\cos \angle K} = \frac{6}{\cos 60°} = 12 \text{ (дм)}.$$

За умовою, $p = 4 \cdot 12 = 48$ (дм). Тоді $S_б = \frac{1}{2} 48 \cdot 12 = 288$ (дм²).

2) Знайдемо спочатку площу повної поверхні піраміди. Оскільки $S_п = S_б + S_о$ і $S_о = 12 \cdot 12 = 144$ (дм²), то $S_п = 288 + 144 = 432$ (дм²).

Нехай ребро куба, площа поверхні якого дорівнює площі повної поверхні піраміди, дорівнює x. Тоді $6x^2 = 432$. Звідси $x = 6\sqrt{2}$ (дм). ■

Відповідь. 1) 288 дм²; 2) $6\sqrt{2}$ дм.

Знаходження площ бічних поверхонь призм у загальному випадку потребує додаткового розгляду.

Теорема 3 *(про площу бічної поверхні призми).* **Площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного до ребер перерізу, що перетинає всі ребра, на довжину бічного ребра:**

$$S_б = pl,$$

де p — периметр перпендикулярного перерізу; l — довжина бічного ребра.

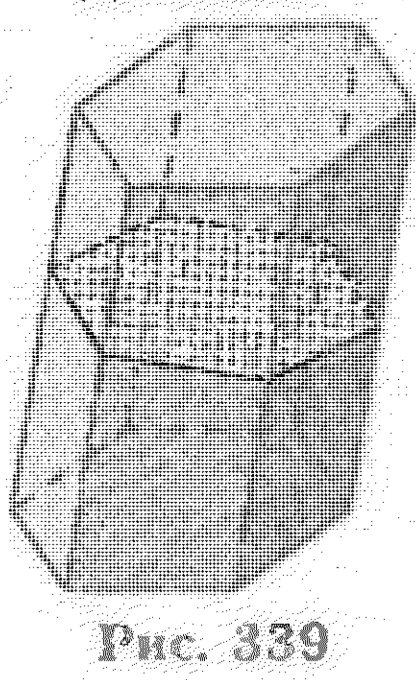


Рис. 339

☐ Розглянемо перпендикулярний переріз даної n-кутної призми площиною α (рис. 339). Вважатимемо, що α перетинає всі бічні ребра призми — інакше мова йтиме про перетин площини α з бічними гранями призми, або ж із їхнім продовженням (хоча й результати, і їхнє доведення залишаються незмінними).

Оскільки площина α перпендикулярна до всіх бічних ребер, то її перетин з кожною бічною гранню є висотою цієї грані. Кожна бічна грань призми — паралелограм. Її площу можна обчислити за формулою $S_i = a_i l$, де l — довжина бічного ребра, a_i — відповідна висота. Підставивши ці вирази у формулу $S_б = S_1 + S_2 + ... + S_n$, матимемо

$$S_б = (a_1 + a_2 + ... + a_n)l, \text{ або } S_б = pl,$$

де $p = a_1 + a_2 + ... + a_n$ — периметр перпендикулярного перерізу призми. ■

Приклад 3. Довести, що площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює половині добутку суми периметрів її основ на висоту бічної грані:

$$S_б = \frac{1}{2}(P + p)h,$$

де P і p — периметри основ; h — висота бічної грані.

□ Позначимо довжини ребер основ через a і b. Тоді кожна бічна грань є трапецією з основами a і b та висотою h. Відтак площа бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}(a+b)h$, а площа всієї бічної поверхні правильної n-кутної зрізаної піраміди дорівнює:

$$S_б = n \cdot \frac{1}{2}(a + b)h = \frac{1}{2}(na + nb)h = \frac{1}{2}(P + p)h,$$

де $P = na$, $p = nb$ — периметри основ. ■

Контрольні запитання

1°. Площа поверхні куба дорівнює 24 см². Яким є його об'єм?

2°. Як у правильній трикутній піраміді провести переріз, щоб поділити навпіл площу її поверхні?

3. Чи рівні об'єми двох прямих паралелепіпедів, якщо рівними є їхні основи і площі бічних поверхонь?

4. Чи може всередині правильної призми міститися правильна піраміда з площею поверхні більшою, ніж площа поверхні призми?

5. Чи можна дерев'яний куб з розмірами 1 × 1 × 1 (дм) загорнути в квадратну хустку розмірами 3 × 3 (дм)?

6. Пряма і похила призми мають рівні основи і висоти. Чи завжди площа бічної поверхні похилої призми більша від площі бічної поверхні прямої призми?

7. Розгорткою бічної поверхні трикутної призми є прямокутник зі сторонами 30 см і 20 см. Чи може площа поверхні цієї призми бути більшою від 700 см^2?
8. Прямі паралелепіпеди мають рівні основи і рівні площі бічних поверхонь. Чи рівні ці паралелепіпеди?
9. Дві трикутні піраміди мають рівні основи і висоти. Чи рівні площі їхніх поверхонь?
10. Чи правильно, що при зменшенні довжини ребер куба вдвічі площа його поверхні зменшиться вдвічі?
11. Чи може площа поверхні паралелепіпеда бути більшою від 10 м^2, якщо довжини всіх його ребер не перевищують 1 м?
12. Правильна піраміда має спільну основу й однакову висоту з другою пірамідою. Чи завжди площа бічної поверхні правильної піраміди менша від площі бічної поверхні другої піраміди?
13. Розгорткою бічної поверхні паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 40 см і 20 см. Чи може площа повної поверхні цього паралелепіпеда бути більшою від 1000 см^2?
14. Дві правильні піраміди мають рівновеликі основи і рівні площі бічних поверхонь. Чи рівні ці піраміди?
15*. Розгорткою бічної поверхні паралелепіпеда є прямокутник, площа якого дорівнює 800 см^2, а периметр — 120 см. Яку найбільшу площу повної поверхні може мати цей паралелепіпед?
16. Яку найбільшу площу бічної поверхні може мати правильна n-кутна призма, діагональ бічної грані якої дорівнює 1?

2. Площа поверхні циліндра і конуса

Б Обчислення площі поверхні многогранника зводиться до обчислення площі розгортки цієї поверхні.

Оскільки поверхні циліндрів і конусів теж можна розгорнути на площині, то їхні площі можна розглядати, як площі відповідних розгорток. У розділі 5 описано розгортки найпростіших циліндрів і конусів. Скориставшись ними, неважко довести такі твердження.

Теорема 4 *(про площу бічної поверхні прямого кругового циліндра).*

Площа $S_б$ бічної поверхні прямого кругового циліндра з радіусом основи R і висотою H обчислюється за формулою

$$S_б = 2\pi RH.$$

Теорема 5 *(про площу бічної поверхні прямого кругового конуса).*

Площа $S_б$ бічної поверхні прямого кругового конуса з радіусом основи R і твірною l обчислюється за формулою

$$S_б = \pi R l.$$

□ Оскільки розгорткою бічною поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами $2\pi R$ і H (рис. 340), то обчислюючи його площу, одержимо формулу з теореми 4.

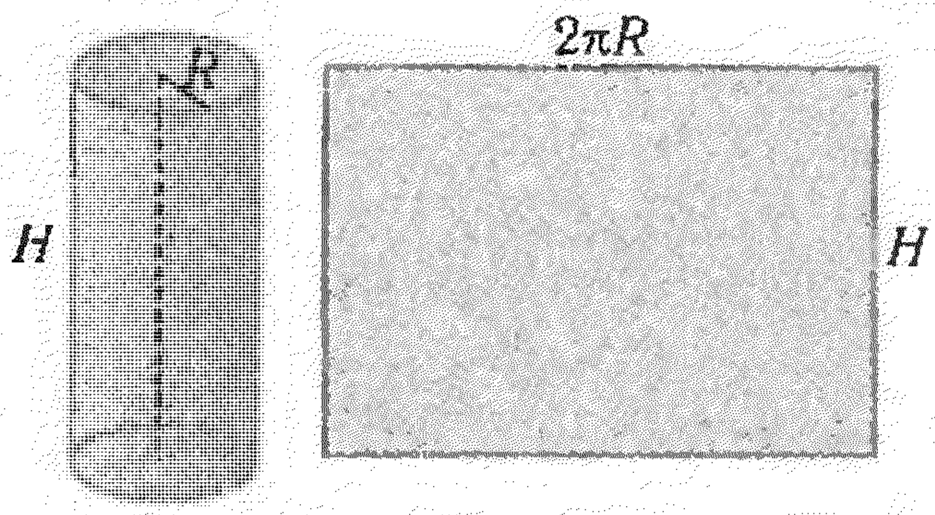


Рис. 340

Розгорткою бічної поверхні прямого кругового конуса є круговий сектор, радіус якого дорівнює довжині твірної конуса l, а довжина дуги дорівнює довжині кола основи конуса (рис. 341). Скориставшись формулою для обчислення площі кругового сектора, матимемо:

$$S_б = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R l = \pi R l. \ ■$$

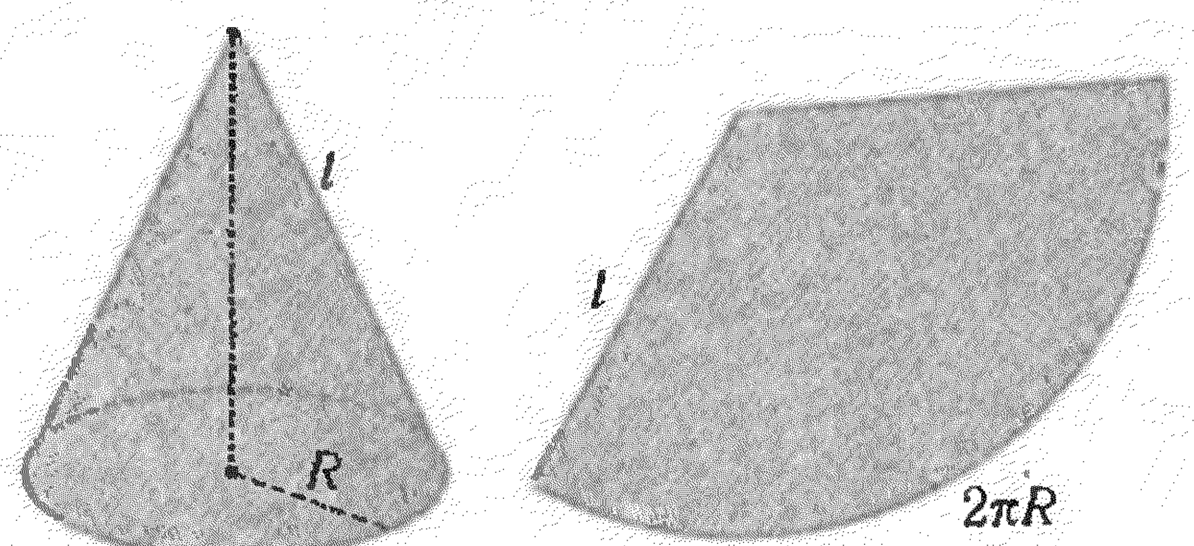


Рис. 341

Знаючи формулу площі бічної поверхні прямого кругового циліндра чи конуса і радіус основи, неважко дістати формули для обчислення площі повної поверхні цих геометричних тіл (запишіть ці формули самостійно).

Приклад 4. Площа осьового перерізу прямого кругового циліндра дорівнює 8 см², а радіус основи — 2 см. Знайти:

1) площу бічної поверхні циліндра;
2) площу повної поверхні циліндра.

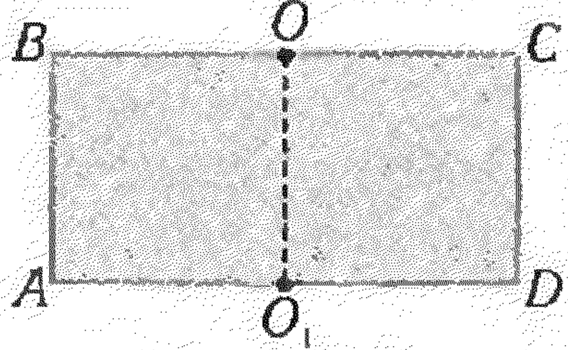


Рис. 342

☐ При розв'язуванні задачі можна обмежитись зображенням осьового перерізу $ABCD$ циліндра (рис. 342), де O, O_1 — центри основ.

1) За умовою, $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 8$ (см²); $AD = 2R = 4$ (см). Звідси $H = AB = 8 : 4 = 2$ (см). Тоді, згідно з теоремою 4, $S_б = 2\pi \cdot RH = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$ (см²).

2) $S_п = S_б + 2S_о = 8\pi + 2\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (см²). ■

Відповідь. 1) 8π см²; 2) 16π см².

Приклад 5. Висота прямого кругового конуса дорівнює 10 см, діаметр основи — 12 см. Знайти:
1) площу бічної поверхні конуса;
2) площу повної поверхні конуса.

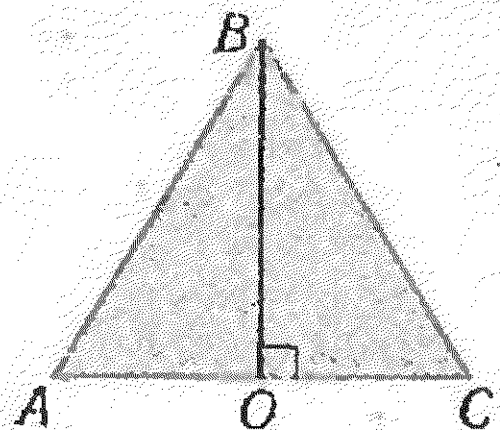


Рис. 343

☐ При розв'язуванні вправи теж можна обмежитись зображенням осьового перерізу конуса (рис 343). Тут $BO = H = 10$ см, $AC = 2R = 12$ см. Тому $R = 6$ см.

1) З прямокутного трикутника AOB знайдемо твірну конуса $l = AB$:

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 2\sqrt{34} \text{ (см)}.$$

Тоді, користуючись теоремою 5, матимемо:

$$S_б = \pi \cdot Rl = \pi \cdot 6 \cdot 2\sqrt{34} = 12\pi\sqrt{34} \text{ (см}^2\text{)}.$$

2)Оскільки $S_о = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$, то

$$S_п = 36\pi + 12\pi\sqrt{34} = 12\pi(3 + \sqrt{34}) \text{ (см}^2\text{)}. ■$$

Відповідь. 1) $12\pi\sqrt{34}$ см²; 2) $12\pi(3 + \sqrt{34})$ см².

Ідея розгортки бічної поверхні застосовна і до зрізаних конусів. Скориставшись спорідненістю прямих кругових циліндрів і прямих призм, прямих кругових конусів і пірамід, формули в теоремах 3 і 4 можна дістати з формул для обчислення площ поверхонь призм і пірамід.

Впишемо у прямий круговий циліндр правильну n-кутну призму. Площа бічної поверхні S_n цієї призми дорівнює $p_n H$, де p_n — периметр основи призми, а H – висота призми (і циліндра). Доречно припустити, що площі бічних поверхонь цих призм при збільшенні n необмежено наближаються до площі бічної поверхні циліндра. При необмеженому збільшенні n значення периметра p_n наближається до довжини кола основи циліндра. Звідси випливає формула для обчислення бічної поверхні циліндра з теореми 3. Аналогічно площу бічної поверхні прямого кругового конуса можна визначити за допомогою площ бічних поверхонь правильних пірамід, вписаних у цей конус. Хоча описаний підхід не спрощує (а навіть ускладнює) виведення формул для обчислення площ бічних поверхонь прямих кругових циліндрів і конусів, проте він розширює наші можливості у визначенні площ поверхонь для інших тіл. Зокрема, коли йдеться про ті поверхні, які не можна розгорнути на площині.

Приклад 6. Довести, що площа бічної поверхні зрізаного прямого кругового конуса обчислюється за формулою $S_б = \pi(r + R)l$, де r, R — радіуси основ, l — твірна зрізаного конуса.

☐ Впишемо в даний зрізаний конус правильну n-кутну зрізану піраміду (рис. 344). Якщо a_n — висота бічної грані, p_n і P_n — периметри верхньої і нижньої основ зрізаної піраміди, то площа її бічної поверхні дорівнює:

$$s_n = \frac{p_n + P_n}{2} \cdot a_n .$$

При збільшенні n периметр p_n прямує до $2\pi r$, периметр P_n — до $2\pi R$, а висота a_n — до l, а тому S_n прямує до $S_б = \pi(r + R)l$. ■

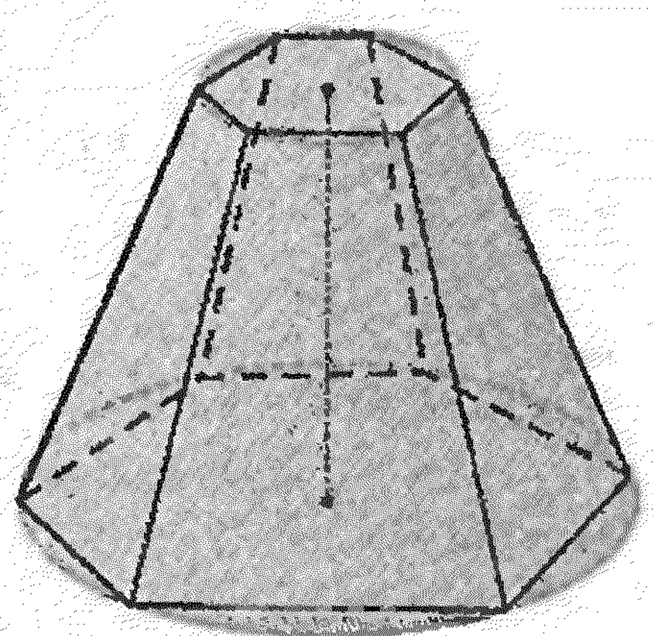


Рис. 344

✓ Контрольні запитання

1. Чи може площа поверхні циліндра бути вдвічі більшою від площі основи?
2°. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні прямого кругового циліндра, якщо його лінійні розміри збільшилися вдвічі?
3. Осьовим перерізом прямого кругового циліндра є квадрат. Що більше: площа бічної поверхні циліндра чи сума площ його основ?
4°. Чи може площа бічної поверхні прямого кругового конуса дорівнювати площі його основи?
5. Площина поділяє об'єм циліндра навпіл. Чи поділяє вона навпіл площу його поверхні?

6. Чи рівні два конуси, в яких рівні об'єми і площі поверхонь?
7. Чи може всередині прямого циліндра поміститися призма з площею поверхні більшою, ніж площа поверхні циліндра?
8. Чи правильно, що якщо радіус основи прямого кругового циліндра збільшити вдвічі, то площа його поверхні збільшиться вдвічі?
9. Нехай рівновеликі прямі кругові конуси мають рівновеликі осьові перерізи. Чи рівні площі їхніх поверхонь?
10. Нехай рівновеликі прямі кругові конуси мають рівні площі поверхонь. Чи рівновеликі їхні осьові перерізи?
11. Радіус основи прямого кругового циліндра втричі більший від висоти. У скільки разів площа повної поверхні циліндра більша від площі його бічної поверхні?
12. Як виражається об'єм прямого кругового циліндра через площу бічної поверхні і радіус основи?

3. Площа поверхні кулі

Розглянемо ще один підхід до вимірювання площ поверхонь геометричних тіл. Він застосовний до уже розглянутих поверхонь і, крім того, дає змогу визначати площі поверхонь, які не можна розгорнути на площині. Зокрема, за допомогою цього підходу неважко знайти площу поверхні кулі.

У неможливості розгорнути сферу на площині можна переконатися за допомогою експерименту.

Візьмемо клаптик гумового м'яча і спробуємо розправити його на площині. При цьому обов'язково доведеться його розтягувати. Саме тому покришки футбольних м'ячів зшивають з невеликих шматочків шкіри.

Метод вимірювання площі кривої поверхні можна унаочнити наступним чином. Припустимо, що поверхня покрита з двох сторін рівномірним шаром фарби завтовшки $\frac{h}{2}$. При цьому було витрачено $V(h)$ фарби. Природно припустити, що площа S пофарбованої поверхні наближено дорівнює відношенню об'єму фарби до товщини шару фарби h: $S \approx \frac{V(h)}{h}$. І чим меншим є h, тим точнішою стає ця наближена рівність. Інакше кажучи, відношення $\frac{V(h)}{h}$ необмежено наближається до значення площі поверхні тіла. Цей висновок зроблено з урахуванням припущення, що нам уже відоме поняття площі розглянутої поверхні. Якщо ж висновок і припущення поміняти місцями, то прийдемо до наступного означення площі поверхні тіла.

Для цього спочатку уточнимо зміст покриття поверхні з двох сторін рівномірним шаром фарби.

Шаром завтовшки h, що відповідає даній поверхні, називається сукупність усіх точок простору, які віддалені від поверхні на відстань, що не перевищує $\frac{h}{2}$.

Поняття шару, що відповідає даній поверхні, неважко уявити, користуючись його фізичною моделлю. Але описати його для конкретної поверхні не завжди легко. А для сфери радіуса R шар завтовшки h є частиною простору, яка обмежена концентричними сферами з радіусами $R-\frac{h}{2}$ і $R+\frac{h}{2}$.

Користуючись поняттям шару, можна дати означення площі поверхні тіла.

Площею поверхні тіла називається границя відношення об'єму шару завтовшки h до його товщини, якщо товщина цього шару прямує до нуля:

$$S=\lim_{h\to 0}\frac{V(h)}{h},$$

де S — площа поверхні; V(h) — об'єм шару, що відповідає поверхні завтовшки h.

Неважко помітити, що площа поверхні є похідною від об'єму шару завтовшки h в точці $h = 0$: $S = V'(0)$.

Новий підхід до визначення площі поверхні узгоджується з розглянутим вище. Тобто, скориставшись ним, дістанемо такі самі формули для обчислення площ поверхонь, як і в п. 2, хоча для циліндра і конуса застосування цього підходу пов'язане з доволі громіздким доведенням. Натомість площу сфери таким способом знайти неважко.

Теорема 6 *(про площу сфери).*

Площа сфери з радіусом R обчислюється за формулою

$$S=4\pi R^2.$$

Доведення теореми буде наведено нижче.

Приклад 7. Знайти відношення площі поверхні кулі, описаної навколо куба, до площі поверхні кулі, вписаної в куб.

☐ Радіус R кулі, описаної навколо куба, дорівнює половині його діагоналі, а радіус r кулі, вписаної в куб, — половині ребра куба. Якщо ребро куба дорівнює a, то $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $r=\frac{a}{2}$. Площі сфер відносяться, як квадрати їхніх радіусів (доведіть це, користуючись теоремою 6). Нехай S — площа поверхні кулі, описаної навколо куба, а s — вписаної. Тоді $\frac{S}{s}=\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{a^2}=3$. ■

Відповідь. 3.

Приклад 8. Скільки шкіри потрібно для виготовлення покришки м'яча з діаметром 0,3 м, якщо відходи матеріалу становлять 10%?

☐ Якщо математичною моделлю м'яча вважати кулю, то площа S поверхні м'яча дорівнює $4\pi R^2$, де R — радіус кулі. Отже, $S\approx 4\cdot 3{,}14\cdot 0{,}15^2\approx 0{,}283$ (м²). Враховуючи витрати на відходи, остаточно одержимо: $\frac{0{,}283}{0{,}9}\approx 0{,}3$ (м²). ■

Відповідь. $\approx 0{,}3$ м².

Доведення теореми 6.

☐ Розглянемо шар завтовшки h, що відповідає даній сфері з радіусом R. Цей шар є тілом, яке міститься між двома концентричними сферами з радіусами $R-\frac{h}{2}$ і $R+\frac{h}{2}$ (рис. 345). Тому його об'єм $V(h)$ дорівнює різниці об'ємів двох куль з радіусами $R+\frac{h}{2}$ і $R-\frac{h}{2}$, а саме:

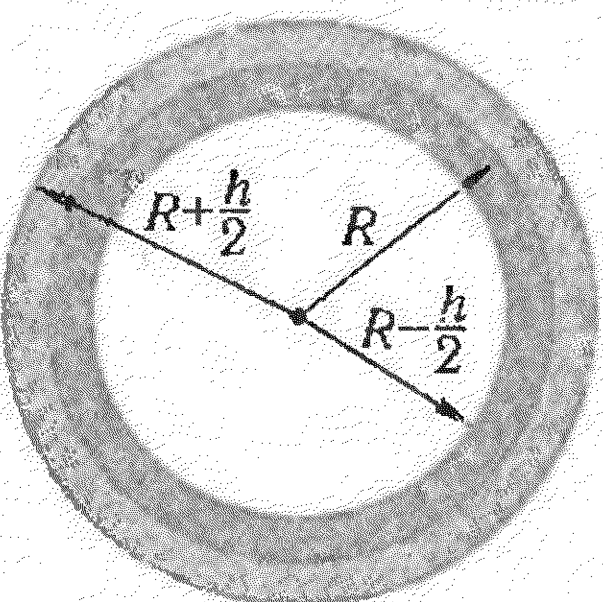


Рис. 345

$$V(h)=\frac{4}{3}\pi\left(R+\frac{h}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi\left(R-\frac{h}{2}\right)^3.$$

Знайдемо похідну функції $V(h)$:

$$V'(h)=2\pi\left(R+\frac{h}{2}\right)^2+2\pi\left(R-\frac{h}{2}\right)^2.$$

Оскільки $S = V'(0)$, то $S = 2\pi R^2 + 2\pi R^2 = 4\pi R^2$. ■

Приклад 9. Знайти площу сфери, вписаної в правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи a і висотою h.

□ При розв'язанні задачі можна обмежитися зображенням перерізу піраміди площиною, яка проходить через висоту піраміди і апофему. Перерізом є рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює стороні основи піраміди, а висота — висоті піраміди (рис. 346). Радіус кола, вписаного у такий трикутник, дорівнює радіусу кулі.

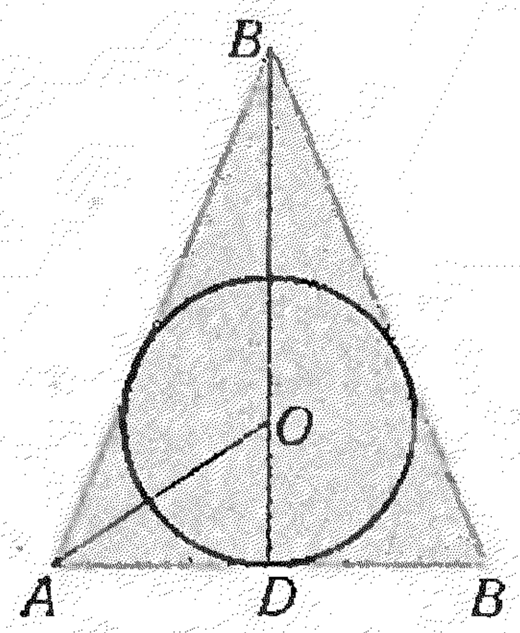


Рис. 346

Нехай O — центр кола, вписаного у трикутник ABC. Тоді AO — бісектриса трикутника ABD. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BO}{OD}$. Враховуючи те, що $OD = R$, де R — радіус кола, маємо: $BO = h - R; AD = \dfrac{a}{2}$;

$AB = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{2}$. Тоді $\dfrac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{a} = \dfrac{h - R}{R}$. Звідси

$$R = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$

Отже, площа S поверхні сфери становить:

$$S = 4\pi \cdot \left(\frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}\right)^2. \ ■$$

Відповідь. $4\pi \cdot \left(\dfrac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}\right)^2$.

Графічні вправи

1. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь прямого кругового циліндра за:
   1) його осьовим перерізом, зображеним на рис.347;
   2) його розгорткою, зображеною на рис 348.
2. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь прямого кругового конуса за:
   1) його осьовим перерізом, зображеним на рис. 349;
   2) розгорткою його бічної поверхні, зображеною на рис 350.

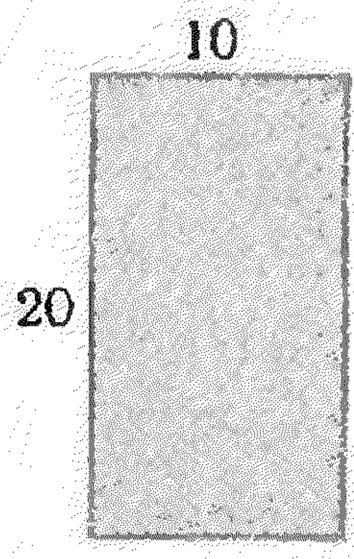


Рис. 347

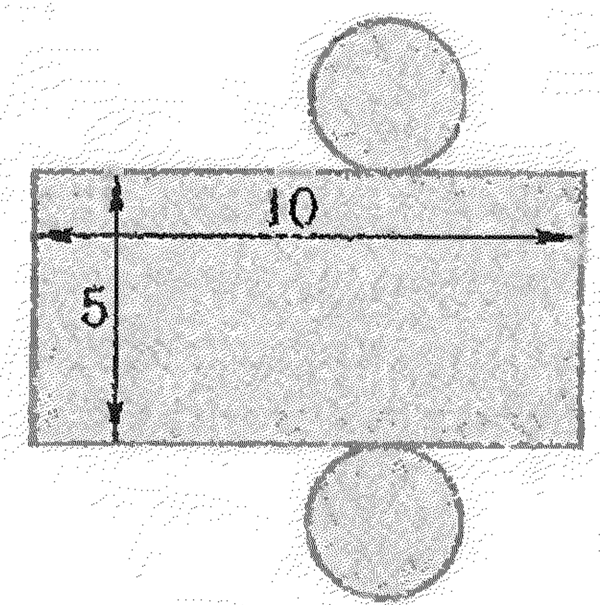


Рис. 348

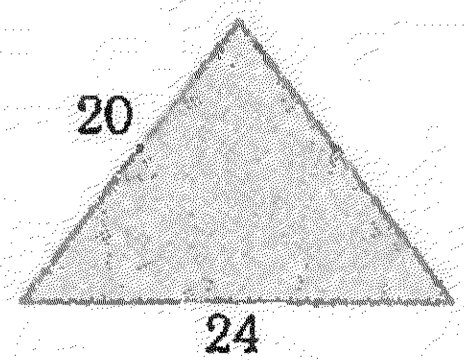


Рис. 349

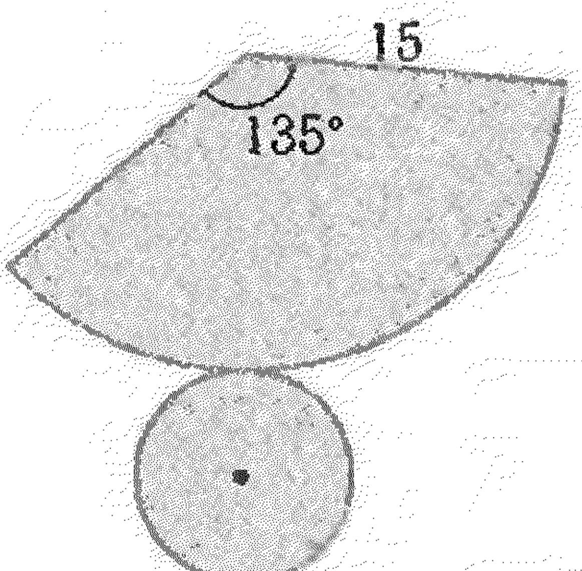


Рис. 350

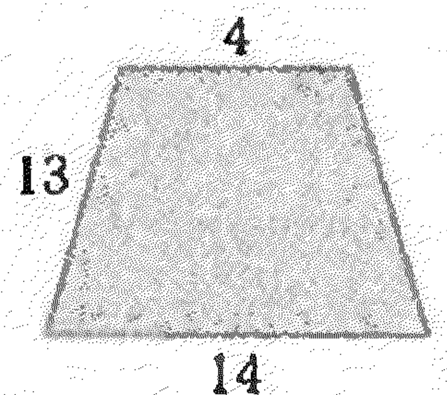


Рис. 351

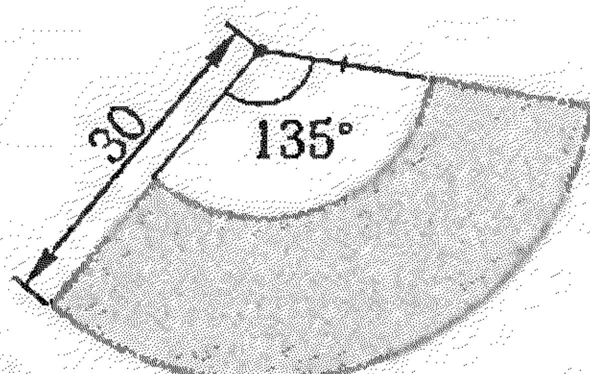


Рис. 352

3. Знайдіть площу бічної поверхні прямого кругового зрізаного конуса за:
1) його осьовим перерізом, зображеним на рис. 351;
2) розгорткою його бічної поверхні, зображеною на рис. 352.

Задачі

331. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють a і b і утворюють кут α. Бічне ребро дорівнює l. Знайдіть площу:
1) бічної поверхні паралелепіпеда;
2) повної поверхні паралелепіпеда;
3) перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через більші сторони двох основ, які не належать одній грані.

332. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, якщо:
1°) діагональ призми дорівнює $\sqrt{34}$ м, а діагональ бічної грані — 5 м;
2°) сторона основи призми дорівнює 3 м, а діагональ бічної грані — 5 м;

3) площа діагонального перерізу дорівнює S, а сторона основи — a;
4) об'єм призми дорівнює V, а найбільший радіус кулі, яку можна помістити в призму, дорівнює r.

333. Знайдіть площу поверхні прямої призми, якщо:
1) основою призми є правильний трикутник, а діагональ бічної грані дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 60°;
2) основою призми є прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а площа більшої бічної грані дорівнює 10 см²;
3*) основою призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині, а більша бічна грань має форму квадрата зі стороною a.

334. Скільки тонн розчину треба приготувати для зовнішнього оштукатурення будинку, довжина якого дорівнює 37 м, ширина — 10 м, висота — 13 м, якщо на втрати розчину досить мати запас, необхідний для оштукатурення площі, яка дорівнює площі вікон і дверей? На 1 м² поверхні витрачається 20 кг розчину.

---

335. Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо:
1°) бічне ребро дорівнює 12 см і утворює з висотою кут 30°;
2°) апофема піраміди дорівнює 6 см і нахилена до площини основи під кутом 45°;
3) сторона основи дорівнює b, а плоский кут при її вершині — α;
4) радіус кола, вписаного в основу, дорівнює r, а бічне ребро утворює із площиною основи кут α;
5*) сторона основи піраміди дорівнює a, а об'єм — V;
6*) об'єм піраміди дорівнює V, а кут між бічним ребром і висотою — α.

336. Знайдіть площу бічної поверхні:
1) піраміди, основою якої є рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 5 см, а всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60°;
2) піраміди, основою якої слугує ромб із діагоналями 6 м і 8 м, а висота проходить через точку перетину діагоналей основи і має довжину 1 м.

337. Дах башти має форму правильної чотирикутної піраміди. Сторона основи піраміди дорівнює 1,8 м, висота — 1,2 м. Скільки листового заліза потрібно для покриття даху, якщо на суміщення листів припадає 10% площі поверхні покрівлі?

338. Площа осьового перерізу прямого кругового циліндра дорівнює 8 см², а радіус основи — 2 см. Знайдіть:
1°) площу бічної поверхні циліндра;
2°) площу повної поверхні циліндра;
3) площі поверхонь правильних чотирикутних вписаної і описаної призм.

339. Об'єм прямого кругового циліндра дорівнює q, а площа його осьового перерізу — p. Знайдіть:
1°) площу повної поверхні циліндра;
2°) площу бічної поверхні правильної n-кутної призми, вписаної в циліндр.

340. Скільки квадратних метрів бляхи використано для виготовлення одного мільйона банок з діаметром основи 10 см і висотою 5 см, якщо відходи матеріалу становлять 10%?

341. Циліндричний бак, який лежить горизонтально і на третину вкопаний в землю, треба пофарбувати. Як визначити обсяг роботи і необхідну кількість фарби?

342°. Відро циліндричної форми має діаметр основи 25 см і може вмістити 10 л води. Скільки жерсті пішло на його виготовлення, якщо на шви і відходи йде 10 % матеріалу?

343. Площа основи прямого кругового конуса дорівнює S, а його твірна нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть:
1°) площу бічної поверхні конуса;
2) відношення площі бічної поверхні до площі основи;
3) відношення площі бічної поверхні правильної n-кутної піраміди, описаної навколо конуса, до площі бічної поверхні правильної n-кутної піраміди, вписаної в конус.

344. Діагональ осьового перерізу прямого кругового циліндра дорівнює 16 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть:
1°) площу повної поверхні циліндра;

2) площу бічної поверхні вписаного в циліндр конуса, вершина якого збігається з центром верхньої основи циліндра, а основа — з нижньою основою циліндра.

345. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см і нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть:
1°) площу повної поверхні піраміди;
2) площу бічної поверхні прямого кругового конуса, вписаного в піраміду;
3) відношення площ поверхонь прямих кругових конусів, вписаного в піраміду і описаного навколо неї.

346. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 дм. Бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть:
1°) площу бічної поверхні піраміди;
2°) довжину ребра куба, площа поверхні якого дорівнює площі повної поверхні піраміди;
3°) площу поверхні прямого кругового конуса, вписаного в дану піраміду;
4) площу бічної поверхні прямого кругового циліндра, вписаного в дану піраміду так, що центр верхньої основи циліндра ділить висоту піраміди навпіл, а нижня основа лежить у площині основи піраміди.

347. Лійка має форму конуса, утвореного з кругового сектора, радіус якого дорівнює 8 см, а центральний кут — 60°. Знайдіть площу бічної поверхні лійки.

348. Силосна башта має конічний дах, висота якого дорівнює 2 м, а діаметр основи — 6 м. Скільки листів бляхи потрібно для покриття даху, якщо розміри листа — 0,7 × 1,4 м, а відходи становлять 10%?

349. Скільки жерсті витрачено на виготовлення 10 відер, висота кожного з яких дорівнює 42 см, а діаметри основ — 28 см і 34 см? (На шви і відходи йде 12% матеріалу).

350. На відстані 4 см від центра кулі проведено переріз, довжина кола якого дорівнює 18 см. Знайдіть:
1°) площу поверхні кулі;
2°) площу поверхні куба з ребром, яке дорівнює радіусу кулі;

3) площу повної поверхні вписаного в кулю прямого кругового циліндра, радіус основи якого дорівнює половині його висоти;

4) відношення площ поверхонь циліндра, вписаного в кулю, і циліндра, описаного навколо неї, якщо циліндри мають квадратні осьові перерізи.

351. Знайдіть площу сфери, вписаної:

1°) в куб з ребром a;

2) у прямий круговий циліндр, радіус основи якого дорівнює R, а висота — $2R$;

3*) у правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи a і висотою h.

352. Знайдіть відношення площі поверхні кулі:

1°) описаної навколо куба, до площі поверхні кулі, вписаної в куб;

2) описаної навколо прямого кругового циліндра з квадратним осьовим перерізом до площі поверхні вписаної в нього кулі.

353. Із прямого кругового циліндра «вирізано» півкулю, основа якої збігається з основою циліндра. Радіус півкулі дорівнює 2 см, а площа осьового перерізу циліндра — 64 см^2. Знайдіть:

1) площу поверхні тіла;

2) площу поверхні найбільшого куба, який можна вирізати зі згаданої півкулі.

354. Відомо, що швидкість охолодження тіла тим більша, чим більшою є площа його поверхні. У якому випадку швидше охолоне відливок з масою m: якщо надати йому форму куба чи кулі?

355. Визначте об'єм двоопуклої лінзи, в якої радіуси сферичних поверхонь дорівнюють, відповідно, 13 см і 20 см, а відстань між центрами поверхонь дорівнює 21 см.

356. Тіло з об'ємом V має форму прямого кругового циліндра з півкулею зверху. При яких лінійних розмірах це тіло буде мати найменшу повну поверхню?

357. Бак циліндричної форми вміщує V літрів води. Якими повинні бути його розміри, щоб поверхня бака без кришки була найменшою?

358. Поперечний переріз каналу — трапеція (без верхньої основи) з нижньою основою (дном) і бічними сторонами (стінками) довжиною a. При якій величині кута між дном і стінками каналу його пропускна спроможність буде найбільшою?

Підсумок

Головні означення

Площею поверхні многогранника називається сума площ усіх його граней.

Шаром завтовшки h, що відповідає даній поверхні, називатимемо сукупність усіх точок простору, які віддалені від поверхні на відстань, що не перевищує $\frac{h}{2}$.

Площею поверхні тіла називається границя відношення об'єму шару завтовшки h до його товщини, якщо товщина цього шару прямує до нуля:

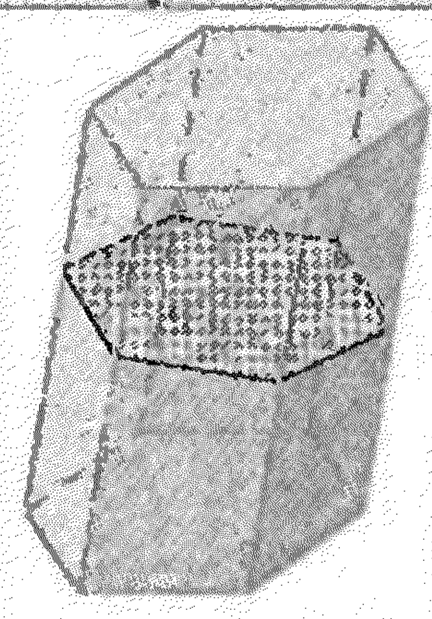
$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V(h)}{h} = V'(0),$$

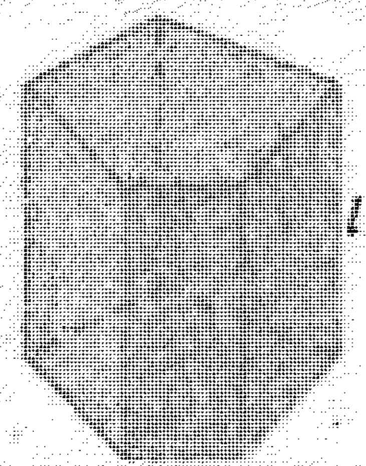
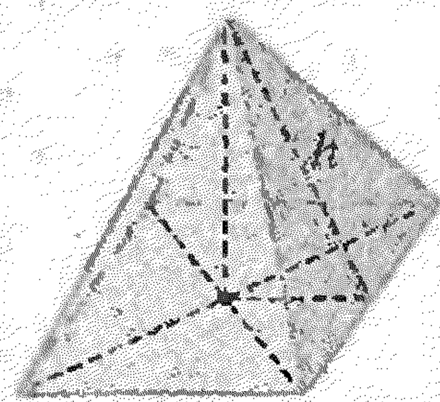
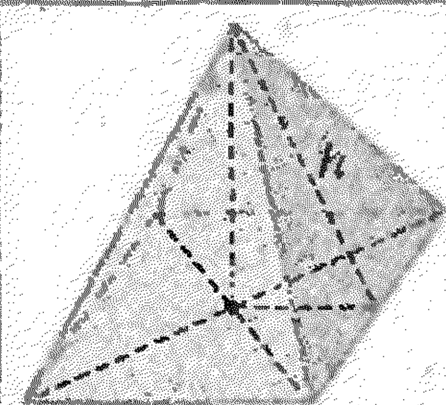
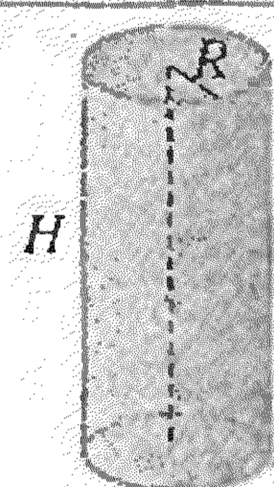
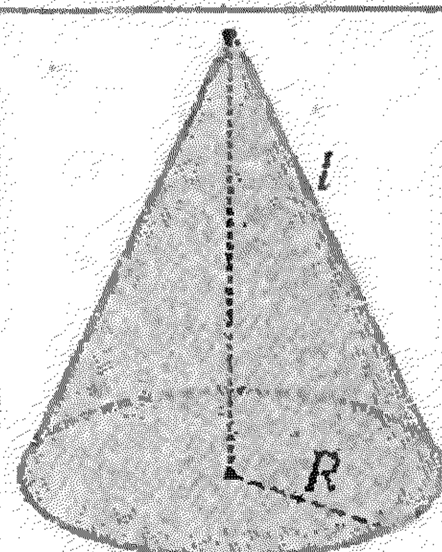
де S — площа поверхні; V (h) — об'єм шару завтовшки h.

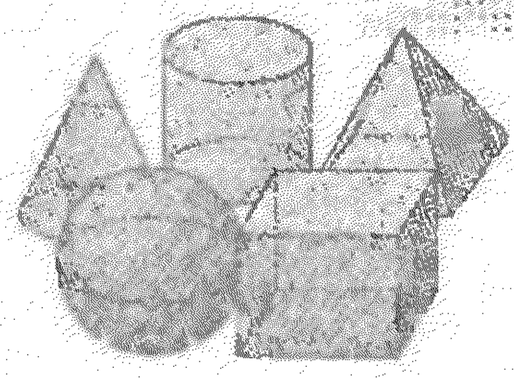
Головне твердження

Площа S сфери радіуса R обчислюється за формулою $S = 4\pi R^2$.

Головні формули площ поверхонь

Площа	Формула	Позначення	Зображення
бічної та повної поверхонь призми	$S_б = pl$ $S_п = S_б + 2S_о$	$S_б$ – площа бічної поверхні призми, p — периметр перпендикулярного перерізу, l — довжина бічного ребра, $S_п$ — площа повної поверхні призми, $S_о$ — площа основи	

Площа	Формула	Позначення	Зображення
бічної поверхні прямої призми	$S_б = pl$	$S_б$ — площа бічної поверхні прямої призми, p — периметр основи, l — висота призми	
бічної поверхні правильної піраміди	$S_б = \frac{1}{2}ph$	p — периметр основи, h — апофема	
повної поверхні піраміди	$S_п = S_б + S_о$	$S_п$, $S_б$, $S_о$ — площі повної, бічної поверхонь, основи піраміди	
бічної та повної поверхонь прямого кругового циліндра	$S_б = 2\pi RH$, $S_п = S_б + 2S_о$	$S_б$ — площа бічної поверхні, R — радіус основи, H — висота, $S_п$ — площа повної поверхні, $S_о$ — площа основи	
бічної та повної поверхонь прямого кругового конуса	$S_б = \pi Rl$, $S_п = S_б + S_о$	$S_б$ — площа бічної поверхні, R — радіус основи, l — твірна, $S_п$ — площа повної поверхні, $S_о$ — площа основи	



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл»

Завдання для самоконтролю

1°. Чи рівні об'єми тіл, утворених перерізом куба площиною, що проходить через його центр симетрії?
2°. Чи рівні між собою дві рівновеликі кулі?
3°. Чи рівні об'єми тіл, утворених при перетині прямого кругового циліндра площиною, що проходить через його вісь?
4. Чи правильно, що рівновеликі циліндри рівні між собою?
5°. Чи зміниться об'єм прямого кругового циліндра, якщо діаметр його основи збільшити вдвічі, а висоту вчетверо зменшити?
6. Площина, перпендикулярна до основи прямої призми, поділяє основу на рівновеликі частини. Чи рівновеликі утворені при цьому частини призми?
7. Чи рівні об'єми двох циліндрів, у яких основи рівновеликі і розташовані у двох паралельних площинах?
8. Чи рівновеликі дві похилі призми з рівними основами і рівними бічними ребрами?
9. Чи завжди можна в циліндр з об'ємом 2 см^3 помістити кулю, об'єм якої 0,1 см^3?
10. Чи рівновеликі всі піраміди, що мають спільну основу і вершини яких лежать у площині, паралельній основі?
11. Чи мають рівновеликі конуси з рівновеликими основами рівні висоти?
12°. Чи зміниться об'єм прямого кругового конуса, якщо радіус основи конуса зменшити вдвічі, а висоту збільшити вдвічі?
13. Рівновеликі конус і циліндр мають рівновеликі, але не рівні між собою основи. Чи є висота конуса втричі більшою від висоти циліндра?
14. Чи завжди можна кулю з об'ємом 0,001 см^3 помістити в піраміду з об'ємом 10 см^3?

15°. Чи правильно, що при збільшенні довжин ребер паралелепіпеда вдвічі площа його поверхні збільшується у вісім разів?

16. Ребра паралелепіпеда більші за 100 см. Чи може площа його поверхні бути меншою за 1 см²?

17. Чи може площа повної поверхні піраміди бути рівно вдвічі більшою від площі її основи?

18. Чи рівні між собою площі поверхонь двох пірамід, утворених перерізом правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через її висоту?

19°. Чи правильно, що площа поверхні прямого кругового циліндра не зміниться, якщо радіус основи збільшити вдвічі, а висоту зменшити вдвічі?

20°. Чи можуть кулі з рівними площами поверхонь мати різні об'єми?

Відповіді до завдань для самоконтролю

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Так	Так	Так	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Ні	Так
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Так	Так	Так	Ні	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Ні

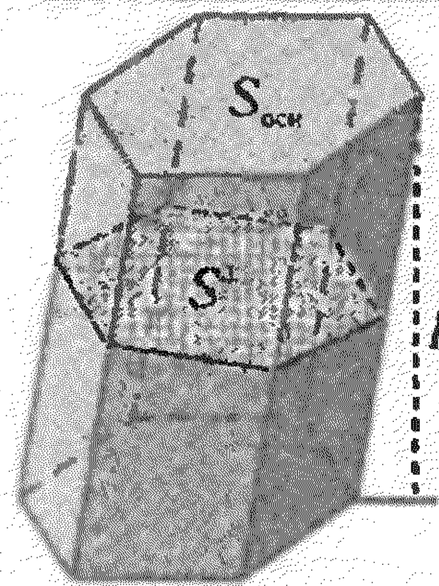
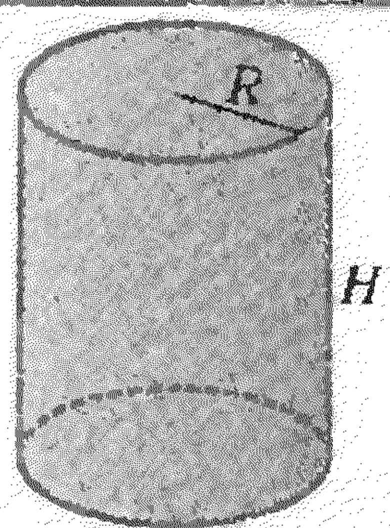
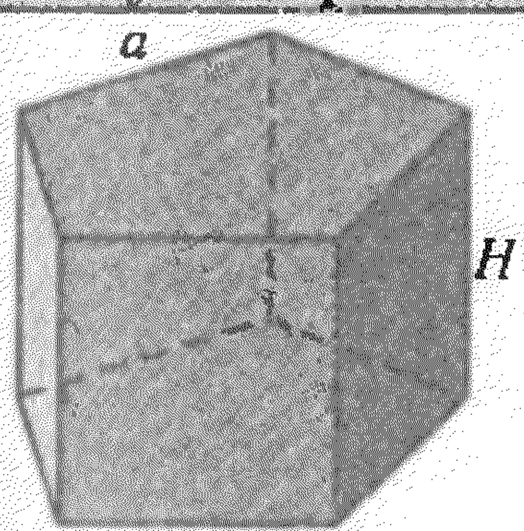
Зразок контрольної роботи №6

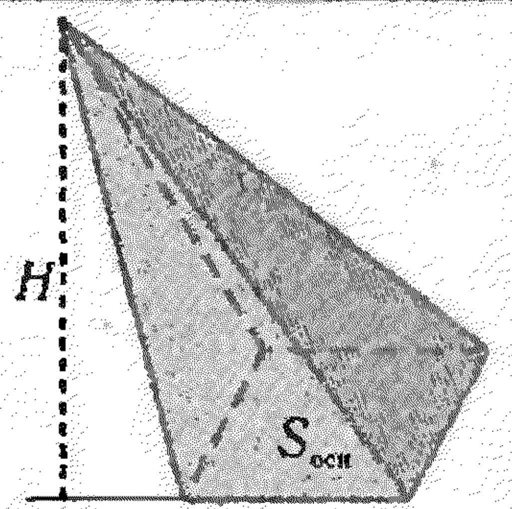
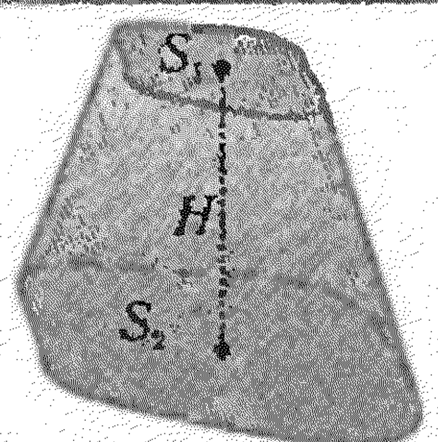
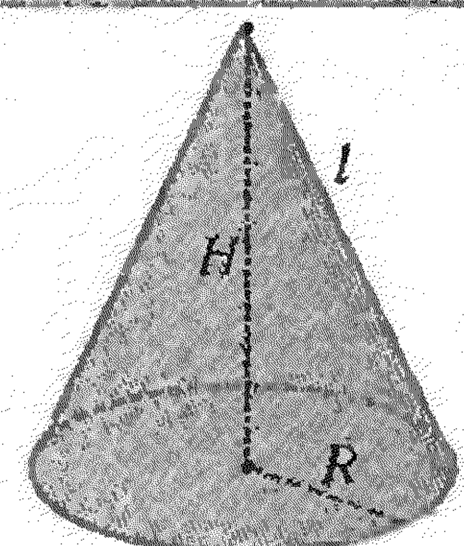
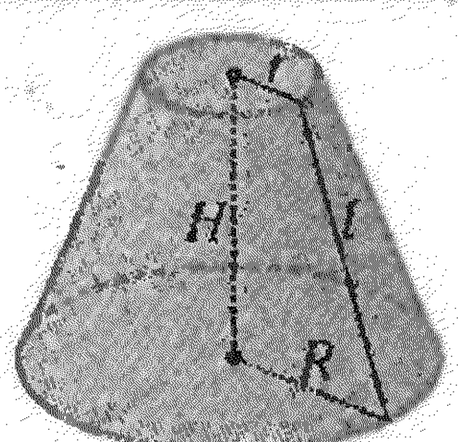
1°. Канавокопач риє тимчасові зрошувальні канали трикутного профілю глибиною 0,3 м і шириною у верхній частині 0,9 м. Визначте довжину каналу, проритого за 1 годину роботи, якщо за цей час машина виймає 75 м³ землі.

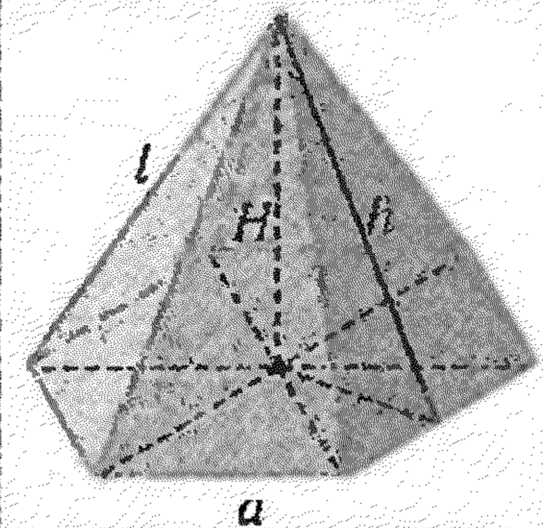
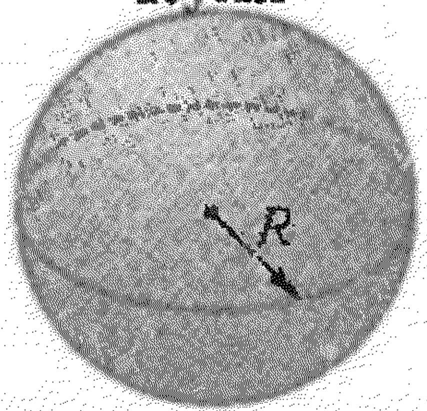
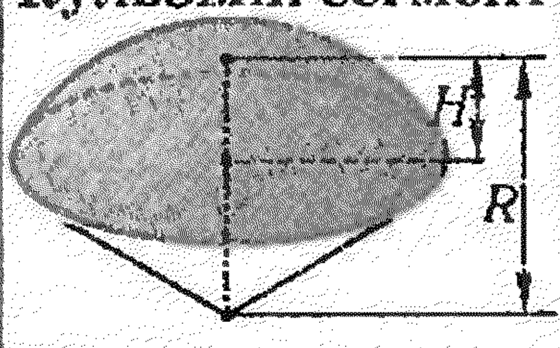
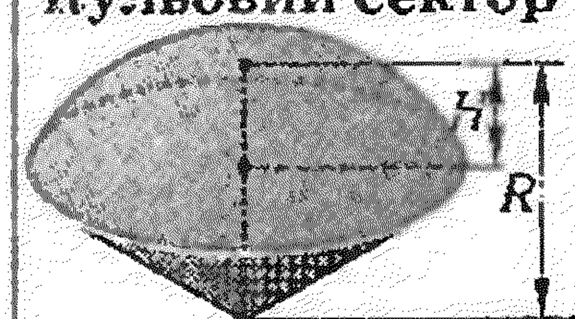
2. Конус утворено обертанням рівностороннього трикутника зі стороною a навколо його висоти. Знайдіть:
а°) об'єм конуса;
б°) радіус кулі, рівновеликої конусу;
в) площу поверхні прямого кругового циліндра висотою h, вписаного в конус, якщо $a = 4$ см, $h = \sqrt{3}$ см;
г*) об'єм куба, нижня основа якого міститься на основі конуса, а вершини верхньої основи належать бічній поверхні конуса.

Формули для обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл

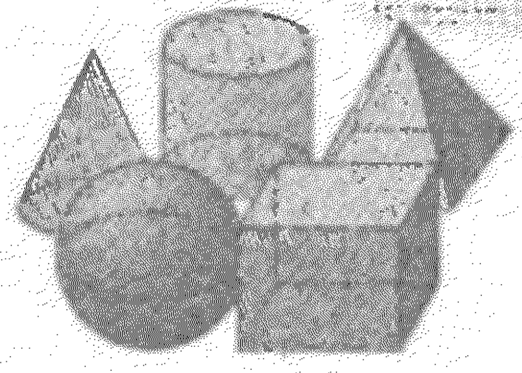
Таблиця 48

Циліндр, призма	Позначення	Формули
	S_o — площа основи, H — висота, V — об'єм, $S^{\perp}$ — площа перпендикулярного до твірних перерізу, що перетинає всі бічні ребра, l — твірна	$V = S_oH$ $V = S^{\perp} \cdot l$
Прямий круговий циліндр	**Позначення**	**Формули**
	S — площа поверхні, S_o — площа основи, $S_б$ — площа бічної поверхні, H — висота (твірна), R — радіус основи, V — об'єм	$V = \pi R^2 H$ $S_б = 2\pi RH$ $S = 2\pi R(H + R)$
Правильна n-кутна призма	**Позначення**	**Формули**
 $n=5$	l — бічне ребро, a — сторона основи, H — висота, S_o — площа основи, $S_б$ — площа бічної поверхні, V — об'єм	$V = S_oH$ $S_б = nal$

Конус, піраміда	Позначення	Формули
	$S_о$ — площа основи конуса (піраміди), H — висота, V — об'єм	$V = \frac{1}{3}S_оH$
Зрізаний конус (зрізана піраміда)	**Позначення**	**Формули**
	S_1, S_2 — площі основ зрізаного конуса (піраміди), H — висота, V — об'єм	$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$
Прямий круговий конус	**Позначення**	**Формули**
	l — твірна, R — радіус основи, H — висота, $S_б$ — площа бічної поверхні, S — площа поверхні, V — об'єм	$R^2 + H^2 = l^2$ $S_б = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
Прямий круговий зрізаний конус	**Позначення**	**Формули**
	l — твірна, r, R — радіуси основ, H — висота, $S_б$ — площа бічної поверхні, S — площа поверхні, V — об'єм	$(R - r)^2 + H^2 = l^2$ $S_б = \pi l(R + r)$ $S = \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))$ $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$

Правильна n-кутна піраміда	Позначення	Формули
	l — бічне ребро, a — сторона основи, h — апофема, H — висота, $S_о$ — площа основи, $S_б$ — площа бічної поверхні, V — об'єм	$V = \frac{1}{3}S_оH$ $S_б = \frac{1}{2}nah$ $l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
Куля та її частина	**Позначення**	**Формули**
Куля 	R — радіус кулі, S — площа поверхні кулі, V — об'єм кулі	$S = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Кульовий сегмент 	H — висота кульового сегмента, R — радіус кулі, V — об'єм	$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$
Кульовий сектор 	H — висота сегмента, R — радіус кулі, V — об'єм кульового сектора	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

Історичний коментар



Оскільки задачі про вимірювання об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл мають чітко прикладне спрямування, то серед стереометричних задач вони розв'язувалися історично першими. Для окремих видів многогранників методи обчислення їхніх об'ємів знаходимо ще в єгипетських папірусах і вавилонських табличках, хоча, звичайно, вони наводяться без обґрунтувань. Учені стародавньої Греції, насамперед Демокріт (бл. 460–370 рр. до н.е.), Евдокс Кнідський (бл. 408–355 рр. до н.е.) і в найбільш досконалій формі — Архімед (287–212 рр. до н.е.), наводять і обґрунтовують відомі нам способи обчислення об'ємів основних геометричних тіл. При цьому Архімед застосовує так званий метод вичерпування, який розвинули у своїх працях Й. Кеплер (1571–1630), Б. Кавальєрі (1598–1647), Е. Торрічеллі (1608–1647), Б. Паскаль (1623–1662) та ін., що, зрештою, привело до поняття інтеграла.

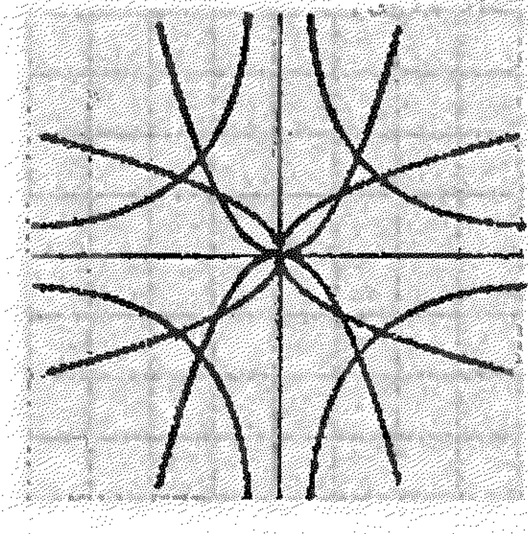
Хоча основні принципи, пов'язані з вимірюванням довжин, площ, об'ємів кривих фігур, почали формуватись ще у стародавній Греції, у XIX ст. вони були суттєво переглянуті. Перш за все, французьким математиком О. Коші (1789–1857) була побудована формальна теорія границь, а це означає, що набуло строгого логічного обґрунтування поняття дійсного числа та відповідності між точками числової прямої і дійсними числами.

У той же час глибока і на перший погляд зрозуміла та прозора ідея тлумачення довжини кривої, як спільної границі послідовностей вписаних та описаних ламаних, чи площі кривої поверхні, як спільної границі площ вписаних та описаних многогранних поверхонь, і т. ін. вимагала уточнення і перегляду. Такі математики, як італієць Д. Пеано (1858–1932), німець К. Шварц (1843–1921), француз К. Жордан (1838–1922) та ін. побудували приклади кривих та поверхонь складної будови, для яких відповідні послідовності ламаних чи многогранних поверхонь мали різні границі або ж зовсім не мали границь у «старому» розумінні, і тим самим сприяли формуванню нових поглядів на теорію вимірювань. Сучасна математика у питаннях вимірювання орієнтується на теорію міри, побудованої французькими математиками А. Лебегом (1875–1941) та Ф. Борелем (1871–1956).

Розділ 7.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Закономірності, які властиві кожному явищу, проявляють себе через сукупність випадковостей. Для багатьох явищ вплив випадку є настільки суттєвим, що дослідження їх неможливе без вивчення і кількісної оцінки такого впливу. **Теорія ймовірностей** розглядає математичні моделі явищ, що враховують вплив випадку. Аналізом результатів, одержаних за допомогою ймовірнісних моделей, займається **математична статистика.** Вона розробляє методи, які дають змогу за результатами випробувань робити певні висновки щодо процесів та явищ, що вивчаються. У даному розділі систематизуються, повторюються, розширюються і поглиблюються поняття і факти теорії ймовірностей і математичної статистики, з якими ви познайомились у молодших класах.



Ґотуємось до вивчення теми «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики»

Для підготовки до вивчення теми доцільно повторити матеріал, пов'язаний зі статистикою, ймовірністю, комбінаторикою, який вивчався у молодших класах. Його стисло представлено у вигляді таблиць.

Випадкова подія та її ймовірність

Таблиця 49

Поняття	Зміст поняття
Випадкова подія	Це такий наслідок випробувань, який при виконанні певного комплексу умов може настати, а може і не настати.
Частота випадкової події	Це відношення кількості випробувань, у яких настала випадкова подія, до загальної кількості проведених випробувань.
Частота випадкової події як оцінка її ймовірності	Для того, щоб за частотою випадкової події можна було оцінити її ймовірність, кількість випробувань має бути досить великою і випробування мають бути статистично стійкими, тобто такими, щоб при повторенні серій випробувань частота події змінювалась несуттєво.
Класичне означення ймовірності	Якщо випробування закінчується одним з n рівноможливих наслідків, з яких m наслідків приводять до настання події A, то ймовірністю події A називають відношення $\frac{m}{n}$.

Початкові відомості про статистику

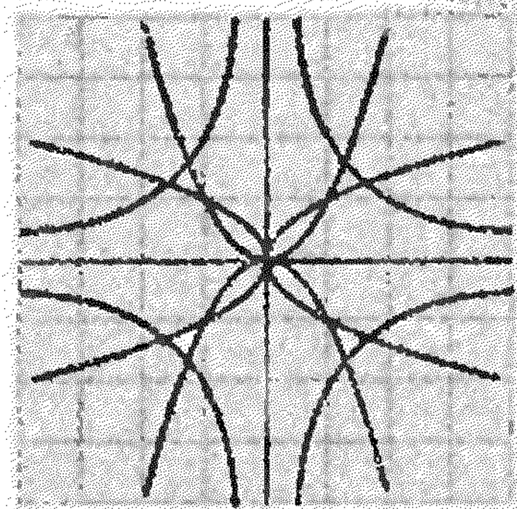
Таблиця 50

Поняття	Зміст
Вибірка	Сукупність об'єктів, серед яких проводять дослідження. Вибірка має бути великою за обсягом і репрезентативною.
Частота	$n_1, n_2, \ldots, n_m$ — частоти даних $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (n_i — кількість разів, що зустрічається x_i у вибірці, $i = 1, 2, \ldots, m$).
Частотна таблиця	<table><tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_m</td></tr><tr><td>n_i</td><td>n_1</td><td>n_2</td><td>...</td><td>n_m</td></tr></table>
Вибіркове середнє	$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_m n_m)$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ — об'єм вибірки.
Мода вибірки	Елемент вибірки, який зустрічається найчастіше, тобто має найбільшу частоту.
Відносна частота	$\frac{n_i}{n}$ — відношення частоти до об'єму вибірки.
Медіана вибірки	Елемент упорядкованої за зростанням вибірки, який поділяє її навпіл.

Розв'язання комбінаторних задач

Таблиця 51

Приклад	Метод розв'язання
Туристична група з Вінниці планує побувати у Києво-Печерській, Почаївській і Святогорській лаврах. Скільки можна скласти різних маршрутів для їхнього відвідування?	***Метод перебору.*** КПС, КСП, ПКС, ПСК, СКП, СПК — всього 6 (лаври позначені першими літерами їхніх назв).



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики»

1. Підкинули правильний гральний кубик. З якою ймовірністю випаде менше 5 очок?

А. $\frac{2}{3}$. Б. $\frac{1}{2}$. В. $\frac{1}{3}$. Г. $\frac{1}{6}$.

2. У лотереї 10 виграшних білетів і 240 білетів без виграшу. Якою є ймовірність виграти в цій лотереї, купуючи один білет?

А. $\frac{1}{24}$. Б. $\frac{24}{25}$. В. $\frac{1}{250}$. Г. $\frac{1}{25}$.

3. Грані кубика пофарбовані у білий або ж у чорний колір. Ймовірність випадення білої грані при його підкиданні дорівнює $\frac{1}{3}$, а чорної — $\frac{2}{3}$. Скільки білих і чорних граней у цього кубика?

А. 1 і 2. Б. 1 і 5. В. 3 і 3. Г. 2 і 4.

4. У коробці простих олівців утричі більше, ніж кольорових. Навмання виймається один олівець. Якою є ймовірність того, що він простий?

А. $\frac{1}{4}$. Б. $\frac{1}{3}$. В. $\frac{2}{3}$. Г. $\frac{3}{4}$.

5. У деякій книжці у кожному уривку тексту із 150 літер літера «о» зустрічається в середньому 12 разів. З якою частотою у цій книжці зустрічається буква «о»?

А. 0,08. Б. $\frac{1}{15}$. В. $\frac{1}{12}$. Г. 0,12.

6. Гральну кістку підкинули 20 разів. Отримали такі результати: 5, 2, 2, 1, 6, 6, 1, 3, 5, 2, 2, 4, 3, 1, 1, 6, 4, 2, 5, 3. Чому дорівнює відносна частота події «випало три очки»?

А. 0,3. Б. 0,15. В. 0,2. Г. 0,25.

7. Відомо, що частота випадення канцелярської кнопки вістрям угору дорівнює 0,56. Скільки раз підкидали кнопку, якщо вістрям угору вона випала 280 разів?

А. 1000. Б. 500. В. 840. Г. 560.

8. Скільки пострілів було зроблено, якщо частота влучень дорівнює 0,7, а кількість промахів дорівнює 12?

А. 28. Б. 36. В. 40. Г. 42.

9. Випущено сто лотерейних білетів з одинадцятьма грошовими виграшами, з яких вісім — по 10 грн., два — по 50 грн. і один — 100 грн. З куплених 25 білетів три виграли по 10 грн. і один виграв 50 грн. Інші залишилися без виграшу. Порівняйте ймовірність p події «куплений білет безвиграшний» при купівлі одного білета і частоту υ цієї події в описаному експерименті.

А. $p < \upsilon$. Б. $p = \upsilon$. В. $p > \upsilon$.

Г. Порівняти неможливо.

10. Із урни, що містить 10 білих і 6 чорних кульок, навмання вийняли 8 кульок. Яка з наступних подій є достовірною?

А. Серед витягнутих кульок не всі однокольорові.

Б. Серед витягнутих кульок є чорні.

В. Серед витягнутих кульок є білі.

Г. Витягнуті кульки різного кольору.

11. У деякому будинку три сім'ї не мають велосипедів, 20 мають по одному велосипеду, 15 сімей — по 2 велосипеди і дві сім'ї — по три велосипеди. Знайдіть середню кількість велосипедів, яка припадає на одну сім'ю у цьому будинку.

А. 2. Б. 1,5. В. 1,4. Г. 1.

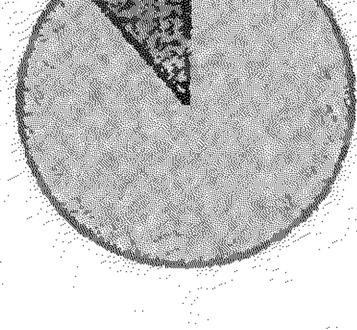
12. На контрольній роботі учням було запропоновано 6 задач. Діаграма відображає, скільки учнів розв'язали кожну кількість задач від 0 до 6. Скільки учнів виконували контрольну роботу?

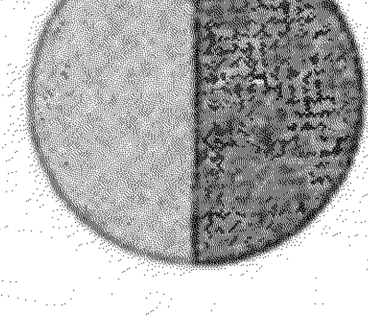
А. 21. Б. 50.

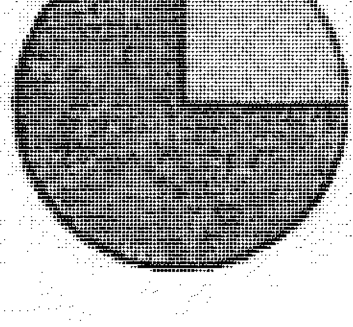
В. 45.

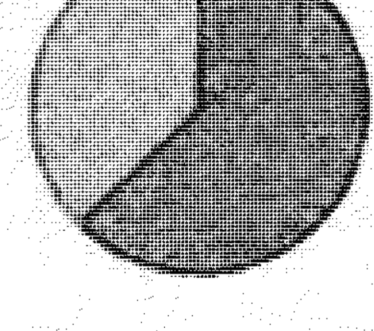
Г. Визначити неможливо.

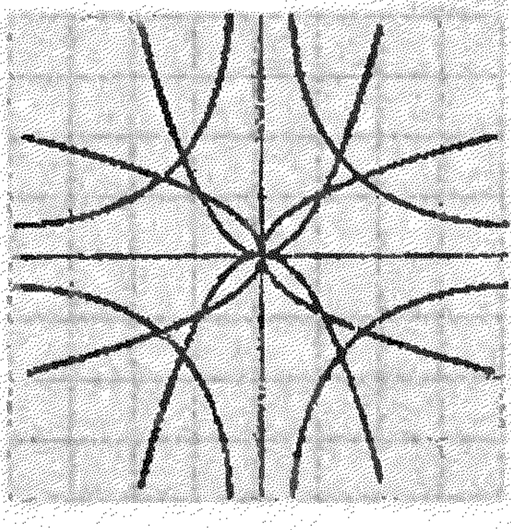
13. В деякому класі 25 учнів, серед яких 23 учні мають з математики від 4 до 9 балів, а 2 учні — від 10 до 12 балів. Яка з діаграм найкраще характеризує ці дані?

А. 

Б. 

В. 

Г. 



§20. Випадкові події та їхні ймовірності

У даному параграфі розглядатимуться поняття випадкового випробовування, випадкової події та її ймовірності.

1. Випадкове випробовування і випадкова подія

Б

У реальному житті ми на кожному кроці зустрічаємось із явищами, результат перебігу яких не можна заздалегідь передбачити. До таких явищ належать, наприклад, страхування людини від нещасного випадку або майна, транспортних засобів (неможливо однозначно передбачити: чи трапиться та пригода, від якої проводиться страхування); вантажні роботи в порту (неможливо точно вгадати, скільки часу займуть вантажні операції на тому чи іншому судні); гра у рулетку (заздалегідь неможливо знати, в якому секторі зупиниться кулька) тощо.

Деякі приклади таких явищ ви розглядали у молодших класах. Це і підкидання монети, грального кубика, канцелярської кнопки, купівля лотерейного білета, витягування кульки зі скриньки. Проаналізуємо ці та подібні явища.

По-перше, всі випробовування, про які йшлося, можна провести ***багаторазово***. Так, можна купити багато лотерейних білетів, багато разів підкидати гральний кубик, багато разів витягати кулі зі скриньки, стріляти по мішені, грати в рулетку, застрахувати багато людей, розвантажити багато суден.

По-друге, розглядувані випробовування проходять приблизно ***в однакових умовах***. Не змінюється центр ваги кубика при повторних його підкиданнях. В одній і тій самій лотереї заздалегідь визначена кількість виграшів, і вона не змінюється в ході реалізації білетів до проведення тиражу. По мішені стріляє той самий стрілець з тієї самої зброї, положення мішені не змінюється. Страхування відбувається на однакових умовах, розвантаження певного типу суден із тим самим характером вантажу з тим самим його упакуванням здійснюється приблизно в однакових умовах.

По-третє, як ми наголошували вище, наслідки цих випробовувань ***неоднозначні***. Так, при підкиданні грального кубика заздалегідь невідомо, яка кількість очок випаде. При купівлі лотерейного білета заздалегідь невідомо, чи випаде на нього виграш чи не випаде, а якщо випаде, то який. При витягуванні кулі зі скриньки невідомо, якого кольору вона буде.

Наявність усіх трьох умов робить випробовування випадковим. ***Під випадковим випробуванням будемо розуміти будь-яку дію, яку можна повторити велику кількість разів у приблизно однакових умовах і результати якої передбачити неможливо.***

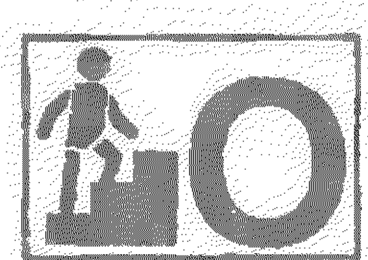
Для терміну «випадкове випробовування» синонімами є ***випадковий експеримент***, ***випадковий дослід***.

Приклад 1. Які з наступних випробовувань можна вважати випадковими: 1) стрільба по мішені; 2) нагрівання води в чайнику; 3) купівля лотерейного білета; 4) обертання рулетки в грі «Поле чудес»; 5) вступ юнака до ліцею; 6) багаторічні спостереження над погодою в той самий день року в одній і тій самій місцевості; 7) підкидання кнопки; 8) участь команди «Шахтар» у першості України?

□ Випробовування 1), 3), 4), 6), 7) є випадковими, справджуються всі три зазначені умови. Радимо самостійно їх перевірити. Нагрівання води в чайнику при звичайних умовах не є випадковим випробовуванням, бо при 100°C вода закипить. Результат відомий заздалегідь. Вступ юнака до ліцею також не є випадковим випробовуванням, бо його не можна повторити багаторазово. Участь команди «Шахтар» у першості України хоча і повторюється багаторазово, і результат не можна передбачити однозначно, не є випадковим випробовуванням, бо змінюються умови, в яких відбувається ця участь. ■

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, притаманні випадковим випробовуванням. У попередніх класах ви познайомились з поняттям випадкової події. Випадкові події виникають у результаті проведення випадкових випробовувань. ***Будь-який наслідок випадкового випробовування будемо називати випадковою подією.*** В результаті такого випробовування випадкова подія може або відбутися, або не відбутися. Випадкові події позначатимемо великими латинськими літерами A, B, C, ... Випадковими подіями є, наприклад, «випадання парної кількості очок» при підкиданні грального кубика, «влучення в ціль» при пострілі, «виграш» при придбанні лотерейного білета, «судно розвантажили за 10 годин» тощо.

Раніше ми розрізняли ***достовірні*** події (вони відбувались завжди у випробовуванні), ***неможливі*** події (вони ніколи не відбувались у випробовуванні) і ***випадкові***. Надалі всі події, пов'язані з випадковими випробовуваннями, ми будемо називати випадковими, а неможливі і достовірні події розглядати як їхні окремі, граничні різновиди.



Звертаємо увагу на те, що та сама подія в одному досліді може бути достовірною, а в іншому — випадковою, що не є ні достовірною, ні неможливою, і навіть неможливою.

Приклад 2. У скриньці 3 білі, 3 чорні і 3 червоні кулі. Скільки куль потрібно вийняти зі скриньки, щоб обов'язково мати кулі трьох кольорів?

□ Якщо вийняти 1 чи 2 кулі, то ***неможливо*** одержати кулі трьох кольорів. Якщо вийняти 7, 8 чи 9 куль, то ***обов'язково*** одержимо кулі всіх трьох кольорів. Якщо вийняти 3, 4, 5 чи 6 куль, то можливо, але не обов'язково, будемо мати кулі трьох кольорів. ■

Відповідь. 7, 8 або 9.

У першому випадку ми мали справу з ***неможливою подією*** («одержати кулі трьох кольорів при витягуванні однієї чи двох куль») — вона ні в якому разі не відбувається в розглянутій ситуації, у другому випадку — з ***достовірною подією*** («одержати кулі трьох кольорів при витягуванні 7, 8 чи 9 куль») — вона обов'язково відбувається в цій ситуації, у третьому випадку — з ***випадковою подією***, яку не можна вважати ні достовірною, ні неможливою («одержати кулі трьох кольорів при витягуванні 3, 4, 5 чи 6 куль») — вона може відбутися в розглянутій ситуації, а може і не відбутися.

У цьому прикладі розглядалися три досліди: витягування від 1 до 2 куль, від 3 до 6 куль, від 7 до 9 куль. Як бачите, та сама подія («витягнуто кулі трьох кольорів») у третьому випробовуванні є достовірною, в першому — неможливою, в другому — ні достовірною, ні неможливою.

Контрольні запитання

1°. У наступних ситуаціях наведіть приклад випадкового випробовування, випадкової події: а) народження дитини; б) гра в баскетбол; в) контроль за якістю виробів; г) участь у лотереї; ґ) вибір поля футбольною командою?

2°. Чи можна до проведення випадкового випробовування однозначно передбачити, чи настане випадкова подія?

3. Чи можна вважати, що подія «Петрик вступив до ліцею» є випадковою?

4. Чи можна вважати, що подія «Космічний корабель вийшов на задану орбіту» випадковою?

5. Які з наступних подій не можна вважати ні достовірними, ні неможливими: 1) «учень за контрольну роботу отримав 8 балів»; 2) «при підкиданні грального кубика випало від 1 до 6 очок»; 3) «випав герб при підкиданні монети»; 8) «при підкиданні грального кубика випало 7 очок»?

2. Ймовірність випадкової події

При одноразовому виконанні випадкового випробовування на появу деяких випадкових подій можна сподіватися з більшою підставою, ніж на появу інших. Потрібна їхня кількісна характеристика шансів настання деякого результату випробовування, підрахунку міри випадковості події. З такою характеристикою ви знайомі з курсу алгебри. Йдеться про ймовірність події.

Якщо випробовування закінчується одним з N рівноможливих наслідків, з яких $N(A)$ наслідків приводять до настання події A, то ймовірністю події A називають відношення $\dfrac{N(A)}{N}$.

Ймовірність події A позначається символом $P(A)$.

***Ймовірність** — від латинського слова probabilitas.*

Це означення ймовірності події називають ***класичним.*** Наведемо приклади його застосування.

Приклад 3. Один раз підкинуто гральний кубик. Чому дорівнює ймовірність того, що на верхній грані кубика виявиться: 1) парна кількість очок; 2) кількість очок, більша від двох?

□ У задачі йдеться про випадковий дослід — одноразове підкидання грального кубика. Його наслідками слугують кількості очок, які можуть випасти. Це: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Усього їх 6: $N = 6$. Якщо кубик правильний, симетричний, тобто центр ваги кубика знаходиться в його центрі, то ці наслідки є рівноможливими.

1) До події A — «випала парна кількість очок» приводять наслідки 2, 4, 6, $N(A) = 3$. Отже, $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

2) До події B — «кількість очок більша від 2» приводять наслідки 3, 4, 5, 6, $N(B) = 4$, $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. ■

Відповідь. 1) 0,5; 2) $\frac{2}{3}$.

Приклад 4. Підкинули дві монети. Якою є ймовірність того, що: 1) обидві вони впадуть вгору гербом; 2) одна впаде догори гербом, а інша — цифрою?

□ Усього можливі 4 результати: ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ, $N = 4$. Всі вони рівноможливі (монети вважаємо симетричними).

1) Обидві монети впадуть гербом вгору (подія A) при одному результаті ГГ, $N(A) = 1$. Тому $P(A) = 0{,}25$.

2) Одна монета впаде гербом догори, а інша — догори цифрою (подія B) при двох наслідках ГЦ чи ЦГ, $N(B) = 2$. Отже, $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. ■

Відповідь. 1) 0,25; 2) 0,5.

Аналізуючи розв'язання розглянутої задачі, прийдемо до наступної схеми обчислення ймовірності за класичним означенням ймовірності:

1) з'ясувати, який дослід розглядається в задачі;
2) вказати його наслідки та обчислити їхню кількість;
3) з'ясувати, чи можна наслідки досліду вважати рівноможливими, якщо так, то чому;
4) з'ясувати, ймовірність якої події потрібно знайти;
5) вказати, які наслідки досліду приводять до цієї події або сприяють їй;
6) підрахувати кількість сприятливих наслідків досліду;
7) обчислити ймовірність події за розглянутою формулою.

Класичне означення ймовірності дає змогу отримати найпростіші властивості ймовірності.

Властивість 1. Ймовірність неможливої події дорівнює 0.

□ Неможливій події (будемо позначати її через V) не сприяє жодний наслідок, чисельник у формулі для ймовірності дорівнює нулю: $P(V)=\frac{N(V)}{N}=\frac{0}{N}=0$. ■

Властивість 2. Ймовірність достовірної події дорівнює 1.

□ Достовірній події (будемо позначати її через U) сприяє кожен наслідок досліду, чисельник дорівнює знаменнику:

$$P(U)=\frac{N(U)}{N}=\frac{N}{N}=1.\ ■$$

Властивість 3. Ймовірність будь-якої випадкової події знаходиться між 0 і 1.

□ Для будь-якої випадкової події чисельник невід'ємний і не більший від знаменника: $0\le P(A)=\frac{N(A)}{N}\le 1$. ■

Якщо деяка подія A не настає, то кажуть, що настала протилежна їй подія $\bar{A}$. Вона настає тоді і тільки тоді, коли A не настає.

Подія $\bar{A}$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A не відбувається, називається протилежною до події A.

Так, у досліді з одним пострілом у мішень до події A — «влучення в ціль» протилежною є подія $\bar{A}$ — «невлучення в ціль». У досліді з придбанням лотерейних білетів до події A — «жоден з придбаних білетів не виграв» протилежною є подія $\bar{A}$ — «хоча б один з придбаних білетів виграв».

Зрозуміло, що якщо подія $\bar{A}$ протилежна до події A, то подія A протилежна до події $\bar{A}$. Події A і $\bar{A}$ називаються ***протилежними***.

Властивість 4. Сума ймовірностей протилежних подій A і $\bar{A}$ дорівнює 1.

□ Очевидно, що $N(A)+N(\bar{A})=N$, бо при кожному наслідку досліду відбувається одна і тільки одна з подій: A або $\bar{A}$. Тому $\frac{N(A)}{N}+\frac{N(\bar{A})}{N}=\frac{N}{N}=1$, $P(A)+P(\bar{A})=1$ або $P(\bar{A})=1-P(A)$. ■

Формула класичної ймовірності передбачає, що наслідки досліду є рівноможливими. Рівноможливість наслідків є проявом симетрії наслідків досліду. Симетрія в природі — це і геометрична симетрія, і різного роду однорідність, наприклад, однорідність матеріалу. На запитання, які випадки вважати рівноможливими, математика відповіді не дає. Якщо монета виготовлена з однорідного матеріалу, якщо вона не сточена, якщо її неупереджено кинули, то ми маємо рацію вважати наслідки «випадання герба» і «випадання цифри» рівноможливими. Так само при підкиданні «правильного» грального кубика всі шість наслідків даного досліду природно вважати рівноможливими. Якщо зі скриньки з кулями навмання, випадково витягається куля, причому після кожного витягування куля повертається в скриньку, вміст скриньки ретельно перемішується, а потім витягається наступна куля, то ми маємо рацію вважати наслідки цього експерименту рівноможливими.

Для «неправильного» кубика (наприклад, на одну грань прикріпили шматочок пластиліну) наслідки досліду з його підкиданням не є рівноможливими. Так само не можна вважати рівноможливими наслідки підкидання кнопки чи ґудзика несиметричної форми, наприклад, з петелькою, чи «неправильної» монети. Якщо у скриньці кулі розрізняються за масою, то при перемішуванні, очевидно, більш важкі кулі виявляться внизу скриньки, і наслідки досліду з витягуванням кулі навряд чи можна буде вважати рівноможливими.

Якщо в умові задачі говориться, що вибір якихось елементів здійснюється навмання, випадково, то це говорить про те, що наслідки цього вибору вважаються рівноможливими.

Перевірити припущення про рівноможливість наслідків досліду можна експериментально, провівши досить велику кількість дослідів. Про це ми поговоримо докладніше у наступному пункті.

Контрольні запитання

1°. Чи можна вважати рівноможливими наступні наслідки дослідів:

а) «на куплений лотерейний білет випав виграш» і «на куплений лотерейний білет не випав виграш»;

б) «зі скриньки з п'ятьма однаковими кулями, перенумерованими числами 1, 2, 3, 4, 5, при витягуванні навмання витягли кулю №1 і витягли кулю №2»;

в) «випав герб» і «випала цифра» при підкиданні симетричної монети;

г) «гравець у казіно виграв» і «гравець у казіно не виграв»;

ґ) «промах» і «влучання» у відмінного стрільця;

д) «випав герб» і «випала цифра» при підкиданні деформованої монети;

е) випало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при підкиданні правильного грального кубика;

є) випало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при підкиданні деформованого грального кубика?

2. При проведенні експерименту можуть настати 10 рівноможливих наслідків, що взаємно виключають один одного. Чому дорівнює ймовірність події, яка відбувається:

а) тільки при одному наслідку;

б) при кожному з двох певних наслідків?

3. У результаті експерименту відбуваються рівноможливі події, які взаємно виключають одна одну. Ймовірність кожної з них дорівнює 0,05. Чому дорівнює кількість цих подій?

4°. Петрик купив один білет лотереї, в якій розігруються 10 призів і випущено 120 білетів. Якою є ймовірність того, що він виграє приз?

5. З ящика, який містить білі та чорні кулі, витягують чотири кулі. Якою є подія, протилежна до події:

а) «вийнято хоча б одну білу кулю»;

б) «вийнято більше двох білих куль»;

в) «серед вийнятих куль білих немає»?

3. Відносна частота випадкової події

Класичне означення ймовірності має обмежену область застосувань, оскільки далеко не завжди у реальних ситуаціях можна виділити скінченну кількість рівноможливих наслідків. Наведемо приклад. Чи можна, спостерігаючи за стрільцем-спортсменом, визначити, якою є його ймовірність влучання в мішень? Відповісти на це запитання за допомогою класичного означення неможливо. У даному випадку розглядається випадковий дослід — стрільба по мішені, у нього два наслідки: влучив у мішень і не влучив. Однак ці наслідки не можна вважати рівноможливими, тому не можна застосувати класичне означення ймовірності. У подібних випадках застосовний так званий статистичний підхід. Він базується на понятті ***відносної частоти події***. Нагадаємо її означення.

Кількість дослідів, у яких відбулася деяка подія, називається частотою цієї події. Відношення кількості дослідів, у яких відбулася деяка подія, до загальної кількості дослідів, проведених у тих самих умовах, називається відносною частотою цієї події.

Позначатимемо відносну частоту випадкової події A через $\nu(A)$. Якщо проведено n дослідів, у $n(A)$ з яких настала подія A, то $\nu(A)=\frac{n(A)}{n}$. Наприклад, нехай гральний кубик підкинули 150 разів, причому 1 очко на верхній грані з'явилось 26 разів. Тут 26 — це частота події «випало 1 очко», а відношення $\frac{26}{150}\approx 0{,}173$ — відносна частота цієї події. У попередньому абзаці, виділеному жирним шрифтом, 210 букв. Буква «о» там зустрічається 20 разів, тобто частота появи букви «о» у цьому уривку тексту дорівнює 20, а відносна частота — $\frac{20}{210}\approx 0{,}095$.

Відносну частоту події іноді виражають у відсотках. У розглянутих прикладах маємо: відносна частота випадання одного очка при 150 підкиданнях грального кубика наближено дорівнює 17,3%; відносна частота появи букви «о» у виділеному відрізку тексту наближено дорівнює 9,5%.

Із означення відносної частоти події випливають її найпростіші властивості.

Властивість 1. Відносна частота неможливої події дорівнює 0.

☐ Неможлива подія V не відбулася в жодному випробовуванні, чисельник у формулі для відносної частоти дорівнює нулю, тому $\nu(V) = \frac{0}{n} = 0$. ■

Властивість 2. Відносна частота достовірної події дорівнює 1.

☐ Достовірна подія U настає в кожному випробовуванні, чисельник дорівнює знаменнику: $\nu(U) = \frac{n}{n} = 1$. ■

Властивість 3. Відносна частота будь-якої випадкової події знаходиться між 0 і 1.

☐ Для довільної події A чисельник у формулі для відносної частоти невід'ємний і не більший від знаменника: $0 \le \nu(A) = \frac{n(A)}{n} \le 1$. ■

Властивість 4. Сума відносних частот протилежних подій дорівнює 1.

☐ Зрозуміло, що $n(A) + n(\bar{A}) = n$, оскільки в кожному досліді відбувається одна і тільки одна із подій: A або $\bar{A}$. Тому $\frac{n(A)}{n} + \frac{n(\bar{A})}{n} = \frac{n}{n} = 1$. ■

Наведені властивості відносної частоти збігаються з найпростішими властивостями ймовірності, які були розглянуті у попередньому пункті. Цей факт наштовхує нас на висновок про те, що відносну частоту події можна розглядати як оцінку (наближене значення) її ймовірності. На користь цього висновку говорять результати дослідів з підкиданням монети, проведених багатьма дослідниками (див. таблицю 52).

Таблиця 52

Дослідник	Кількість підкидань монети	Кількість випадань герба (подія A)	Відносна частота події A
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
Де Морган	4092	2048	0,5005
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
В. Феллер	10000	4979	0,4979
К. Пірсон	24000	12012	0,5005
В. Романовський	80640	40151	0,4979

Ці дані показують, що відносна частота появи будь-якої сторони монети близька до 0,5, тобто до ймовірності події A. Зауважимо, що з цієї таблиці видно, що від серії дослідів до серії відносні частоти події «випав герб» мінялися, але вони групувалися навколо того самого числа 0,500, хоча практично жодна з них у точності не дорівнювала 0,500. Такі досліди називають ***статистично стійкими.*** Зверніть увагу також на те, що кожний дослідник проводив велику кількість дослідів. Отже, відносну частоту події можна прийняти в якості оцінки її ймовірності, якщо:

1) кількість дослідів є досить великою;
2) досліди є статистично стійкими.

Відносну частоту події можна використовувати для експериментальної перевірки припущення про рівноможливість наслідків досліду.

Отже, з одного боку, результати експериментів дозволяють перевірити, наскільки можна довіряти теоретичним висновкам, а з іншого боку — порівнювати, оцінювати шанси в тих випадках, коли всі наслідки досліду перебрати не можна, або якщо вони мають різні шанси.

У статистичному підході до оцінювання ймовірності події важливим є поняття статистичної стійкості досліду. Відносна частота подій, підрахована за результатами статистично стійких дослідів, мало і не систематично змінюється від однієї серії дослідів до іншої і, взагалі кажучи, коливається тим менше, чим більше проведено спостережень, за якими підраховується ця відносна частота.

Приклад таких дослідів наведено вище (див. таблицю 52). Наведемо ще приклади статистично стійких дослідів.

Випадковими випробовуваннями, що мають статистично стійкий характер, є народження дітей. Статистично стійкими дослідами є експерименти Г. Менделя, пов'язані з вирощуванням гороху (відносна частота проростання жовтого гороху приблизно дорівнює 0,75, зеленого — 0,25). Якщо проаналізувати тексти якоїсь книжки, то неважко виявити, що відносні частоти, наприклад, події «зустрілась літера о» у достатньо довгих уривках тексту будуть близькі до числа 0,091.

У результаті аналізу цих і подібних прикладів ми приходимо до наступного означення.

Якщо відносна частота події від серії до серії з великої кількості дослідів коливається навколо деякого числа, то такі досліди називають статистично стійкими, а число, навколо якого коливається відносна частота події, приймається за ймовірність цієї події.

! Наявність у події за певних умов ймовірності, що дорівнює p, виявляється в тому, що майже в кожній достатньо довгій серії дослідів відносна частота події приблизно дорівнює p.

На рис. 353 зображено графік залежності відносної частоти $\frac{n(Г)}{n}$ появи герба при 12 підкиданнях монети з результатами ГГЦГЦЦГГЦЦЦГ... (Г — поява герба, Ц — поява цифри) від кількості підкидань n.

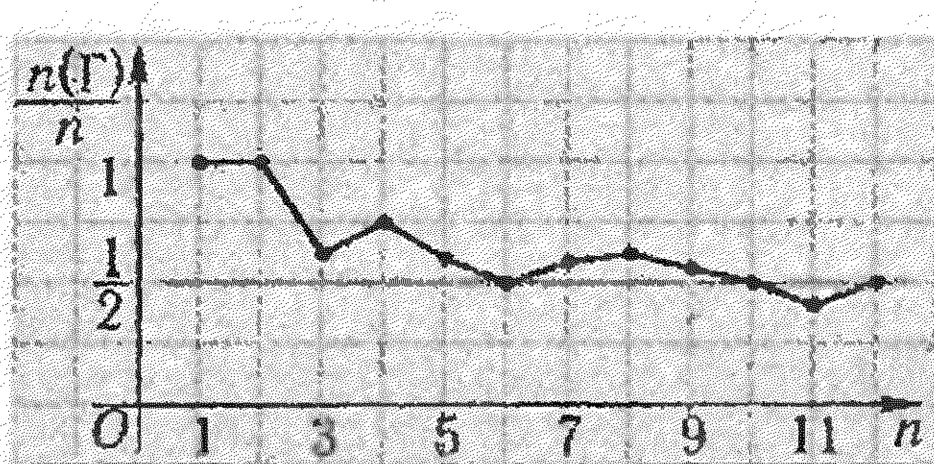


Рис. 353

При $n > 10$ відносна частота коливається навколо числа 0,5, яке і приймають як ймовірність події «випадання герба при одному підкиданні монети».

Отже, якщо говорять, що ймовірність деякої події дорівнює, наприклад, 0,82, то це практично означає, що, в середньому, в кожних 100 дослідах, проведених приблизно в однакових умовах, ця подія відбувається приблизно 82 рази.

Таким чином, кожній події відповідає число від 0 до 1, яке називають ймовірністю і яке описує, наскільки вірогідне настання даної події при кожному виконанні випадкового експерименту.

Приклад 5. Деяке підприємство виробляє масову продукцію. Якщо виріб, що надійшов у продаж, виходить з ладу протягом одного року, то його замінюють запасним. Скільки запасних виробів необхідно виготовити, якщо протягом року продають N виробів? Для спрощення припустимо, що вихід з ладу запасного виробу неможливий.

☐ Вважатимемо, що подія A — «відмова виробу» — має деяку ймовірність p. Нехай протягом року вийшло з ладу m виробів. Тоді $\frac{m}{N}$ — відносна частота події A. Якщо N — досить велике число, то $\frac{m}{N} \approx p$. Звідси $m \approx N \cdot p$. На практиці досить часто ймовірність p невідома. Для її оцінки (наближеного обчислення) проводять деяке число n випробувань виробів протягом року. Якщо за цей час відмовить k виробів, то $\frac{k}{n}$ — відносна частота події A. При досить великому значенні n можемо вважати, що $\frac{k}{n} \approx p$. Тоді $m \approx \frac{Nk}{n}$. ■

Подібні методи використовують при оцінюванні врожаю на полі за врожаєм на деякій кількості невеликих ділянок; питомої густини мінералів за результатами зважування деякої кількості зразків; вологості зерна на приймальних пунктах; волокнистості бавовни тощо.

Контрольні запитання

1. Гральний кубик підкидався тричі, при цьому випало, відповідно, 2, 2, 5 очок. Чи можна за цими даними вказати наближене значення ймовірності події: «при підкиданні грального кубика випало два очки»?
2°. Ймовірність настання події A в деякому досліді дорівнює 0,72. Чи можна стверджувати, що у 100 таких самих дослідах, проведених в тих самих умовах, ця подія настане рівно 72 рази?
3°. Для контролю за якістю продукції деякого заводу з кожної партії готових виробів відбирають на перевірку 150 деталей. Перевірку не витримують, у середньому, 6 деталей. Як оці-

нити ймовірність випуску бракованих деталей заводом: а) в даний час; б) після вдосконалення технології виробництва?

4. Знаючи відносну частоту події, охарактеризуйте відповідне явище:
1) відносна частота реалізованих пенальті для даного футболіста дорівнює 0,8;
2) відносна частота пенальті, узятих даним воротарем, дорівнює 0,2;
3) відносна частота робочих днів на підприємстві, в яких досягалася намічена мета, дорівнює 0,88;
4) відносна частота виявлення бракованої деталі рентгеном дорівнює 0,8.

Задачі

359°. Які з наступних випробовувань можна вважати випадковими:
1) страхування транспортних засобів;
2) олімпійські ігри;
3) інвестиційна діяльність банків;
4) поширення епідемій;
5) запуск космічного корабля;
6) передача генів від батьків до потомків?

360°. Які з наступних подій — випадкові:
1) за період страхування автомобіль не потрапив у жодну аварію;
2) на олімпійських іграх команда України посіла друге місце;
3) фірма, яку інвестував банк, не повернула кредиту;
4) епідемія була швидко локалізована;
5) дитина успадкувала від обох батьків гени того самого типу?

361. У скриньці лежать декілька однакових за розмірами котушок з нитками трьох кольорів: чорні, білі і коричневі. Зі скриньки взяли навмання 4 котушки ниток. Чи будуть серед узятих котушок напевно:
1) хоча б дві з чорними нитками;
2) хоча б дві з нитками одного кольору;
3) хоча б три з чорними нитками;
4) хоча б три з нитками одного кольору?

Наведіть приклади випадкових, зокрема достовірних, неможливих подій, пов'язаних із розглянутим дослідом.

362. У сумці лежать однакові за формою цукерки двох сортів: 9 цукерок першого сорту і 6 цукерок другого сорту. Не дивлячись, із сумки вийняли 8 цукерок.

1) Чи буде серед них напевно хоча б одна цукерка першого сорту?

2) Чи буде серед них напевно хоча б одна цукерка другого сорту?

3) Скільки цукерок треба вийняти із сумки, щоб серед них напевно були цукерки першого сорту?

4) Скільки цукерок треба вийняти із сумки, щоб серед них напевно були цукерки обох сортів?

Наведіть приклади випадкових, зокрема достовірних, неможливих подій, пов'язаних з розглянутим дослідом.

363°. Урна містить 10 білих і 8 чорних куль. З урни навмання беруть одну кулю. Якою є ймовірність того, що вона буде: 1) чорною; 2) білою?

364°. З ретельно перемішаної колоди з 36 карт навмання беруть одну карту. Якою є ймовірність того, що вона виявиться: 1) пікової масті; 2) тузом; 3) червоної масті; 4) «картинкою» (тобто валетом чи дамою, чи королем, чи тузом)?

365°. З набору доміно, що складається з 28 пластинок, навмання береться одна пластинка. Якою є ймовірність того, що вона: 1) буде містити 6 очок; 2) виявиться дублем; 3) виявиться не дублем?

366°. З букв слова *математика* навмання беруть одну букву. Якою є ймовірність того, що це виявиться: 1) буква *м*; 2) буква *а*; 3) буква, що позначає голосний звук; 4) буква, що позначає приголосний звук?

367. Числа від 1 до 15 написані на 15 картках по одному на кожній. Вибирають навмання одну картку. Чому дорівнює ймовірність того, що написане на цій картці число: 1) ділиться на 5; 2) є парним; 3) є непарним; 4) є точним квадратом; 5) двоцифрове; 6) просте?

368. Підкинуто два правильні гральні кубики. Якою є ймовірність того, що сума очок, що випали, буде: 1) парною; 2) меншою від 5, 3) більшою від 8; 4) простим числом; 5) ділитися на 3?

369. У ящику є білі і чорні кульки. Білих кульок 10. Відомо, що ймовірність витягти білу кульку при випадковому витягуванні однієї кульки дорівнює $\frac{2}{7}$. Скільки чорних кульок у ящику?

370. У слові — 8 літер, що відповідають голосним звукам. Відомо, що ймовірність натрапити навмання на таку літеру, дорівнює 0,4. Скільки всього літер у слові?

371. В ящику в три рази більше червоних куль, ніж чорних (кулі однакові у всьому, крім кольору). Навмання виймають одну кулю. Якою є ймовірність того, що вона: 1) червона; 2) чорна?

372°. У будь-якій книжці на середній сторінці виберіть 10 повних рядків тексту. Обчисліть кількість літер, які характеризують голосні звуки, і, зокрема, літери «е» в кожному з рядків. Який у середньому відсоток від усіх літер рядка становить: 1) літера «е»; 2) літера, яка характеризує голосний звук? Виконайте подібний дослід з іншою книгою і порівняйте результати.

373°. Скількох промахів допустився стрілець, якщо частота влучень дорівнює 0,7, а було зроблено 50 пострілів?

374°. Відносна частота пар взуття для дорослих, проданих у магазині за день, дорівнює 0,6. У цей день продали 24 пари дитячого взуття. Скільки всього пар взуття продали в цей день?

375. Проводиться послідовне підкидання монети, після кожного з яких підраховується відносна частота події «випав герб». Які з наведених нижче числових послідовностей можуть відповідати зазначеному досліду:

1) $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots;$ 2) $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \ldots;$

3) $0; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \ldots;$ 4) $\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$?

376°. Для перевірки якості було досліджено 200 деталей, серед яких 5 виявились бракованими. Якою можна вважати ймовірність того, що навмання взята деталь буде: 1) придатною; 2) бракованою? Скільки бракованих деталей виявиться, в середньому, в партії з 1000 деталей?

377°. Ймовірність того, що в навмання взятій сім'ї деякого селища є телевізор, дорівнює 0,998.

1) Скільки, в середньому, телевізорів буде в 500 сім'ях цього селища?

2) Скільки приблизно опитали сімей у цьому селищі, якщо нарахували 1497 телевізорів?

378. Виконайте дослід із підкиданням грального кубика 100 разів, записуючи всі результати досліду. Результатом вважатимемо кількість очок, що випали. Їх можна записати у таку таблицю.

№ досліду	1	2	3	4	5	...
Кількість очок	3	5	2	3	1	...

Обчисліть відносну частоту появи кожної кількості очок. Чи підтверджують підрахунки передбачення того, що ймовірність кожного наслідку дорівнює $\frac{1}{6}$?

379. Випущено сто лотерейних білетів з одинадцятьма грошовими виграшами, з яких вісім — по 10 грн., два — по 50 грн. і один — 100 грн. З куплених 25 білетів три виграли по 10 грн. і один виграв 50 грн. Решта були без виграшу. Знайдіть ймовірність і відносну частоту події: 1) «куплений білет безвиграшний»; 2) «на придбаний білет випадає виграш 10 грн., 50 грн., 100 грн.». Порівняйте ймовірності цих подій з відповідними відносними частотами.

Вправи для повторення

380. Під час зустрічі четверо приятелів потиснули один одному руки. Скільки було рукостискань?

381. Скільки існує трицифрових чисел, складених із цифр 0, 4, 8, якщо: 1) цифри не повторюються; 2) цифри можуть повторюватись?

382. Скількома способами можна розподілити 4 олівці між двома дітьми, якщо: 1) олівці різні; 2) олівці однакові?

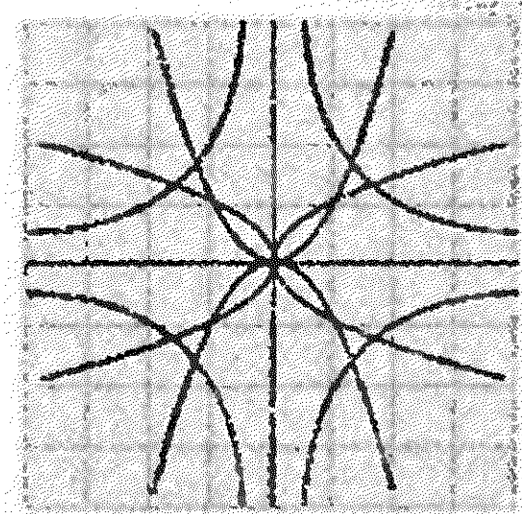
Підсумок

Основні поняття

Означення	Приклади, формули
Під випадковим випробуванням розуміють будь-яку дію, яку можна повторити велику кількість разів у приблизно однакових умовах і результати якої передбачити неможливо.	Витягування кульки зі скриньки. Надання швидкої медичної допомоги.
Будь-який наслідок випадкового випробування називається випадковою подією.	Витягли зі скриньки білу кульку. У станцію швидкої допомоги надійшло 10 викликів.
Якщо випробовування закінчується одним з N рівноможливих наслідків, з яких $N(A)$ наслідків приводять до настання події A, то ймовірністю події A називають відношення $\frac{N(A)}{N}$.	$P(A)=\frac{N(A)}{N}$.
Кількість дослідів m, у яких відбулася деяка подія, називається частотою цієї події. Відношення кількості дослідів, у яких відбулася деяка подія, до загальної кількості дослідів n, проведених у тих самих умовах, називається відносною частотою цієї події.	$\nu(A)=\frac{m}{n}$.
Якщо відносна частота події від серії до серії з великої кількості дослідів коливається навколо деякого числа, то такі досліди називають статистично стійкими, а число, навколо якого коливається відносна частота події, приймається за ймовірність цієї події.	$P(A)\approx\nu(A)$.

Головні твердження

Ймовірність неможливої події V дорівнює 0.	$P(V) = 0.$
Ймовірність достовірної події U дорівнює 1.	$P(U) = 1.$
Ймовірність будь-якої випадкової події A знаходиться між 0 і 1.	$0 \le P(A) \le 1.$
Відносна частота неможливої події V дорівнює 0.	$\nu(V) = 0.$
Відносна частота достовірної події U дорівнює 1.	$\nu(U) = 1.$
Відносна частота будь-якої випадкової події A знаходиться між 0 і 1.	$0 \le \nu(A) \le 1.$



§21. Елементи комбінаторики

У даному параграфі вивчаються методи обчислення кількості різних комбінацій із заданих об'єктів, що задовольняють ті чи інші умови. Такі задачі називаються **комбінаторними**.

1. Комбінаторне правило множення

Розглянемо дослід, кількість наслідків якого важко підрахувати перебором.

Приклад 1. У приміський потяг з дев'яти вагонів сідають 4 особи, довільно обираючи вагони. Якою є ймовірність того, що вони опиняться в різних вагонах?

Наслідки досліду, описаного у прикладі, є наборами номерів вагонів, обраних 4 особами. Виписати всі наслідки досліду (а їх понад 6000) досить важко. Необхідно мати спеціальні методи, які б дозволили підрахувати кількість наслідків.

Один із способів розв'язання цієї задачі ґрунтується на так званому основному правилі комбінаторики. Перш ніж формулювати його, розглянемо наступний приклад.

Приклад 2. З міста A в місто B ведуть п'ять шляхів, а з B у C — три. Скільки шляхів, що проходять через B, ведуть з A в C?

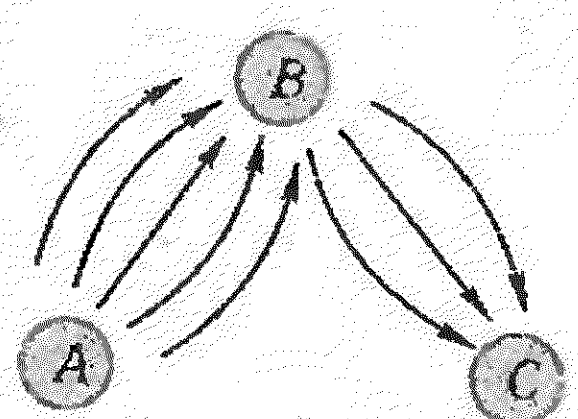


Рис. 354

□ Для кожного з п'яти способів дістатися із міста A в місто B існують три способи доїхати із B в C (рис. 354). Отже, із A в C можна дістатися $5 \cdot 3 = 15$ шляхами. ■

Метод розв'язування, який використано у прикладі 2, допускає узагальнення. Відповідне твердження називається ***основним правилом комбінаторики***, або ***комбінаторним правилом множення***.

*Термін «**комбінаторика**» походить від латинського слова combina — сполучати, з'єднувати.*

Правило множення.

Якщо об'єкт A можна вибрати m способами і якщо після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n способами, то вибір пари (A, B) у вказаному порядку можна виконати $m \cdot n$ *способами*.

Зверніть увагу на те, що яким би способом не був вибраний об'єкт A, другий об'єкт має вибиратися однаковою кількістю способів.

Узагальнимо розглянуте правило множення.

Якщо об'єкт A_1 може бути вибраний n_1 різними способами, об'єкт A_2 — n_2 різними способами і так далі, об'єкт A_k — n_k різними способами, то k об'єктів A_1, A_2, ..., A_k у вказаному порядку можна вибрати $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ способами.

Розв'яжемо тепер приклад 1.

□ Для обчислення шуканої ймовірності необхідно обчислити загальну кількість наслідків досліду і кількість тих із них, з яких складається подія, ймовірність якої обчислюється. Обчислимо кількість способів, за допомогою яких 4 особи можуть вибрати для себе вагони з 9, що є у потягу. Перша особа може вибрати будь-який з 9 вагонів. Який би вагон вона не вибрала, друга особа матиме теж 9 можливостей для вибору. Отже, дві особи можуть вибрати вагони $9 \cdot 9 = 81$ способом. Міркуючи так само, далі дійдемо висновку, що загальна кількість наслідків досліду, що розглядається, дорівнює $9^4 = 6561$.

Подія A «4 особи опиняться в різних вагонах» складається з наслідків досліду, де всі вагони різні. Перша особа може вибрати вагон 9-ма способами. Для будь-якого її вибору друга особа матиме лише 8 можливостей (в один з вагонів вона вже не може потрапити), отже, дві особи можуть вибрати вагони $9 \times 8 = 72$-ма способами. Продовжуючи так само, отримаємо, що загальна кількість наслідків досліду, при яких настає подія A, дорівнює: $N(A) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Усі наслідки рівноможливі, оскільки вагони вибираються навмання. Тому

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{9^4}\approx 0{,}461. \blacksquare$$

Відповідь. $\approx 0{,}461$.

Контрольні запитання

1°. Скільки існує двоцифрових чисел, у яких обидві цифри парні?

2°. Один учень має 7 книг з математики, а другий — 9 детективів. Скількома способами можна обміняти одну книгу першого учня на одну книгу другого?

3. Скількома способами можна відправити 4 термінові листи, якщо для цього використати трьох кур'єрів і кожного листа можна дати будь-якому з кур'єрів?

4°. У крамниці продаються 5 різних видів виделок, 3 різні типи ножів і 4 різні види ложок. Скількома способами можна підібрати комплект із виделки, ножа і ложки?

5. Скількома способами 6 різних олівців можна розподілити поміж трьома дітьми?

2. Комбінаторне правило додавання

Перш ніж сформулювати наступне комбінаторне правило, розглянемо модифікований приклад 2.

Приклад 3. Нехай, як і у прикладі 2, з міста A в місто B ведуть 5 доріг, а з міста B у місто C — три. Нехай, крім того, з міста A в місто D можна потрапити трьома шляхами, із D в C — чотирма (рис. 355). Скількома способами можна дістатися з A в C?

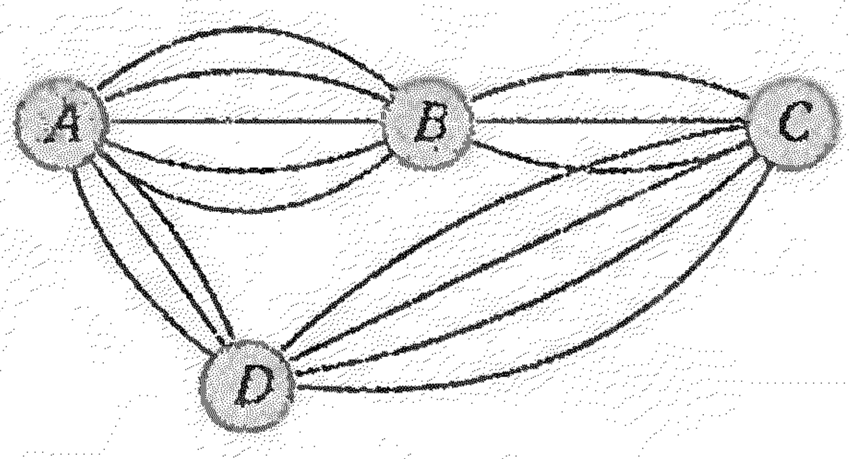


Рис. 355

□ Можливими є 2 випадки: коли шлях із A в C проходить через місто B, або ж через місто D. У кожному з цих випадків кількість різних маршрутів легко підрахувати, скориставшись правилом множення. У першому випадку є $5\times 3=15$ маршрутів; у другому — $3\times 4=12$ варіантів. Отже, загальна кількість маршрутів дорівнює $15+12=27$. ■

Відповідь. 27.

У розглянутій задачі всі маршрути були розбиті на два класи, причому кожен маршрут входить в один і тільки в один клас. У цьому випадку загальна кількість маршрутів дорівнює сумі кількостей маршрутів в обох класах. Відповідне твердження називають **правилом додавання**.

Правило додавання.

Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а інший об'єкт B можна вибрати n способами, причому жоден із способів вибору A не співпадає з якимось способом вибору B, то вибір «або A, або B» можна виконати $m + n$ способами.

Приклад 4. З урни, яка містить 7 куль, занумерованих числами 1, 2, ..., 7, навмання витягують одну за одною з поверненням 3 кулі. Якою є ймовірність того, що цифри трицифрового числа, утвореного номерами витягнутих куль, мають однакову парність?

□ Загальна кількість N наслідків досліду (витягування трьох куль з поверненням) обчислюється аналогічно тому, як це робилось при розв'язанні прикладу 1, і дорівнює $7^3 = 343$ (номер кожної витягнутої кулі може набувати будь-якого значення від 1 до 7). Позначимо через A подію: «цифри трицифрового числа, утвореного номерами витягнутих куль, мають однакову парність». Ця подія відбувається тоді і тільки тоді, коли всі цифри непарні (подія A_1) або всі цифри парні (подія A_2). Кількість наслідків, що сприяють настанню події A_1, дорівнює 4^3 (є 4 варіанти для кожної цифри: 1, 3, 5, 7). Обчислимо кількість наслідків, які сприяють настанню події A_2. Є 3 способи для вибору кожної з трьох цифр: 2, 4, 6. Отже, подія A_2 складається з 3^3 наслідків. За правилом додавання, маємо: $N(A) = 4^3 + 3^3 = 91$. Усі наслідки досліду рівноможливі, бо вибір здійснювався навмання. Таким чином, $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{91}{343} \approx 0{,}265$. ■

Відповідь. $\approx 0{,}265$.

За умов прикладу 4 знайдемо ймовірність того, що цифри трицифрового числа, утвореного номерами витягнутих куль, мають різну парність.

□ Один спосіб розв'язання цієї задачі ґрунтується на властивості ймовірностей протилежних подій: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Подія B — «цифри трицифрового числа, утвореного номерами витягнутих куль, мають різну парність» протилежна до події A — «цифри трицифрового числа, утвореного номерами витягнутих куль, мають однакову парність». Тому $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) \approx$

$\approx 1 - 0{,}265 = 0{,}735.$

Властивість ймовірностей протилежних подій підказує зручне правило для обчислення кількості способів утворення трицифрових чисел із цифрами різної парності: потрібно від загальної кількості трицифрових чисел, утворених номерами витягнутих куль, відняти кількість тих із них, що мають однакову парність: $343 - 91 = 252$. Тоді $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{252}{343} \approx 0{,}735$. ■

Ми фактично скористалися так званим ***правилом доповнення.***

Правило доповнення.

Щоб знайти кількість елементів деякої сукупності, що задовольняють певну умову, можна із загальної кількості елементів цієї сукупності відняти кількість тих її елементів, які не задовольняють цю умову.

Приклад 5. Чому дорівнює кількість чотирицифрових чисел, утворених з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, що містять принаймні одну парну цифру?

□ Обчислимо спочатку загальну кількість чотирицифрових чисел, які можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5. Скористаємось правилом множення. Першу цифру можна вибрати п'ятьма способами, на її місці може стояти будь-яка цифра, окрім нуля, при кожному її виборі другою цифрою може бути будь-яка з шести цифр. Отже, перші дві цифри можна вказати $5 \cdot 6$ способами. Для кожного з них третю цифру можна вибрати шістьма способами і т.д. Кількість усіх таких чотирицифрових чисел дорівнює $5 \cdot 6^3 = 1080$. Тепер обчислимо кількість чотирицифрових чисел, утворених з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, усі цифри яких є непарними. Таких чисел $3^4 = 81$ (кожну цифру можна вибрати трьома способами). Згідно з правилом доповнення, шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює $1080 - 81 = 999$. ■

Відповідь. 999.

При використанні правила додавання потрібно стежити, щоб жоден із способів вибору об'єкта A не співпадав з якимось способом вибору об'єкта B, тобто щоб жодна комбінація не потрапила відразу в два класи. Якщо такі збіги є, ми отримуємо $m + n - k$ способів вибору, де k — кількість збігів.

Приклад 6. У класі кожен учень вивчає принаймні одну іноземну мову: англійську або німецьку. 25 учнів вивчають англійську, 10 учнів — німецьку, а п'ятеро вивчають обидві мови. Скільки учнів у класі? Скільки з них вивчають тільки німецьку мову?

□ У класі 25 учнів вивчають англійську мову, 10 — німецьку. При цьому п'ятеро з них вивчають обидві мови, тобто вони увійшли і в число тих, хто вивчає англійську, і в число тих, хто вивчає німецьку мову. Інакше кажучи, якщо обчислимо суму 25 + 10, ми їх врахуємо двічі. Тому в класі 25 + 10 – 5 = 30 учнів. Німецьку мову вивчають 10 школярів, з них і англійську вивчають п'ятеро. Відтак, тільки німецьку вивчають 10 – 5 = 5 учнів. ■

Відповідь. 30; 5.

Ми скористалися так званим ***загальним правилом додавання.*** Його можна сформулювати таким чином.

Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B — n способами, причому при k способах одночасно вибираються і A, і B, то вибір «A або B» можна виконати $m + n - k$ способами.

Приклад 7. Скільки чисел у першій сотні, що не діляться ні на 2, ні на 3?

□ Обчислимо спочатку кількість чисел першої сотні, що діляться на 2 або на 3. Кожне друге число в натуральному ряду ділиться на 2, кожне трете — на 3. Тому в першій сотні є 50 чисел, що діляться на 2, і 33 числа, що діляться на 3. Але серед перших і других є числа, що діляться і на 2, і на 3, тобто такі, що діляться на 6. На 6 ділиться кожне шосте число в натуральному ряду, тобто в першій сотні таких чисел 16. Отже, кількість чисел у першій сотні, що діляться на 2 або на 3, дорівнює: 50 + 33 – 16 = 67. Всі інші не діляться ні на 2, ні на 3. Цих чисел: 100 – 67 = 33. ■

Відповідь. 33.

Контрольні запитання

1. Скільки є двоцифрових чисел, у яких обидві цифри мають різну парність?
2. Скільки є трицифрових чисел, у яких принаймні одна цифра парна?
3. В урні 10 куль, з яких — 7 білих куль і 3 червоні кулі. З неї одну за одною з поверненням витягли дві кулі. Якою є ймовірність того, що вони обидві білі?
4. У спортивній секції 15 учасників. Усі вони займаються стрибками у довжину або у висоту. 8 осіб займаються стрибками у довжину, 10 — стрибками у висоту. Скільки спортсменів займаються обома видами стрибків?
5. Чотири грані дерев'яного кубика пофарбовані у червоний, синій, зелений, чорний кольори, а дві інші — всіма цими чотирма кольорами. Якою є ймовірність того, що при підкиданні цього кубика верхня грань виявиться зеленою або синьою?

3. Основні комбінаторні схеми

Ґрунтуючись на основних комбінаторних правилах, проаналізуємо важливі комбінаторні схеми.

Розглянемо завдання, в яких доводиться підраховувати кількість способів, за допомогою яких n різних предметів можна розташувати на n місцях. Такі розташування називають ***перестановками.***

Приклад 8. Скількома способами можна розставити на п'ятимісному сушилі п'ять різних тарілок?

☐ Застосуємо комбінаторне правило множення. Першу тарілку можна поставити на будь-яке місце з п'яти, другу тарілку — на будь-яке місце з тих 4-х, що залишилися, третю — на будь-яке з тих 3-х місць на сушилі, що залишилися, і так далі. Таким чином, всього виходить: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способів. ■

Відповідь. 120.

Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ є добутком п'яти перших натуральних чисел, його скорочено позначають $5!$ і читають «5 — факторіал». І взагалі добуток перших n ($n > 1$) натуральних чисел $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ позначають $n!$ і читають «n — факторіал». Зрозуміло, що $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 24$.

Оскільки $n! = (n-1)! \times n$ для всіх натуральних чисел $n > 1$, то щоб ця рівність залишалася справедливою і для $n = 1$, вважають, що $1! = 1$, $0! = 1$.

Аналогічно попередньому завданню можна одержати, що n різних предметів можна розташувати в ряд $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ різними способами, тобто **кількість перестановок з n елементів дорівнює n!**

Змінимо дещо умову прикладу 8.

Приклад 9. Скількома способами можна розставити на десятимісному сушилі п'ять різних тарілок?

☐ Знову застосуємо комбінаторне правило множення. Першу тарілку можна поставити на будь-яке з десяти місць на сушилі, другу тарілку — на будь-яке місце з тих 9 місць, що залишилися, третю — на будь-яке з тих 8 місць на сушилі, що залишилися, і так далі. Таким чином, всього виходить: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ способів. ■

Відповідь. 30240.

Проаналізуємо розв'язану задачу. Ми мали 10 різних елементів (місць на сушилі), з яких потрібно було вибрати 5 (для 5 тарілок). Отже, дослід полягав у виборі п'яти елементів з 10 різних елементів. Цей вибір є вибором без повернення (на місце, вибране для однієї тарілки, не можна поставити й іншу). Результатом цього вибору є набори з номерів вибраних місць на сушилі. Такі набори будемо називати ***вибірками***. У даному разі маємо вибірки з 10 елементів по 5, тобто вибірки, утворені з 10 різних елементів, і кожна з них містить 5 елементів. Зауважимо, що всі елементи вибірки є різними. Такі вибірки називатимемо ***вибірками без повернення*** (вибрали один елемент, а наступний вибираємо із сукупності елементів, що залишилися). Якщо у вибірці поміняти місцями два елементи, то отримаємо іншу вибірку, яка описує інше розташування тарілок на сушилі. Відтак порядок розміщення елементів у вибірці є суттєвим, такі вибірки будемо називати ***впорядкованими***.

Впорядковані вибірки без повернення з n елементів по r ($r \le n$) називають розміщеннями з n елементів по r, їхню кількість позначають A_n^r.

У прикладі 9 ми мали: $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

У загальному випадку, за аналогією, маємо, що A_n^r дорівнює добутку r послідовних натуральних чисел, найбільше з яких дорівнює n, або

$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1).$$

Виведемо тепер формулу для обчислення кількості невпорядкованих вибірок без повернення з n елементів по r ($r \le n$). Такі вибірки називають ***комбінаціями з n елементів по r.***

> ***Комбінація** — латинською combination — від combinare — з'єднувати, поєднувати.*

Їхню кількість позначають C_n^r (читається: кількість комбінацій із n елементів по r). Ідею виведення пояснимо на прикладі. Маємо 4 елементи a, b, c, d. Випишемо всі невпорядковані вибірки без повернення по 3 елементи в кожній, тобто комбінації з 4-х по 3: (a, b, c); (a, b, d); (a, c, d); (b, c, d).

Із кожної з цих вибірок (їх C_4^3) утворимо всі перестановки з трьох елементів (їх 3!). Тим самим ми побудуємо всі впорядковані вибірки з 4-х по 3:

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

Як відомо, кількість упорядкованих вибірок без повернення з 4-х по 3 дорівнює $A_4^3 = 4\cdot3\cdot2$. Таким чином, $A_4^3 = C_4^3\cdot3!$, звідси $C_4^3 = \dfrac{A_4^3}{3!}$.

У загальному випадку, за аналогією, маємо:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}.$$

Приклад 10. Обчислити C_5^2; C_{10}^4.

□ $C_5^2 = \dfrac{5\cdot4}{2!} = 10;$ $\quad C_{10}^4 = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 210.$ ■

Приклад 11. Із ящика, який містить 20 придатних і 5 бракованих виробів, навмання витягують три вироби. Чому дорівнює ймовірність того, що: 1) всі вироби придатні; 2) придатні лише два вироби?

□ Оскільки порядок виймання виробів не має значення, то наслідками досліду є невпорядковані вибірки без повернення з 25 елементів по 3. Наслідки досліду рівноможливі, їхня кількість дорівнює: $N = C_{25}^3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300.$

1) Подія A — «всі вироби придатні» — складається з тих вибірок, елементами яких є придатні вироби, тобто з невпорядкованих вибірок без повернення з 20 елементів по 3: $N(A) = C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$ $= 1140$; $P(A) = \frac{1140}{2300} \approx 0{,}496.$

2) Подія B — «придатні лише два вироби» — настає тоді і тільки тоді, коли витягли два придатні вироби (це можна зробити $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$ способами) і один бракований (для цього існує $C_5^1 = 5$ способів). За правилом множення: $N(B) = 190 \times 5 = 950.$ Отже, $P(B) = \frac{950}{2300} \approx 0{,}413.$

Відповідь. 1) $\approx 0{,}496$; 2) $\approx 0{,}413$.

Контрольні запитання

1°. Скільки перестановок можна утворити з букв слова «слон»?

2°. Чому дорівнює: а) $20! \times 21$; б) $n! \times (n + 1)$; в) $\frac{50!}{48}$; г) $\frac{n!}{(n-1)!}$?

3. Придумайте завдання, відповіддю для якого слугує: а) $5!$; б) C_{10}^4; в) A_8^3.

4. Чотирицифровий номер автомобіля можна тлумачити як вибірку з 10 цифр. Ця вибірка впорядкована чи — невпорядкована? З поверненням чи ні?

5. Ящик містить як придатні, так і браковані вироби. Для перевірки відбираються без повернення 10 виробів. Отримана вибірка впорядкована чи — невпорядкована?

Задачі

383°. У майстерні, де виготовляють ключі, є 12 типів заготовок. Із кожної заготовки можна виготовити ключ, зробивши виступ в одному з п'яти місць. Розмір виступу на кожному місці може набувати трьох різних значень. Скільки різних типів ключів може виготовити майстерня?

384. У класі 25 учнів. Щодня призначається один черговий. Скількома способами можна скласти розклад на 5 днів так, щоб жоден учень не чергував більше одного разу?

385°. Два учні мають по 20 марок і по 10 значків. Вони обмінюють марку на марку або значок на значок. Скількома способами вони можуть здійснити такий обмін?

386°. Скільки можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4: 1) двоцифрових чисел; 2) двоцифрових чисел з різними цифрами; 3) двоцифрових непарних чисел; 4) двоцифрових непарних чисел з різними цифрами; 5) двоцифрових чисел з непарними цифрами; 6) двоцифрових чисел з різними непарними цифрами; 7) двоцифрових чисел, що містять принаймні одну парну цифру?

---

387. У ліфт восьмиповерхового будинку на першому поверсі ввійшло 5 осіб. Кожна з них може вийти з однаковими шансами на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайдіть ймовірність того, що всі п'ятеро вийдуть: 1) на третьому поверсі; 2) на одному поверсі; 3) на різних поверхах.

388. Із карток з цифрами 0, 1, 2, 3, 4 навмання вибирають три без повернення. Знайдіть ймовірність того, що номери вибраних карток утворюють трицифрове число, кратне 5.

389. Підкинули три гральні кубики. Якою є ймовірність того, що на всіх кубиках випаде парне число?

390. Абетка племені Пінг–Понг складається з п'яти букв П, І, Н, Г, О. Словом є будь-яка послідовність, що складається не більше ніж із чотирьох букв. Скільки слів у мові племені Пінг–Понг?

391. У коледжі студенти вивчають математику або економіку. 200 студентів вивчають математику, 150 — економіку. Скільки студентів в коледжі, якщо: 1) 20 студентів вивчають обидва предмети; 2) жоден із студентів-математиків не вивчає економіку; 3) кожен студент-економіст вивчає математику?

392. Із букв слова «словник» утворюються слова з чотирьох букв (тобто довільні послідовності чотирьох букв). Якою є ймовірність того, що навмання утворене слово містить літери, які характеризують лише голосні звуки або лише приголосні звуки?

393. На шахівниці розмірами 8×8 навмання вибрали два квадрати. Якою є ймовірність того, що вибрано: 1) чорний та білий квадрати; 2) два білі квадрати; 3) однокольорові квадрати?

394. Скількома способами з 10 спортсменів можна відібрати 4 особи для участі:
1) у змаганнях з бігу на 100 метрів;
2) в естафеті 100 м + 200 м + 400 м + 800 м?

395. З урни, яка містить 3 білі кулі та 7 чорних куль, навмання витягують одразу дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що:
1°) обидві кулі чорні; 2°) обидві кулі білі;
3) одна куля біла, друга — чорна.

Вправи для повторення

396. Завод виготовляє електричні лампочки. Для контролю відібрано $n = 1000$ лампочок, серед яких бракованих виявилося $m = 120$. Оцініть ймовірність того, що виготовлена лампочка бракована.

397. Діаграма, зображена на рис. 356, містить інформацію про кількість опадів (у мм), що випали упродовж року в місті N. Користуючись діаграмою, установіть, які з наведених тверджень є правильними.

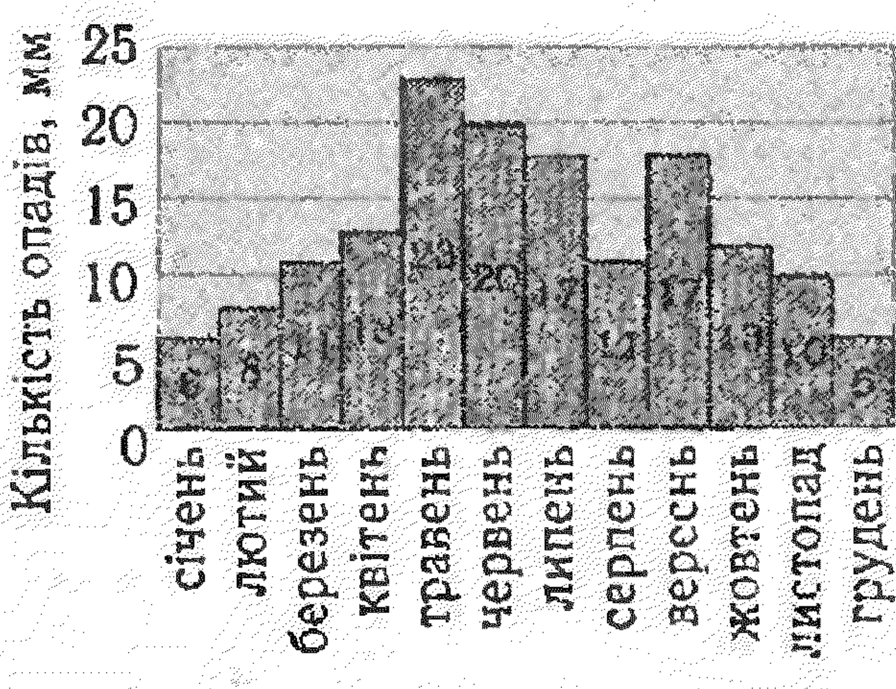


Рис. 356

I. Улітку опадів випало менше, ніж навесні.
II. У вересні опадів випало у 1,5 рази більше, ніж у жовтні.
III. Середня місячна кількість опадів за рік становить 19 мм.

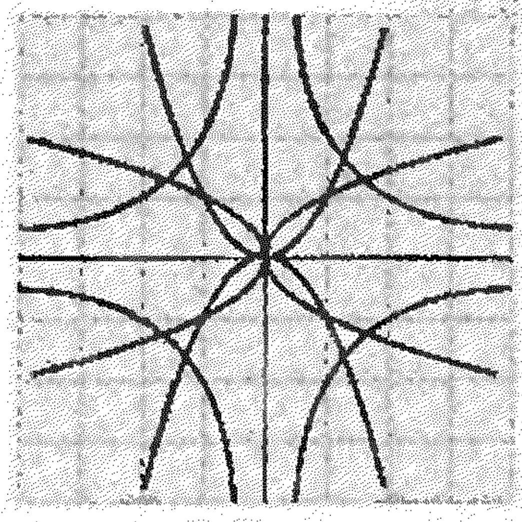
Підсумок

Основні поняття

Означення	Формули для обчислення
Впорядковані вибірки без повернення з n елементів по r $(r \le n)$ називають розміщеннями з n елементів по r.	$A_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$, $r \le n$
Впорядковані вибірки без повернення з n елементів по n називають перестановками з n елементів.	$A_n^n = n!$
Невпорядковані вибірки без повернення з n елементів по r $(r \le n)$ називають комбінаціями з n елементів по r.	$C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$, $r \le n$

Головні твердження

Якщо об'єкт A_1 може бути вибраний n_1 різними способами, об'єкт A_2 — n_2 різними способами і так далі, об'єкт A_k — n_k різними способами, то k об'єктів $A_1, A_2, \ldots, A_k$ можна вибрати $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.	Загальне комбінаторне правило множення
Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а інший об'єкт B — n способами, причому жоден із способів вибору A не співпадає з якимось способом вибору B, то вибір «або A, або B» можна виконати $m + n$ способами.	Комбінаторне правило додавання
Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B — n способами, причому при k способах одночасно вибираються і A, і B, то вибір «A або B» можна виконати $m + n - k$ способами.	Загальне комбінаторне правило додавання



§22. Вибірковий метод у статистиці

Дослідити велику сукупність об'єктів, про яку необхідно отримати інформацію, часто-густо немає можливості. Доводиться задовольнитись дослідженням її частини — вибірки. У даному параграфі дається уявлення про задачі статистики, сутність вибіркового методу, наводяться приклади його застосування.

1. Чим займається статистика?

Б

Стисла відповідь на поставлене запитання буде такою: вона навчає збирати, зображати, сприймати, застосовувати інформацію.

*Слово «**статистика**» має один корінь зі словом «state» (держава) і спочатку воно означало мистецтво і науку управління. Потім слово «статистика» стало означати збір даних про державу, а тепер — узагалі збір і обробку даних.*

Головними методами для збору інформації є опитування, спостереження, проведення експериментів, використання паперових, електронних джерел інформації тощо. Щоб школі отримати інформацію про результати проведення зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) можна провести опитування випускників. Якщо необхідно мати інформацію про попит на різні сорти хліба, варто провести відповідні спостереження. У разі потреби визначити різницю у стилях двох письменників доцільно, наприклад, підрахувати кількості різних слів в уривках однакової довжини з творів цих письменників. Подібні приклади можна продовжити.

Інформація, зібрана одним із зазначених методів, зазвичай буває хаотичною, незручною для її аналізу. Наприклад, результати ЗНО спочатку можуть мати такий вигляд (у балах):

153, 130, 169, 146, 121, 157, 128, 185, 135, 149, 125, 140, 185, 123, 162, 162, 130, 169, 130, 125, 180, 162, 135, 128, 123, 135, 128, 157, 130, 172.

Такі результати ми могли одержати, якщо опитували випускників у випадковому порядку або результати розмістили за алфавітним списком випускників. Щоб приступити до аналізу цієї інформації, доцільно упорядкувати одержані дані за зростанням чи спаданням, однакові дані не повторювати. Це можна зробити за допомогою таблиці.

Таблиця 53

x_i	121	123	125	128	130	135	140	146	149	153	157	162	169	172	180	185
n_i	1	2	2	3	4	3	1	1	1	1	2	3	2	1	1	2

У першому рядку таблиці стоять різні результати тестування. Їх зазвичай називають ***варіантами***. Числа у другому рядку показують, скільки разів зустрічається відповідна варіанта у сукупності даних. Їх називають ***частотами*** варіант. Загальну кількість даних n у сукупності (у розглянутому прикладі $n = 30$) називають ***об'ємом сукупності***. Наведена таблиця, тобто впорядкована сукупність варіант з їхніми частотами, називається ***варіаційним рядом***. У цьому прикладі варіанти задані у вигляді конкретних чисел. Такий варіаційний ряд називається ***дискретним***. Якщо значення величини задані у вигляді інтервалів, то такий варіаційний ряд називається ***інтервальним***. За даними таблиці 53 можна побудувати такий інтервальний варіаційний ряд.

Таблиця 54

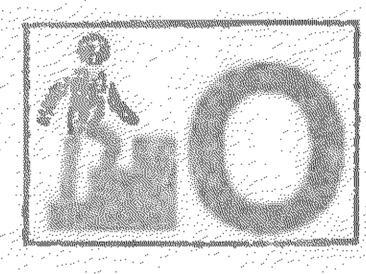
x_i	120–125	126–150	151–175	176–200
n_i	5	13	9	3

Нагадаємо, що ***відносною частотою варіанти x_i (інтервалу) називається відношення частоти n_i цієї варіанти (інтервалу) до об'єму n сукупності даних.*** Наприклад, відносна частота варіанти 130 дорівнює $\frac{4}{30} \approx 0{,}133$, а відносна частота інтервалу 151–175 дорівнює $\frac{9}{30} = 0{,}3$.

Будемо позначати відносну частоту варіанти x_i через ν_i: $\nu_i = \frac{n_i}{n}$.

***Варіанта** — від латинського variants (variantis) — змінний, той, що змінюється.*

Як ми бачили, зібрану інформацію зручно подавати у вигляді таблиць. З таблиць 53 і 54 можна зробити перші висновки про успішність випускників: 10% випускників набрали не більше, ніж 125 балів, 10% — більше від 175 балів. Виникає природне запитання: чи відповідають ці результати успішності учнів у школі? Отже, статистична інформація спонукає до подальших досліджень.



Розглядаються ще так звані ***кумулятивні*** варіаційні ряди. В таких рядах замість частот (або відносних частот) певних варіант (або інтервалів) записані накопичені частоти — числа, які дорівнюють кількості варіант, які не перевищують відповідної варіанти (якщо ряд дискретний) або верхньої границі інтервалу (якщо ряд інтервальний) — або накопичені відносні частоти. У таблицях 55 і 56 подані кумулятивні варіаційні ряди, побудовані за даними, наведеними у таблицях 53 і 54.

Таблиця 55

x_i	121	123	125	128	130	135	140	146	149	153	157	162	169	172	180	185
n_i	1	2	2	3	4	3	1	1	1	1	2	3	2	1	1	2
Накопичені частоти	1	3	5	8	12	15	16	17	18	19	21	24	26	27	28	30

Таблиця 56

x_i	120–125	126–150	151–175	176–200
n_i	5	13	9	3
Накопичені частоти	5	18	27	30

Контрольні запитання

1. Чи правильно, що в інтервальних варіаційних рядах втрачається інформація?
2. У яких межах знаходиться значення частоти варіанти?
3. У яких межах знаходиться значення відносної частоти варіанти?

4. Чи можна відносну частоту варіанти виразити у відсотках?
5. Яку накопичену частоту має найбільша варіанта сукупності, впорядкованої за зростанням?

2. Графічне зображення варіаційних рядів

Графічне зображення залежності між величинами надає їй необхідної наочності, конкретності. Графіки можуть бути певною основою для відкриття нових властивостей, співвідношень, закономірностей.

Найбільш уживаними графіками для зображення варіаційних рядів, тобто співвідношень між варіантами і відповідними частотами або відносними частотами, є ***полігон*** і ***гістограма***.

Полігон частот (або многокутник частот) використовується найчастіше для зображення дискретних рядів. Для побудови полігона у прямокутній системі координат на осі абсцис у довільно обраному масштабі відкладаються значення варіант, а на осі ординат також у довільно обраному масштабі — значення їхніх частот або відносних частот. Масштаб обирається такий, щоб була забезпечена необхідна наочність і рисунок мав бажані розміри. Далі в цій системі координат будуються точки, координати яких є парами відповідних чисел з варіаційного ряду. Одержані точки послідовно з'єднуються відрізками прямої.

> ***Полігон*** — *від грецького πολυγωνος (polygonos) — многокутний, від πολυ (poly) — багато і γωνια (gonia) — кут.*

Якщо полігон будується за даними інтервального ряду, то за абсциси точок беруть середини відповідних інтервалів.

Приклад 1. Побудувати полігон частот за даними таблиці 53.

☐ Будуємо у прямокутній системі координат точки з координатами (x_i, n_i) і з'єднаємо одержані точки відрізками. Одержаний полігон частот представлено на рис. 357. ■

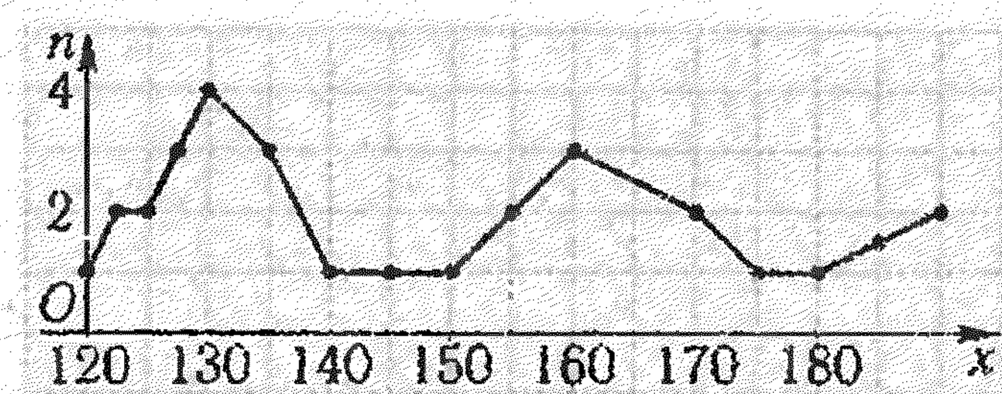


Рис. 357

Гістограма (стовпчаста діаграма) вживається для зображення інтервальних рядів. Для побудови гістограми за даними варіаційного ряду, як і побудови полігона, на осі абсцис відкладаються інтервали варіант, а на осі ординат — значення частот або відносних частот. Далі будуються прямокутники, за основи яких беруть відрізки осі абсцис, довжина яких дорівнює ширині інтервалу, а за висоти — відрізки, довжини яких дорівнюють частотам чи відносним частотам відповідних інтервалів. На рис. 358 представлено гістограму, побудовану за даними таблиці 54.

Гістограми зручно будувати за допомогою комп'ютерної програми Microsoft Excel (рис. 359).

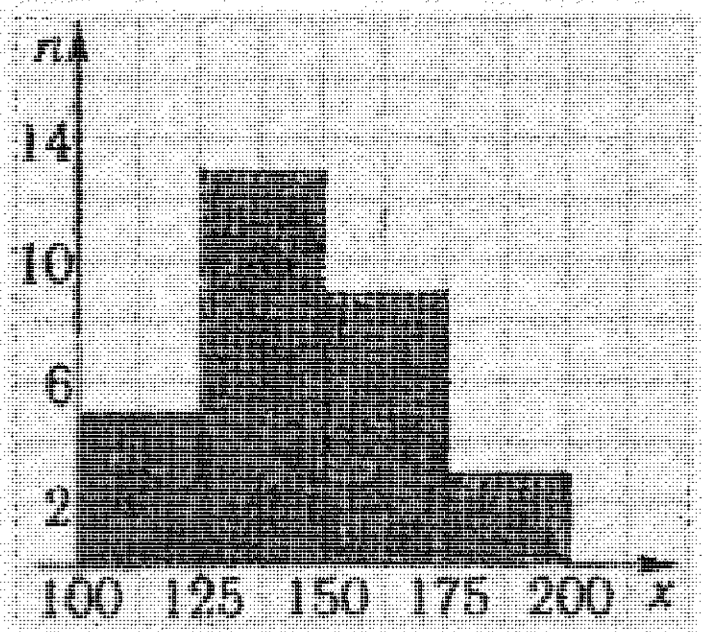


Рис. 358

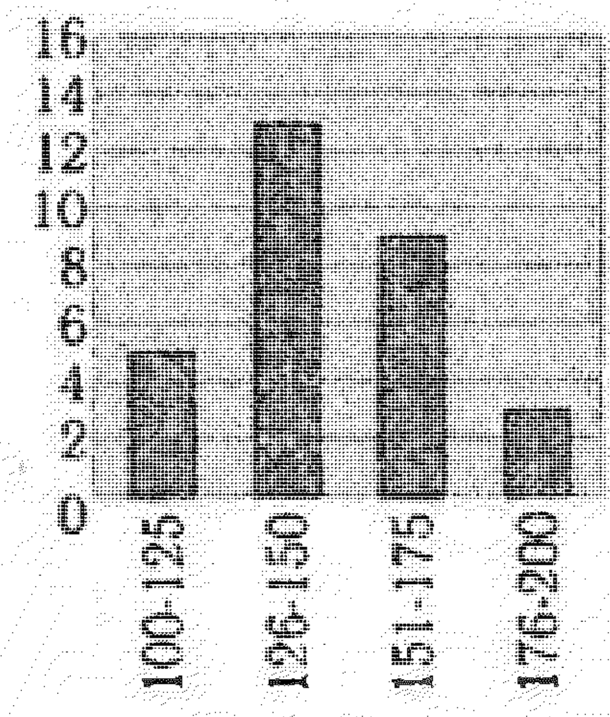


Рис. 359

Для графічного зображення кумулятивного варіаційного ряду служить *кумулята*. Для її побудови на осі абсцис відкладаються варіанти, а на осі ординат — накопичені частоти або накопичені відносні частоти. Масштаб на кожній осі обирається довільно. Далі будуються точки, абсцисами яких є варіанти (у випадку дискретних рядів) або верхні границі інтервалів (у випадку інтервальних рядів), а ординатами — відповідні накопичені частоти (накопичені відносні частоти). Одержані точки з'єднуються відрізками. Одержана ламана і є кумулятою. На рис. 360 представлено кумуляту, побудовану за даними таблиці 55.

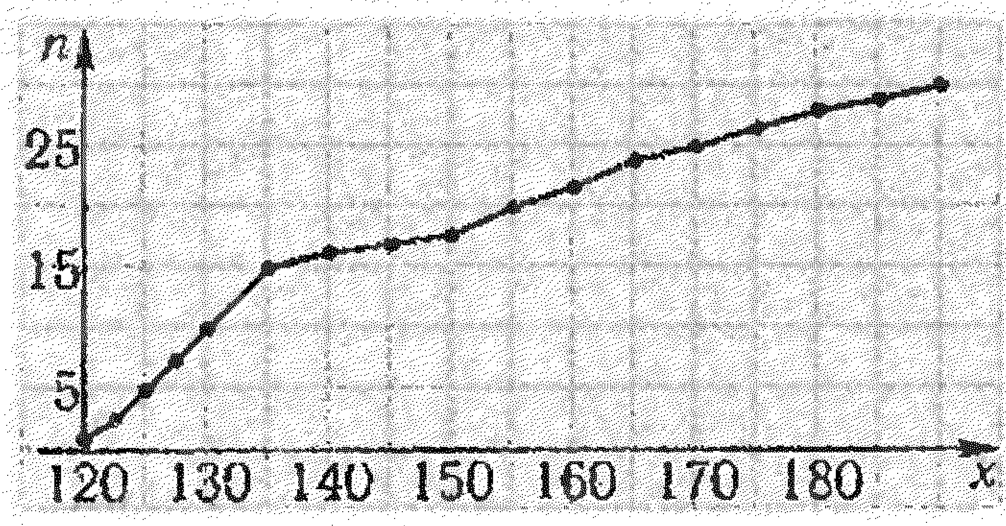


Рис. 360

Контрольні запитання

1°. Як за гістограмою побудувати полігон частот?
2°. Як зміниться полігон частот, якщо замість частот варіант використати відносні частоти, не змінюючи масштабу?
3. Про що свідчить гістограма, яка є прямокутником?
4. Якщо кумулята будується за накопиченими відносними частотами, то чому дорівнює ордината крайньої правої точки?
5. Чи є на кумуляті точки, для яких більшій абсцисі відповідає менша ордината, якщо статистичні дані впорядковані за зростанням?

3. Статистичні характеристики

Унаслідок досліджень, пов'язаних з масовими явищами, одержують багато числових даних. Перед дослідником виникає проблема — знайти такі характеристики, які досить повно характеризували б відповідний числовий матеріал. Такі характеристики, що базуються на даних масового спостереження, називаються ***узагальнюючими показниками***. Ці характеристики обчислюють за допомогою варіант і відповідних частот (відносних частот). Найважливіші серед них — ***середні величини***, тобто такі значення, навколо яких групуються варіанти, що спостерігаються. Їх називають ***мірами центральної тенденції***. До них належать ***середнє арифметичне, мода, медіана***.

Нехай маємо n об'єктів, у яких вимірюємо деяку ознаку, і отримаємо варіанти $x_1, x_2, ..., x_n$. ***Середнє арифметичне*** цих n значень позначається через $\bar{x}$ і визначається так:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Якщо значення варіант повторюються декілька разів, то середнє арифметичне обчислюється з урахуванням частот:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}.$$

Тут k — кількість різних значень, яких набувають варіанти, n_i — частота варіанти x_i, $i = 1, 2, ..., k$, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Таку форму середнього арифметичного іноді називають ***середнім зваженим***.

Приклад 2. Для перевірки насіння на схожість посіяли 4 сотні насіння, окремо одна від одної. З першої сотні зійшло 92 насіння, з другої — 90, з третьої — 93, з четвертої — 89. Знайти середню схожість насіння.

□ Загальна кількість насіння, що зійшло, дорівнює 92 + 90 + 93 + + 89 = 364. Поділивши це число на кількість посіяного насіння (400), одержимо: $\bar{x} = 0{,}91$, тобто у середньому зійшло 91% насіння. ■

Відповідь. 0,91.

Приклад 3. У таблиці 57 наведено дані про кількість балів, що набрали учні на районній математичній олімпіаді. Обчислити за цими даними середній бал.

Таблиця 57

Варіанта, x	2	3	5	6	8	9	10	11	15	18
Частота, n	1	2	4	3	2	2	2	3	1	1

□ Обчислення проведемо за схемою, представленою у таблиці 58.

Таблиця 58

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сума
x_i	2	3	5	6	8	9	10	11	15	18	
n_i	1	2	4	3	2	2	2	3	1	1	21
$x_i n_i$	2	6	20	18	16	18	20	33	15	18	166

Таким чином, середній бал $\bar{x} = \frac{166}{21} \approx 8$. ■

Відповідь. ≈ 8.

Так само обчислюється середнє арифметичне за даними інтервального варіаційного ряду. За значення ознаки для всіх елементів у даному інтервалі беруть середину інтервалу. При цьому припускається певна неточність, але зазвичай в різних інтервалах похибки будуть різних знаків, а тому при великій кількості спостережень вони значною мірою «гасять» одна одну.

Приклад 4. За даними таблиці 54 з попереднього пункту обчислити середній бал, набраний випускниками на ЗНО.

□ Обчислення представлені у таблиці 59.

Таблиця 59

Кількість балів	Кількість учнів, n_i	x_i	$x_i n_i$
100–125	5	112,5	562,5
126–150	13	138	1794
151–175	9	163	1467
176–200	3	188	564
Сума	30		4387,5

$\bar{x} = \dfrac{4387,5}{30} \approx 146,3$. Якби ми обчислили цей середній бал за даними таблиці 53, ми б одержали $\bar{x} = \dfrac{4374}{30} \approx 146$. Результати відрізняються незначно. ■

Відповідь. ≈ 146,3.

Середнє арифметичне варіант деякої сукупності є важливою її узагальненою характеристикою, але не є єдиною. Для характеристики варіаційних рядів застосовується така характеристика, як ***мода***.

Мода — це та варіанта, яка найчастіше зустрічається.

У випадку дискретних рядів обчислити моду неважко. Достатньо знайти варіанту, яка має найбільшу частоту або відносну частоту, це й буде мода. Позначатимемо її символом Мо. За даними, поданими у таблиці 53, Мо = 130. Цей результат має цілком певний зміст — найбільше випускників отримали на ЗНО 130 балів. Як бачимо, у даній ситуації мода суттєво відрізняється від середнього арифметичного.

Як характеристику варіаційного ряду застосовують також медіану.

Медіана — це та варіанта у варіаційному ряді, яка ділить усю сукупність навпіл.

Отже, кількість варіант, менших від медіани, дорівнює кількості варіант, більших за медіану. Позначатимемо медіану символом Ме.

Якщо об'єм сукупності є непарним і дорівнює $2m + 1$, варіанти x_i розміщені так, що їхні значення не спадають:

$$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_m}_{m\ \text{значень}}, x_{m+1}, \underbrace{x_{m-2}, \ldots, x_{2m+1}}_{m\ \text{значень}},$$

то $\mathrm{Me} = x_{m+1}$. Серед варіант можуть бути й однакові. Якщо ж кількість елементів парна і дорівнює $2m$, то немає варіанти, яка б ділила сукупність на дві рівні за об'ємом частини:

$$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_m}_{m \text{ значень}}, \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_{2m}}_{m \text{ значень}}.$$

Тому за медіану умовно береться півсума варіант, які знаходяться у середині варіаційного ряду:

$$\mathrm{Me} = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

Приклад 5. Обчислити медіану: 1) за наступними даними: 1, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7; 2) за даними таблиці 53.

□ 1) У сукупності непарне число даних, 9. Вони розміщені так, що вони не зменшуються. На середньому, п'ятому, місці стоїть 4. Відтак, Me = 4

2) Оскільки у сукупності, що розглядається, 30 елементів (випускників), упорядкованих за значенням ознаки, і кількість елементів парна, треба знайти півсуму числових значень 15-го і 16-го елементів. Додаючи послідовно частоти, знаходимо перше число, яке дорівнює половині загальної кількості елементів або більше від неї, тобто яке не менше від 15. У даному прикладі послідовно матимемо: 1, 3, 5, 8, 12, 15. П'ятнадцятому елементу відповідає варіанта 135, а 16-му елементу сукупності відповідає значення 140. Відтак, $\mathrm{Me} = \dfrac{135+140}{2} = 137{,}5$.

Отримане значення медіани означає, що приблизно половина випускників отримала 137,5 і менше балів, а приблизно половина — 137,5 і більше балів. ■

Звертаємо увагу на помилку, яка часто зустрічається при обчисленні медіани. Іноді не зважають на частоти варіант і на загальну кількість елементів і за медіану беруть півсуму середніх варіант.

У прикладі 5. 2) кількість різних варіант дорівнює 16, середні 8-а і 9-а, їхня півсума дорівнює $\dfrac{146+149}{2} = 147{,}5$, що не є правильним.

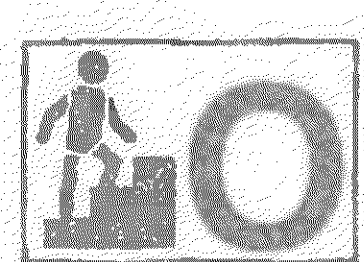
Середні величини є важливими характеристиками статистичних сукупностей. Вони говорять нам про концентрації сукупності значень на числовій шкалі. Кожна міра дає таке значення, яке «представляє» в певному сенсі всі значення сукупності. У цьому випадку нехтують відмінностями, які існують між окремими значеннями. Для вимірювання варіації значень усередині сукупності потрібні інші показники.

Розмах вимірює на числовій шкалі відстань, у межах якої змінюються значення сукупності.

Розмах — це різниця між максимальним і мінімальним значеннями у сукупності. Розмах позначається через w.

Наприклад, за даними таблиці 53 $w = 185 - 121 = 64$.

Перевагою цього показника є очевидна простота його обчислення. Але часто він дає лише дуже наближену характеристику варіації. Це особливо виявляється у випадку досить численних сукупностей, коли переважна більшість варіант згрупована навколо деякої середньої величини, і тільки деякі з них з огляду на випадкові обставини мають значення (найбільше і найменше), які істотно відрізняються від основної маси. При цьому розмах варіації буде значний, а варіація тим часом по суті мала. Справа в тому, що при його обчисленні не враховується кожне окреме значення.



Охарактеризуємо докладніше розглянуті статистичні характеристики. Сутність середнього арифметичного полягає в наступному. Якщо кожне спостереження замінити середнім, то загальна сума не зміниться. Це середнє можна інтерпретувати ще в такий спосіб: якщо всі спостереження будуть дорівнювати одне одному, а сума спостережень залишиться незмінною, то кожне спостереження буде дорівнювати середньому. Оскільки середнє зберігає незмінною суму при рівномірному розподілі значень, то воно найкорисніше як узагальнюючий показник при відсутності спостережень, які різко виділяються серед інших, тобто коли набір даних являє собою більш-менш однорідну групу.

Зверніть увагу саме на вимогу однорідності статистичних даних при використанні середнього арифметичного для її характеристики. Російський письменник Гліб Успенський (1843–1902) одного разу влучно спародіював «усереднення», згідно з яким мільйонер Колотушкін і проскурник Кукушкін, який має один гріш, володіють, у середньому, по півмільйону.

Медіана — це така варіанта, яка приходиться на середину варіаційного ряду: половина варіант менша, ніж медіана, а інша половина — більша. На медіану впливають лише центральні, серединні ділянки варіаційного ряду. Якщо кінці ряду визначені ненадійно, то це спотворить середнє арифметичне, яке залежить від усіх варіант та їхніх частот. Тому в подібних випадках слід віддавати перевагу медіані.

Середнє арифметичне, як і інші показники центральної тенденції, можуть використовуватись для порівняння відповідних ознак.

Приклад 6. За даними, наведеними у таблиці 60, з'ясувати, в якому році, 2008-му чи 2009-му, були кращими результати тестування з математики випускників шкіл нашої країни.

Таблиця 60

Рік	2008									
Кількість балів	100–123	124–135	136–150	151–161	162–172	173–183	184–190	191–195	196–199	200
% тих, хто брав участь у тестуванні	4,6	14,0	29,3	22,9	14,7	9,2	3,3	1,3	0,7	0,1
Рік	**2009**									
Кількість Балів	100–123,5	124–135	135,5–150	150,5–160	160,5–170	170,5–180	180,5–190	190,5–195	195,5–199,5	200
% тих, хто брав участь у тестуванні	9,63	14,43	23,15	19,86	16,40	8,87	5,49	1,19	0,80	0,18

☐ Тільки дивлячись на дані, подані у таблиці, не можна надати відповідь на поставлене запитання. Спробуємо це зробити за допомогою середнього арифметичного. Середнє арифметичне кількості балів, набраних випускниками у 2008 році, дорівнює:

$$\overline{x_1} = \frac{1}{100}(111{,}5 \cdot 4{,}6 + 129{,}5 \cdot 14{,}0 + 143 \cdot 29{,}3 + 156 \cdot 22{,}9 + 167 \cdot 14{,}7 +$$
$$+178 \cdot 9{,}2 + 187 \cdot 3{,}3 + 193 \cdot 1{,}3 + 197{,}5 \cdot 0{,}7 + 200 \cdot 0{,}1) = 152{,}1.$$

Середнє арифметичне кількості балів, набраних випускниками у 2009 році, дорівнює:

$$\overline{x_1} = \frac{1}{100}(111{,}75 \cdot 9{,}63 + 129{,}5 \cdot 14{,}43 + 142{,}75 \cdot 23{,}15 + 155{,}25 \cdot 19{,}86 +$$
$$+165{,}25 \cdot 16{,}4 + 175{,}25 \cdot 8{,}87 + 185{,}25 \cdot 5{,}49 + 192{,}75 \cdot 1{,}19 + 197{,}5 \cdot 0{,}80 +$$
$$+200 \cdot 0{,}18) = 150{,}4.$$

За цими результатами можна зробити наступний висновок: у 2009 році результати тестування виявились дещо нижчими порівняно з 2008 роком. Але різниця невелика, вона може бути у межах похибки вимірювань. Крім того, дані наведено з різною точністю. Отже, цих даних не вистачає для порівняння результатів тестування. ■

Контрольні запитання

1. Що потрібно знати, окрім середнього числа відмов приладу, щоб оцінити загальну кількість відмов приладів?
2. Потрібно з'ясувати потребу населення деякого міста в певному товарі. Як може допомогти поняття середнього арифметичного у вирішенні цієї проблеми?
3°. Унаслідок дорожньо-транспортних пригод в середньому 61% загиблих складають водії–непрофесіонали, 15% — пішоходи, 15% — мотоциклісти, 5% — водії вантажних або службових машин, 4% — велосипедисти. Яка зі статистичних характеристик найкраще характеризує ситуацію на дорогах?
4°. Після закінчення олімпіади підраховано бали, набрані її 20 учасниками, визначені місця, зайняті ними. Який зміст має медіана одержаної сукупності?
5°. Зібрано дані про тарифний розряд робітників цеху. Серед них 4 робітники мають перший розряд, 6 — другий, 12 — третій, 16 — четвертий, 44 — п'ятий і 18 робітників — шостий. Чому дорівнюють мода і медіана наведеної сукупності? Яким є їхній зміст?

4. Сутність вибіркового методу

Б

У попередніх параграфах ми бачили, що ймовірність випадкової події часто не можна встановити за допомогою теоретичних міркувань, доводиться її оцінювати за результатами експериментів. За наближене значення ймовірності події приймають її відносну частоту:

$$P(A) \approx \nu(A) = \frac{n(A)}{n},$$

де n — загальна кількість дослідів, $n(A)$ — кількість тих із них, у яких настала подія A.

Тут ми використали результати великої кількості незалежних експериментів, що проведені приблизно в однакових умовах. Така сукупність спостережень називається ***вибіркою із результатів експерименту.***

Для опису вибірки часто вживають її статистичні характеристики (середнє арифметичне, моду, медіану тощо). Їх називають ще ***вибірковими характеристиками.***

Необхідність проводити вибіркові обстеження може бути викликане різними причинами. В деяких випадках повне обстеження явища, що вивчається, є дорогим і дуже тривалим. Неможливо оцінити якість великої партії зерна. Про неї судять за декількома невеликими мірками, взятими з різних місць партії, що оцінюється. Іноді можливість використовувати отриману інформацію при повному обстеженні може вичерпатися раніше, ніж завершиться процес його підготовки. Вимірювання зросту всіх призовників з метою забезпечення відповідною інформацією швейних об'єднань, що виготовляють солдатську форму одягу — захід безглуздий. Збір цієї інформації обійдеться дуже дорого, потребує багато часу, а сама інформація практично буде застарілою. У зв'язку з цим про розподіл зросту всіх призовників судять за деякою вибіркою спостережень, достатньо представницькою і правильно організованою. Іноді в результаті перевірки якості виробу відбувається знищення досліджуваного об'єкта. Наприклад, електролампи перевіряються на тривалість горіння, аж до виходу з ладу. Якби так само випробовувалися всі виготовлені лампи, то довелося б знищити всю вироблену продукцію. Тому для встановлення середнього часу горіння лампи обстежують лише деяку обмежену частину всіх ламп.

Генеральна сукупність — це набір об'єктів, про які необхідно отримати інформацію.

Вибірка — це невеликий набір об'єктів, які вибирають з генеральної сукупності.

Якщо потрібно оцінити якісь параметри генеральної сукупності, можна обчислити відповідні параметри спеціально організованої вибірки і прийняти їх як оцінки значень параметрів генеральної сукупності. Так, ми бачили, що відносна частота слугує оцінкою ймовірності події. Вибіркове середнє є оцінкою середнього значення всієї сукупності, мода, знайдена за вибіркою, наближено дорівнює значенню генеральної сукупності, яке зустрічається найчастіше. Вибіркова медіана близька до елемента генеральної сукупності, який поділяє її навпіл. Те саме стосується і розмаху. Але для того, щоб вибіркові характеристики наближено дорівнювали відповідним характеристикам генеральної сукупності, вибірка має задовольняти певні вимоги.

По-перше, вибірка має бути достатньо великого об'єму. Не можна стверджувати, що три чверті жителів Одеси вранці п'ють каву на підставі того, що з чотирьох одеситів, яких ми рано вранці зустріли в кафе, троє пили каву.

По-друге, потрібні такі способи утворення вибірки, які представляли б усю генеральну сукупність, тобто щоб вибірка була ***репрезентативною*** (представницькою). Для утворення репрезентативної вибірки доцільно мати перелік елементів генеральної сукупності і з нього якимсь випадковим чином організовувати вибірку. Інформація, отримана в результаті побудови вибірки, буде тільки тоді надійною основою для ухвалення рішення щодо тих або інших властивостей генеральної сукупності, коли структура елементів, які утворюють вибірку, буде аналогічною структурі елементів у генеральній сукупності.

Випадковою є вибірка, в яку має однакові шанси потрапити кожен окремий елемент і кожна комбінація окремих елементів, що належать початковій сукупності.

Яскравим прикладом невдачі в історії застосування вибіркового методу є результати опитування, проведеного в 1936 році американським журналом «Literary Digest». Редакція журналу розіслала 10 млн. бюлетенів, в яких просила людей, що отримали їх, відповісти, за кого вони голосуватимуть на майбутніх виборах — за кандидата республіканської партії А. Лендона або за демократа Ф. Рузвельта. Повернулося більше 2 млн. заповнених бюлетенів. Опубліковані в журналі результати опитування передбачали, що президентом стане А. Лендон. Проте виявилось, що з великою перевагою перемогу на виборах отримав Ф. Рузвельт, за якого проголосувало більше 60% виборців. Причина такої істотної помилки журналу криється в тому, що отримана в результаті проведення опитування вибірка, на даних якої ґрунтувався прогноз, не була репрезентативною вибіркою з генеральної сукупності виборців. Бюлетені були розіслані передплатникам журналу, людям, чиї прізвища і адреси були узяті з телефонних довідників, а також власникам автомобілів. Отже, у вибірці було дуже мало представлено менш заможних людей, які в своїй масі підтримували «новий курс» Ф. Рузвельта. Крім того, відповіді прислали не всі, а люди, які не тільки достатньо упевнені в своїй думці, але і такі, що звикли відповідати на листи, тобто значною мірою представники ділового світу, які і підтримували А. Лендона.

До головних задач статистики зазвичай відносять оцінювання за вибіркою невідомих параметрів і перевірку статистичних гіпотез. Розглянемо на прикладах ці задачі.

Приклад 7. Іхтіолог хотів визначити кількість риби у ставку, придатної для виловлювання. Для цього він закинув сітку з наперед заданими розмірами вічок і, витягнувши її, виявив 30 рибин. Позначивши кожну з них міткою, він кинув усю рибу назад у ставок. Наступного дня іхтіолог у тому самому місці закинув ту саму сітку і спіймав 40 рибин, на двох з яких були його мітки. Яким чином він за такими даними знайде приблизну кількість рибин у ставку, придатних для виловлювання?

☐ Нехай у ставку N рибин, тоді ймовірність події «навмання взята риба — мічена» дорівнює $\frac{30}{N}$ (за класичним означенням ймовірності).

Тут генеральною сукупністю є сукупність усіх риб у ставку, невідомим — загальна кількість риб у ставку, або ймовірність вилову міченої риби, вибіркою — риби, спіймані вдруге. На основі даних вибірки можна обчислити частку мічених риб серед тих, що відловили. Ця величина випадкова, в конкретному досліді вона набуває певного значення.

Згідно з результатами 40 дослідів (дослідом вважаємо виловлювання однієї рибини), проведених наступного дня, можна підрахувати відносну частоту цієї події. Вона дорівнює $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$. За наближеною рівністю $\frac{30}{N} \approx \frac{1}{20}$. Звідси $N \approx 600$.

Чому розглядувані досліди можна вважати статистично стійкими? Або чи можна вважати одержану вибірку репрезентативною? Підвищили репрезентативність вибірки ми тим, що другий вилов риб проводитиметься тією самою сіткою, що і перший, причому вона буде закинута не відразу після повернення риб у водоймище (інакше мічені риби не встигнуть перемішатися з іншими) і не через тривалий час (інакше може відбутися нерест риб або скидання шкідливих відходів в ставок: і те, й інше істотно вплине на загальну кількість риб у водоймищі), а наступного дня, в тому самому місці. ■

За вибіркою у прикладі 7 оцінювалась невідома величина — кількість риб у водоймищі. За результатами, отриманими для вибірки, робився висновок стосовно генеральної сукупності.

Людині часто доводиться приймати те чи інше рішення. У більшості прийнятих рішень є елемент ризику. У багатьох випадках статистика може істотно допомогти в обґрунтуванні прийняття того чи іншого рішення. Наприклад, ухваленню рішення про перехід на нову технологію виробництва якогось виробу повинна передувати експериментальна перевірка цієї технології, збір необхідної інформації, її обробка, перевірка того, чи говорять зібрані дані на користь нової технології. Аналогічно, перед введенням нового підручника в школу, при зміні змісту навчання з якогось предмета повинна проводитися апробація підручника, перевірка необхідності і можливості зміни змісту навчання. На основі зібраної інформації має прийматися рішення, якій з висунутих гіпотез віддати перевагу.

Розглянемо приклад. Нехай хтось висловив припущення про те, що монета, за допомогою якої футбольний суддя проводить жеребкування, не є правильною. Тоді проводиться експеримент: цю монету підкидають, наприклад, 100 разів і фіксують, скільки разів випав герб. Якщо герб випав, скажімо, 30 разів, а цифра — 70 разів, то це говорить на користь того, що монета є неправильною, і гіпотезу про те, що вона правильна, потрібно відхилити. Якщо ж герб випав 45 разів, а цифра — 55 разів, то у нас немає підстав для відхилення гіпотези про те, що монета є правильною. Виникає запитання, а де та межа для кількості випадань герба, починаючи з якої гіпотезу про правильність монети потрібно відхиляти. Відповідь на нього дає математична статистика.

✓ Контрольні запитання

1°. У чому полягає користь застосування вибірок?

2°. Чому вдаються до вибіркового контролю якості ампул для ін'єкцій?

3°. Чи є результати перепису населення в країні генеральною сукупністю чи вибіркою під час дослідження факторів, притаманних населенню країни; світу?

4. Чому при визначенні середніх характеристик деякого біологічного роду беруть достатньо велику кількість особин і проводять відповідні вимірювання?

Задачі

398. У таблиці наведено розміри проданого в магазині чоловічого взуття:
41; 39; 40; 38; 43; 41; 42; 40; 38; 41; 42; 41; 40; 42; 39; 41; 41; 36; 43; 41; 42; 38; 41; 40; 42; 41; 42; 42; 42; 40; 41; 41; 39; 42; 40; 40; 39; 41; 39; 38; 40; 41; 41; 40; 40; 39; 42; 40; 43; 37; 40; 42; 43; 42; 38; 40; 40; 41; 41; 41; 40; 43; 42; 42; 39; 43; 41; 40; 43; 41; 42; 42; 39; 41; 43; 42; 41; 42; 40; 37.
1°) Упорядкуйте ці дані за зростанням, підрахуйте частоти, відносні частоти значень, запишіть дискретний варіаційний ряд.
2°) Побудуйте інтервальний варіаційний ряд, включивши в кожен інтервал по два розміри взуття.
3°) Побудуйте полігон частот і гістограму.
4) Яка з вибіркових характеристик найкраще описує середні показники цієї сукупності? Визначте її значення.

399. На діаграмі (рис. 361) наведено дані про народжуваність і смертність у восьми найбільших містах України.
1°) Випишіть ці дані окремо для народжуваності і смертності.

Народжуваність та смертність
в найбільших містах України

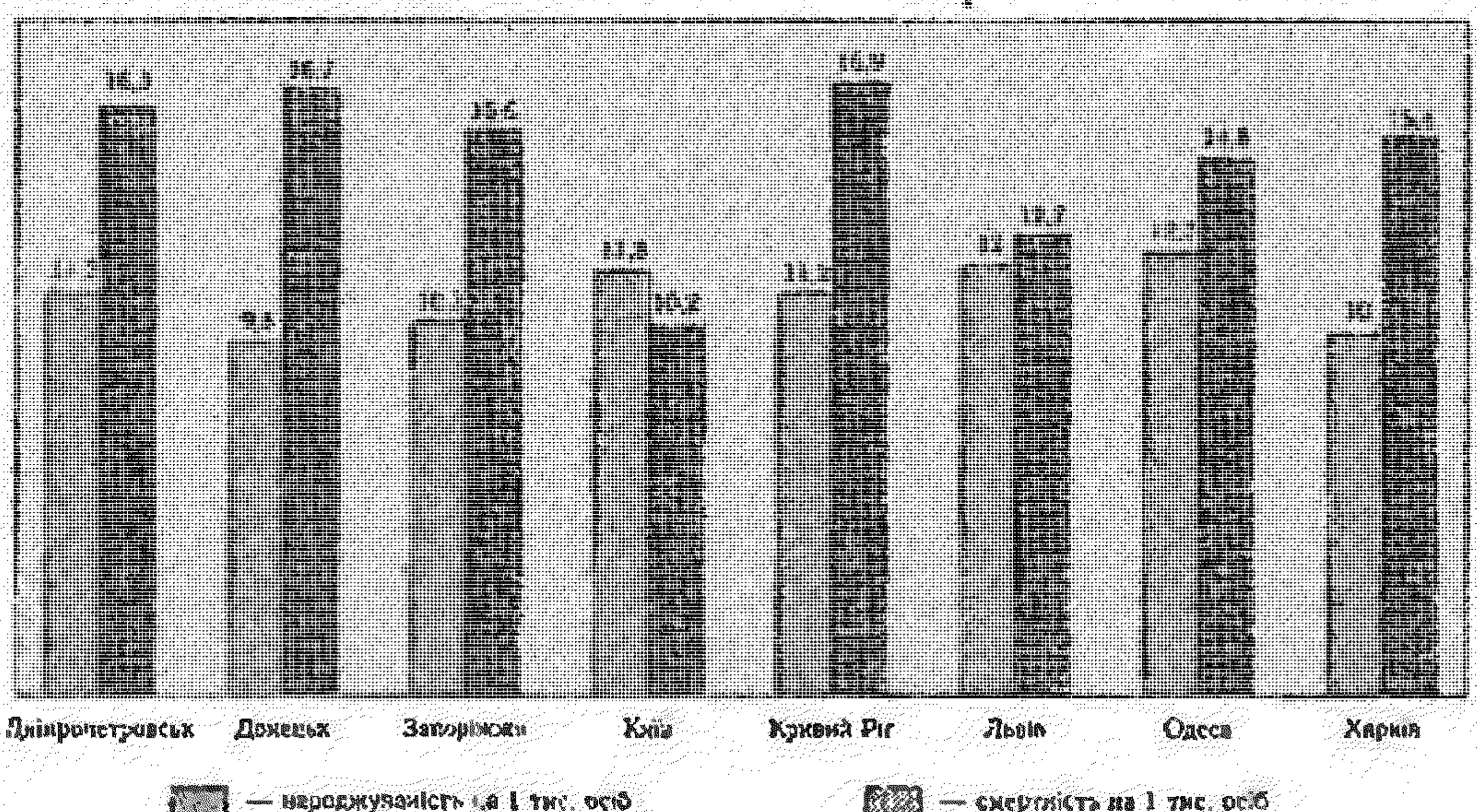


Рис. 361

2°) Упорядкуйте перші дані за спаданням, другі — за зростанням.
3°) Обчисліть за цими даними середні арифметичні, медіани, розмахи.
4) Чи можна прийняти ці вибіркові характеристики за оцінки відповідних характеристик народжуваності і смертності в усій Україні?

---

400. У таблиці 61 наведені дані про масу новонароджених при народженні.

Таблиця 61

Маса, г	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000	5000-5500	Всього
Число дітей	84	205	502	1723	3752	2747	852	124	11	10000

1) Обчисліть відносні частоти і накопичені відносні частоти.
2) Побудуйте за цими даними гістограму і кумулятивну криву.

401. Контрольна робота десяти учнів перевірялася двома вчителями і оцінювалася ними за дванадцятибальною шкалою. Результати оцінювання представлені в таблиці 62.

Таблиця 62

№ учня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Перший учитель	7	11	6	8	3	10	8	5	7	10
Другий учитель	5	12	6	7	2	11	9	3	6	10

Який з учителів більш строгий?

402. Обчисліть моду і медіану за даними таблиці 63, в якій наведено дані про успішність з математики 100 учнів 7-х класів (успішність оцінюється за 12-бальною шкалою).

Таблиця 63

Кількість балів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість учнів	3	4	4	9	11	12	18	14	9	8	6	2

Який зміст має кожна з обчислених характеристик?

403°. Яка з наведених нижче вибірок буде найбільш репрезентативною для сукупності всіх зареєстрованих виборців України?
а) Випадкова вибірка з 1000 виборців м. Вінниці.

б) Випадкова вибірка з 1000 студентів Харківського університету.

в) Вибірка з 1000 осіб, утворена на основі випадкових телефонних номерів.

г) Вибірка з 1000 осіб — прихильників однієї політичної сили.

404°. Чи була вибірка репрезентативною, якщо при вивченні часу, який витрачають на виконання уроків десятикласники:
1) опитували тільки дівчаток;
2) опитування проводили тільки по середах;
3) опитували учнів ліцеїв;
4) опитували тільки тих, хто не встигає?

405°. У ході опитування належить з'ясувати відношення жителів регіону до введення зовнішнього незалежного оцінювання. Які категорії жителів мають бути включені, на ваш погляд, у вибірку, яка для цього опитування складається?

406°. Для визначення кількості собак у місті, хворих чумкою, з усіх бездомних собак міста утворили дві вибірки: 1) одна собача зграя; 2) по декілька собак, що випадково відловили, з кожного району міста. Яку з них можна вважати репрезентативною?

---

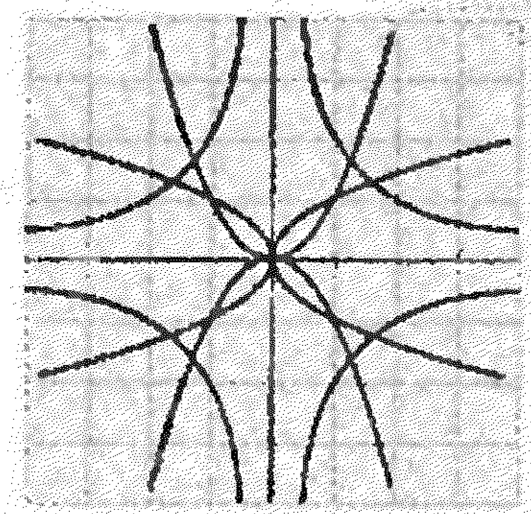
407. Позначимо невідому кількість овець в отарі через N. З цієї отари навмання відбирають M овець, які потім клеймлять і повертають в отару. Наступного разу відбираються n овець, серед яких m виявляються клеймованими. Обчисліть наближено кількість N овець в отарі.

408. Після експериментальної перевірки деяких ліків на тваринах висловили припущення, що їхня ефективність складає 80%. Подальшу перевірку виконували на людях. Відібрали випадково 100 хворих. Виявилось, що для 75 з них ліки були ефективними. Яке рішення ви приймете стосовно гіпотези про 80-процентну ефективність ліків?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Символічний запис
Середнім арифметичним n значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається частка від ділення суми цих значень на їхню кількість n.	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
Мода — це та варіанта, яка найчастіше зустрічається.	$\mathrm{Mo} = x_m$, де n_m — найбільше серед чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$
Медіана — це та варіанта у варіаційному ряді, яка ділить усю сукупність навпіл.	$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_m}_{m\ \text{значень}}, x_{m+1}, \underbrace{x_{m+2}, \ldots, x_{2m+1}}_{m\ \text{значень}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{Me} = x_{m+1}$. $\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_m}_{m\ \text{значень}}, \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_{2m}}_{m\ \text{значень}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{Me} = \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}$
Розмах — це різниця між максимальним і мінімальним значеннями у сукупності.	$w = x_{\max} - x_{\min}$



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики»

Завдання для самоконтролю

1°. Які з наступних дій можна вважати випадковими експериментами:
а) виготовлення атомного підводного човна;
б) вирощування насіння якоїсь культури;
в) кидок м'ячем у кошик;
г) вступ людини до вищого навчального закладу?

2°. Правильний гральний кубик підкинули 20 разів. Дістали такі результати: 5, 2, 2, 1, 6, 6, 1, 3, 5, 2, 2, 4, 3, 1, 1, 6, 4, 2, 5, 3.
а) Чому дорівнює відносна частота події «випали 3 очки»?
б) Яка подія відбувалася частіше: «випали 5 очок» чи «випало 1 очко»?
в) Чому дорівнює відносна частота події «випало менше ніж чотири очки»?

3°. Відносна частота пар взуття для дорослих, проданого у крамниці певного дня, по відношенню до загальної кількості пар проданого взуття дорівнює 0,6. У цей день продали 24 пари дитячого взуття. Скільки всього пар взуття продали за цей день?

4. Правильний гральний кубик підкинули шість разів. Одержали такі результати: 3, 1, 3, 6, 2, 4. Чи можна за цими даними оцінити ймовірність події:
а) випали три очки; б) випали п'ять очок?

5°. Ймовірність події A в деякому експерименті дорівнює $\frac{1}{6}$. Чи можна стверджувати, що в 600 таких самих конкретних дослідах подія A відбудеться рівно 100 разів?

6. Для контролю за якістю продукції, виготовленої на даному верстаті, відбирають для перевірки 200 виробів. Перевірку не витримують в середньому три вироби. Як оцінити ймовірність випуску придатної деталі даним верстатом:
а°) у даний час; б) після його переналагодження?

7. Як оцінити ймовірність народження дівчинки в Києві?

8. Зі скриньки, яка містить білі і червоні кулі, витягують п'ять куль. Які з наведених подій є парами протилежних подій:
а) витягли хоча б одну білу кулю;
б) витягли більше ніж одну білу кулю;
в) серед витягнутих куль білих немає;
г) витягли одну білу кулю?

9. Чи будуть рівноможливими такі наслідки експериментів:
а) правильний тетраедр з номерами 1, 2, 3, 4 на гранях впав на грань з номером 1; з номером 2;
б) триграння лінійка з номерами 1, 2, 3 на гранях впала на грань з номером 1; з номером 2; з номером 3?

10. Із повного набору доміно — 28 камінців — навмання виймається один. Чи рівноможливі наслідки:
а) сума очок дорівнює 6 і 9;
б) сума очок дорівнює 8 і 4?

11. Як перевірити припущення про рівноможливість наслідків досліду?

12. При проведенні експерименту можна отримати шість рівноможливих наслідків, що взаємно виключають один одного. Чому дорівнює ймовірність події, яка відбувається: а) тільки при одному наслідку; б) при будь-якому з двох фіксованих наслідків; в) при будь-якому, крім одного, наслідку?

13. При проведенні експерименту відбуваються рівноможливі наслідки, що взаємно виключають один одного. Ймовірність події, яка настає при будь-якому з двох фіксованих наслідків, дорівнює 0,1. Чому дорівнює:
а) ймовірність кожного з наслідків;
б) кількість усіх наслідків?

14°. Імовірність деякої події дорівнює 0.43. Дослід, у якому настає ця подія, проведено 500 разів. Скільки приблизно разів настала ця подія у проведених дослідах?

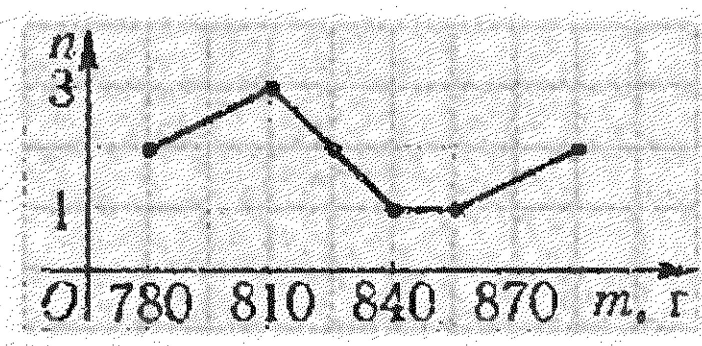
15. Скільки існує двоцифрових чисел, в яких обидві цифри парні?

16. Скільки існує двоцифрових чисел, в яких обидві цифри мають різну парність?

17. В одного учня 7 книг з математики, у другого — 9 детективів. Скількома способами можна обміняти одну книгу першого учня на одну книгу другого?

18. Для якого значення накопичена частота збігається з його частотою?

19. На рисунку зображено полігон частот, побудований за значеннями маси m (в г) випадково відібраних буханок хліба, виготовлених упродовж одного дня в одній пекарні.



а°) Скільки відібрали буханок хліба?

б) Запишіть варіаційний ряд, за яким побудовано полігон частот.

в°) Чому дорівнює мода сукупності?

г) Обчисліть середню масу відібраних буханок хліба.

ґ) Чи можна прийняти ці вибіркові характеристики за оцінки відповідних характеристик маси буханок хліба, що випікаються у цій пекарні? Відповідь обґрунтуйте.

Відповіді до завдань для самоконтролю

1. б), в). **2.** а) 0,15; б) «випало 1 очко»; в) 0,6. **3.** 60. **4.** а) Ні; б) ні. **5.** Ні. **6.** а) ≈ 0,15; б) зібрати нові дані про якість виробів. **7.** За статистичними даними про стать народжених протягом досить тривалого часу. **8.** а) і в). **9.** а) Так; б) ні. **10.** а) Ні; б) ні. **11.** Експериментально. **12.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{6}$. **13.** а) 0,05; б) 20. **14.** Приблизно 215. **15.** 20. **16.** 45. **17.** 63. **18.** Для найбільшого. **19.** а) 12; б), див. табл.

775	785	815	825	840	845	880
1	2	3	2	1	1	2

в) 815; г) ≈ 824 г; ґ) ні, оскільки об'єм вибірки невеликий.

Зразок контрольної роботи № 7

Урна містить 25 куль, серед них — 4 білі кулі, 6 чорних куль, 5 червоних, решта — блакитні. Із цієї урни 40 разів навмання виймають кулю, щоразу повертаючи її назад і ретельно перемішуючи кулі. При цьому в 6 випадках вийнята куля виявилася білою, в 10 — чорною, в 7 — червоною, в решті випадків — блакитною.

1°) Знайдіть ймовірність того, що при деякому вийманні з'явиться червона куля; блакитна куля.

2°) Знайдіть відносну частоту цих подій.

3) Оцініть близькість ймовірностей і відносних частот цих подій.

4) Знайдіть ймовірність того, що при вийманні навмання двох куль обидві виявляться червоними.

5) Якщо дві кулі з даної урни витягувалися 1000 разів, то скільки приблизно разів обидві кулі виявлялися червоними?

6) За результатами дослідів побудуйте варіаційний ряд, полігон частот, обчисліть моду.

Поняття ймовірності події

Таблиця 64

Означення	Символічний запис
Якщо відносна частота події від серії до серії з великої кількості дослідів коливається навколо деякого числа, то такі досліди називають ***статистично стійкими***, а число, навколо якого коливається відносна частота події, приймається за ***ймовірність*** цієї події.	$P(A) \approx \nu(A)$.
Ймовірністю події A називають відношення кількості наслідків досліду $N(A)$, що приводять до настання цієї події, до загальної кількості N рівноможливих наслідків досліду.	$P(A) = \dfrac{N(A)}{N}$.

Елементи комбінаторики

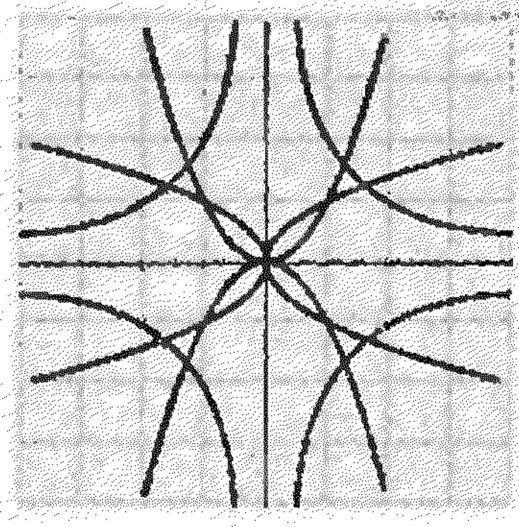
Таблиця 65

Назва твердження	Зміст твердження
Комбінаторне правило множення	Якщо об'єкт A можна вибрати m способами і якщо після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n способами, то вибір пари (A, B) можна виконати $m \cdot n$ способами.
Комбінаторне правило додавання	Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а інший об'єкт B можна вибрати n способами, причому жоден із способів вибору A не співпадає з якимось способом вибору B, то вибір «або A, або B» можна виконати $m + n$ способами.

Вибірковий метод у статистиці

Таблиця 66

Варіаційний ряд	Упорядкована сукупність різних елементів разом з їхніми частотами.
Генеральна сукупність	Набір об'єктів, про які необхідно отримати інформацію.
Вибірка	Набір об'єктів, що беруть з генеральної сукупності.
Основні задачі статистики	Оцінювання невідомих параметрів сукупності, перевірка статистичних гіпотез.



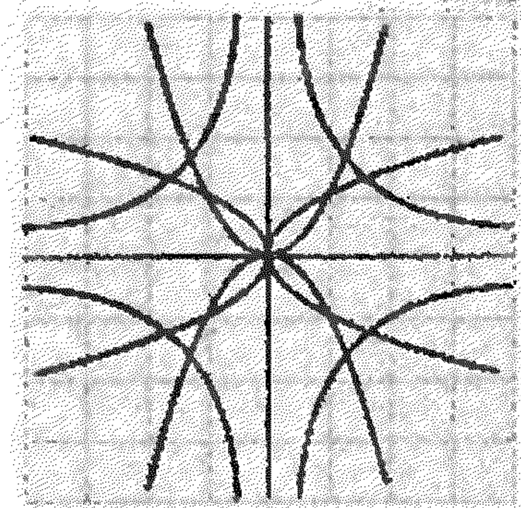
Історичний коментар

Задачі і проблеми, що істотно вплинули на зародження і перші кроки розвитку теорії ймовірностей, виникали при обробці статистичних даних і результатів спостережень у різних науках, з практики страхових компаній, у зв'язку з аналізом азартних ігор. Статистичні закономірності історично першими привернули увагу учених, які прагнули з'ясувати сутність азартних ігор, — таких, як гра в кістки, «орлянку» і т. ін. Статистичні закономірності в демографічних процесах були підмічені у XVIII ст. при вивченні статистики народжуваності, смертності, нещасних випадків і т. ін.

Класичне означення ймовірності запропонував П. Лаплас на початку XIX ст. Воно використовується тоді, коли існує можливість передбачення ймовірності на основі симетрії умов, за яких відбувається дослід. Фактично таким означенням користувалися раніше у своїх працях Г. Галілей, Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс, Я. Бернуллі, Т. Байєс та інші вчені.

Розвиток статистики був обумовлений завданнями суспільної значущості. Істотні результати в області теорії ймовірностей і математичної статистики були отримані П. Лапласом (1749–1827) і К.Ф Гауссом (1777–1855), Ф. Гальтоном (1822–1911), К. Пірсоном (1857–1936), В. Госсетом (1876–1937), Р. Фішером (1890–1962), вітчизняними вченими О.В. Леонтовичем (1869–1943), О.О. Чупровим (1874–1926). Відомими дослідниками в області математичної статистики були С.Н. Бернштейн (1880–1968), О.Я. Хінчин (1894–1959), Е.Е. Слуцький (1880–1948), В.І. Романовський (1879–1954), А.М. Колмогоров (1903–1992), М.В. Смирнов (1900–1966).

Великий внесок у розвиток теорії ймовірностей і математичної статистики внесли українські математики В.Я. Буняковський (1804–1889), М.В. Остроградський (1801–1862), Б.В. Гнєденко (1912–1996), М.Ф. Кравчук (1892–1942), Й.І. Гіхман (1918–1985), В.С. Королюк (нар. 1925), А.В. Скороход (1930–2011), М.Й. Ядренко (1932–2004) і багато інших.



Відповіді і вказівки до задач

Розділ I

1. 1) 1; 2) 8; 3) 125. 2. 1) x; 2) $x^{2\sqrt{5}}$; 3) $y^{2\sqrt{7}}$; 4) $\frac{1}{y}$; 5) m; 6) $n^{1,5}$; 7) 64; 8) 3; 9) 4. 3. 1) 8,82 і 8,88; 8,82 і 8,83. 4. 8,82. 7. 1) $R; (-1; +\infty)$; 2) $R; \{1\}$; 3) $[0; +\infty); [0; +\infty)$. 8. 1) 27; 3; 2) 2; 0,25; 3) 27; $\frac{1}{3}$; 4) 1; $\frac{1}{16}$.

9. 1), див. табл.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0
y	–0,432	–0,424	–0,410	–0,391	–0,361	–0,317	–0,25
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	
y	–0,15	0	0,225	0,563	1,07	1,83	

3) (1; 0); (0; 0,25); 4) $x \in (-\infty; 0]$. 10. 1) ≈2,50; ≈2,50 м/с; 2) ≈2 ,50; ≈0,00 м/с. 11. ≈ 88,4; ≈ 22,1; $\approx 1,97 \cdot 10^{28}$ г. 12. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\{2\}$; 3) $\{-1; 7\}$. 13. 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $[0; +\infty)$. 14. 2) $\sqrt{2}$; 2; 8; 3) (0; 4), вісь y не перетинає, (1; 2); 4) R; $(0; +\infty)$; 5) 8; 1; 6) $\frac{7}{3}; \left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$; 7) $a > 1$; 8) $(-\infty; 0)$. 15. 2) $\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}$; 27; 3) (0; 3), вісь y не перетинає, $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; 4) R; $(0; +\infty)$; 5) 27; 1; 6) $\frac{5}{4}; \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$; 7) $a > 1$; 8) $(-\infty; 1)$. 16. 1) $\frac{1}{125}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{1}{c^{10}}$; 5) $\frac{1}{(mn)^7}$; 6) $\frac{1}{(a-1)^5}$; 7) $\frac{49}{9}$; 8) $\frac{27}{8}$. 17. 1) 5^{-3}; 2) 6^{-1}; 3) a^{-5}; 4) b^{-4}; 5) 9^{-1}; 6) 10^{-3}; 7) 10^{-1}; 8) 10^{-2}. 18. 1) $3^{-21} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-21}$; 2) $3^{-21} > 4^{-21}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{21} = 3^{-21}$. 19. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0,8; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{121}$; 5) $\frac{4}{3}$. 20. 1) 4; 2) 0; 3) –3; 4) $\frac{2}{3}$; 5) –2; 6) 3; 7) $\sqrt{2}$; 8) $-\frac{3}{4}$; 9) $-\frac{3}{2}$; 10) 1,5. 22. 1) 12; 2) 3; 3) 5; 4) 7; 5) 9. 23. 1) 32; 2) 125; 3) $\sqrt{7}$; 4) 2. 24. 1) 1; 2) 144; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\frac{1}{9}$. 25. 1) $\sqrt{3}$; 2) 25;

3) 7; 4) $\sqrt{6}$. **26.** 1) 216; 2) –3; 3) 25; 4) 16,5. **27.** 1) 3; 2) 1, 3) 5; 4) $\frac{8}{3}$; 5) 3; 6) 0,75. **28.** 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 2; 5) 2. **29.** 1) 1,23; 2) 2,10; 3) 1,06; 4) –0,329; 5) 3,402; 6) –1,316. **30.** 1) ≈ 2,322; 2) ≈ 7,604; 3) ≈ 6,931; 4) ≈ 1,107; 5) ≈ –1,955; 6) ± 1,622. **31.** 1) $7+5\lg x \approx 7{,}41$; 2) $3+2{,}5\log_3 x \approx 3{,}43$; 3) $2{,}5\ln x - 4 \approx -3{,}52$. **32.** 2) – 4; 10,55; 3) 0,1. **33.** 1) Через 1,42 с; 2) через 2,01 с. **34.** 152. **35.** Через 9. **36.** $h = H\ln\frac{p_0}{p}$. **37.** 1) $(-3;+\infty)$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $(-1;1)$; 4) $(0;1]$; 5) $(0;+\infty)$; 6) $(1;+\infty)$. **38.** 1) +; 2) –; 3) –; 4) +. **39.** 1) $\log_5\frac{9}{10} < \log_5\frac{10}{11}$; 2) $\log_3\sqrt{7} > \log_3 2{,}6$; 3) $\log_{0,2}4{,}21 < \log_{0,2}4{,}19$; 4) $\log_{0,9}e > \log_{0,9}\pi$. **40.** 1) $c < b < a$; 2) $b < a < c$. **41.** 1) $(3;+\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{8};+\infty\right)$; 3) $(0;2)$; 4) $[4;+\infty)$; 5) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; 6) $\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]$. **42.** 1) $(0;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 3) при всіх x, окрім 0 і ± 1; 4) $(0,1)\cup(1;+\infty)$. **43.** 1) 0; –1; 2) 0; –1. **45.** 1) $(-1;+\infty)$; $(-\infty;+\infty)$; 2) (0; 0); 4) через точку A проходить, через точку B — ні; 5) 2. **46.** 1) $-1\pm\sqrt{2}$; 2) 2 і 5; 3) 3. **47.** 1) $(-\infty;1{,}5)$; 2) $\left[-\frac{1}{3};1\right]$; 3) $(-\infty;-1{,}5)\cup(-1;+\infty)$; 4) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **48.** 1) $(-1;+\infty)$; 2) $(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$; 3) [1; 2]. **49.** 1) –1; 4; 2) 1; 2; 3) –1; 4, 4) 0,5; 2; 5) 2; 6) 2. **50.** 1) 0; 2) 0; 3) 4; 4) 3. **51.** 1) 2; 2) 0,5; 3) 0; 1; 4) немає розв'язків; 5) $\log_{1,5}3$. **52.** 1) 1; 2) 2; 3) –2. **53.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) –1. **54.** 1) $(-2;0)$; 2) $\left((-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2};0\right)$, $n\in Z$; 3) (2; 0). **55.** 1) (5; 20736); 2) (2; 1458); 3) (0; 5) і (1; 30); 4) (2; 16). **56.** 1) $(-\infty;0{,}5)$; 2) (1;2); 3) немає розв'язків; 4) $(\log_3 2;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$. **57.** 1) $(0;+\infty)$; 2) $\left(\log_2\frac{2}{7};+\infty\right)$; 3) $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}2\right)$; 4) $(-\infty;2]$. **58.** 1) $(2;1)$, $(\log_2 3;\log_3 4)$; 2) $\left(-2;\frac{1}{900}\right)$; 3) $(3;2),(2;3)$; 4) $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. **59.** 1) (0,5; 0); $\left(0;\frac{2}{9}\right)$; 2) 1; 3) $(1;+\infty)$; 4) $(-\infty;0{,}5)$. **60.** 62 500. **61.** ≈ 0,3 року. **62.** 1) 0; $-\frac{3}{2}$; 2) немає розв'язків; 3) 9; 4) 81; 5) 5; 6) –5. **63.** 1) 0; 2) 0,0001; 10; 3) $\sqrt[3]{0{,}25}$; 8; 4) 10. **64.** 1) $10(\sqrt{10}-2)$; 2) 10; 3) 10; 0,001; 4) $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}},100\right\}$, якщо областю визначення функції $y = x^{\lg x^2-3}$ вважати множину додатних дійсних чисел. **65.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$. **66.** 1) $(2;2\lg 2)$; 2) (3; 2), (–5; 2); 3) (2; 3lg 3), (3; 3lg 2); 4) (10; 3). **67.** 1) 1; 2) 0,5. **68.** 1) $\left(\frac{1}{3};2\right)$; 2) $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$; 3) $\left[\frac{1}{4};4\right]$; 4) $(2;3)\cup[6;+\infty)$. **69.** 1) $(-3;-2)\cup(3;+\infty)$;

2) $[0{,}01; 10000]$; 3) $\left(-3; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 4) $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$.

70. 1) $\left(10^{6}; 0{,}1\right)$; 2) (1000; 10); 3) (10; 1000), (1000; 10); 4) $(3; 3)$, $\left(\sqrt{3}; 9\right)$. 71. 1) (1; 0), $\left(\frac{1}{27}; 0\right)$; з віссю y не перетинається; 2) $\frac{1}{9}; \frac{1}{3}$; 3) $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(0; \frac{1}{27}\right) \cup (1; +\infty)$.

72. $m = m_0 e^{-\frac{v}{v_0}}$. 73. $p = p_0 \cdot 10^{-\frac{D}{A}}$.

Розділ 2

74. 2) Наприклад, $(A; B)$ і $(D; C)$; 3) $\overline{AO}, \overline{OC}$; 4) $\overline{BC}, \overline{CB}, \overline{AD}, \overline{DA}, \overline{MO}$. 75. ≈36 км. 76. ***Вказівка.*** Скористайтесь умовою рівності векторів і ознакою паралелограма. 77. ***Вказівка.*** Побудуйте паралелограм з вершинами A, B, C, D. Розгляньте також випадок, коли ці точки лежать на одній прямій. 78. 1) 12; 2) 26; 3) 26. 79. ***Вказівка.*** Доведіть, що при паралельному перенесенні трикутник переходить у трикутник, а площину можна тлумачити як об'єднання вкладених один в одного трикутників. 80. 1) $\overline{AC}$; 2) $\overline{CA}$; 3) $\overline{PQ}$. 81. 1) $\overline{BB_1}$; 2) $\overline{CC_1}$; 3) $\overline{A_1D}$; 4) $\overline{D_1C}$. 82. 1) ≈6,9 і 4; 2) 6 і 0; 3) ≈9,3 і ≈3,6; 4) ≈15,4 і ≈2,3. 83. ≈34°. 84. 1) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$; 3) паралелограм $ABCD$ є прямокутником; 4) співвідношення між сторонами і діагоналями паралелограма. 85. ***Вказівка.*** Скористайтеся нерівністю трикутника. 86. ***Вказівка.*** Запишіть умову перпендикулярності векторів за допомогою скалярного добутку. 87. 1) а) 0; б) $2a^2$; в) 0; 2) $a\sqrt{3}$; 3) 0°. 88. $\sqrt{2}$; 90°. 89. 1) ≈ 4,6 м/с; 2) 2,5 м/с. 90. 1) 4 Н; ≈7 Н; 2) ≈7 Н; ≈4 Н; 3) ≈32 Н і ≈25Н. 91. 1) $5\sqrt{2}$ Н, 5 Н, 5 Н; 2) $5\sqrt{3}$ Н, 1,25 Н, 1,25 Н. 92. ***Вказівка.*** Побудуйте вектори на вказаних прямих і скористайтесь розкладанням вектора площини по двох неколінеарних векторах. 93. 1) $\overline{OB} = \overline{DO} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{AD}\right)$, $\overline{OC} = \overline{AO} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AD}\right)$; 2) $\overline{AB} = \frac{1}{2}\left(\overline{AC} - \overline{BD}\right)$; $\overline{AD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AC} + \overline{BD}\right)$. $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; $\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{AD}$. 94. 1) $\vec{a} + \vec{c}$; 2) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 3) $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; 4) $\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; 5) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; 6) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 7) $\vec{a}$. 95. 1) У четвертому; 2) –3; 3) 3; 4) $\sqrt{10}$; 5) (–1; –3), (1; 3); (–1; 3); 6) (–3; 1). 96. 1) (4; –9); 2) (–5; 1) 3) –8 і –34; 4) $\sqrt{5}$; $\sqrt{52}$; 5) $\arccos\frac{-4}{\sqrt{65}} \approx 120°$. 97. ***Вказівка.*** Одну з осей варто спрямувати вздовж відповідної сторони многокутника. 98. 1) –3; 1; 2; 2) (–3; 1); (–3; 2); (1; 2); 3) 2; 1; 3. 99. 1) $B(1; 1; 0)$, $C(0; 1; 0)$; $C_1(0; 1; 1)$; 2) $\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$; 3) D; 4) M — зовні, N — всередині, F — на поверхні куба. 100. ***Вказівка.*** Проаналізуйте, які координати мають точки вказаної в умові площини. 101. 1) $m = (-8; -1; -6)$; 2) –9; 3) $M(3; 4; 1)$. 102. (–9; 5; –2); 2) –18; 3) (4; –1; 1). 103. 1) (–28; 8; –16); 2) –1; –7. 104. 1) (2; 2; 0); 2) (–2; 4; 0).

105. 1) (4; –1; –6); 2) –58; 3) $\left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. 106. 1) (–2; –1; 0); 2) (–5; –5; 1). 107. 1) $\left(4\sqrt{3}; 4\right)$; 2) $\left(4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}\right)$; 3) (0; 8); 4) $\left(-4; 4\sqrt{3}\right)$. 108. $\left(2; -2; 2\sqrt{2}\right)$. 109. 1) 5; –2; 3); 2) (4; 7; 4); 3) (6; 5; 5). 110. 1) $4\sqrt{2}$, 135°; 2) так; 3) так; 4) (5; 0; 0); 5) $\left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 0\right)$; 6) (2; 0; 7). 111. 1) 6, 180°; 2) ні; 3) так; 4) (0; 9; 0); 5) (3; 0; 0); 6) (2; 3; 0). 112. 1) $\sqrt{10}$; 5; 2) ≈125°; 3) (9; –3; 0), (–9; 3; 0). 113. 1) Прямокутник; 2) паралелограм. 114. ***Вказівка***. Порівняйте вектори $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$. 115. 1) Ні; 2) 3; 3) $(x+5)^2+(y-2)^2+z^2=16$; 4) $(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=16$. 116. 1) Так; 2) $\sqrt{29}$; 3) $x^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$; 4) $x^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16$. 117. 1) Ні; 2) $\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right), \left(0; \frac{1}{4}; 0\right), (0; 0; -1)$; 3) $x-2y+2z+14=0$; 4) перетинаються; 5) $\arccos\frac{7}{2\sqrt{26}} \approx 64°$. 118. 1) Ні; 2) (2; 0; 0); (0; –; 0); $\left(0; 0; \frac{2}{3}\right)$; 3) $x-y-z=0$; 4) перетинаються; 5) 90°. 119. ***Вказівка***. Перевірте, що вказані точки задовольняють дане рівняння.

Розділ 3

120. 1) 2,1; 2,01; 2001; 2) 2. 121. 1) 55 км/год. 122. $54\frac{6}{11}$ км/год. 123. 6. 124. 1) $\frac{g}{2} \approx 4{,}9$ м/с; $30g \approx 294$ м/с; 2) ≈ 9,8 м/с; ≈ 588 м/с. 127. 1) 2; 2) – 1; 3) –3; 4) 1,5. 129. 1) – 0,19; 2) – 7; 3) 0,1. 130. 1) 10; –6; 1; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. 131. 1) 1; 2) 0; 3) –1. 132. 1) t = 1,5; 2) (1,5; +∞). 133. t = 1,5. 134. $x = \begin{cases} \sqrt{t} \text{ при } 0 \le t \le 4, \\ \frac{t}{4}+1 \text{ при } t > 4. \end{cases}$

135. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. 136. 1) 135°; 2) 150°. 137. 1) $y = 4x - 4$; 2) $y = 0$; $y = 2x - 1$; 3) $y = -x - \frac{1}{4}$; 4) $y = -x - \frac{1}{4}$. 138. 1) $v_1(2) > v_2(2)$; $v_2(3) > v_1(3)$; 2) рівні; 3) друга точка змінила напрямок руху в момент t = 2 с; 4) [2; +∞). 139. 1) Паралельні; 2) перетинаються. 141. Усі дійсні числа, окрім $x = k\pi$, $k \in Z$. 142. 1) 2; 2) 0. 143. 1) $y' = 8x^3 - 15x^2 + 2$; 2) $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 5$; 3) $y' = 4x^5 + 12x^2 + 2x - 2$; 4) $y' = -\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} + 5$; 5) $y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$; 6) $y' = 15x^2 - 6x + 5$; 7) $y' = -6x^2 + 3x + 1$; 8) $y' = -\frac{2}{(x+1)^2}$; 9) $y'(0) = -2$; 10) $y' = \frac{x^2+8x+1}{(1-x^2)^2}$; 11) $y' = \frac{1}{3\sin^2 x}$;

12) $y'=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$; 13) $y' = \cos x - x\sin x + 1$; 14) $\frac{2}{3}$; 15) $y'=\frac{1}{2}\cos x$; 16) $y' = (\ln 3)^2 \cdot 3^x$; 17) $y' = \ln 1{,}5 \cdot (1{,}5)^x$; 18) $y'=-\frac{1}{x}$; 19) $f'(1) = 1$; 20) $y'=\frac{1}{x}+2$; 21) $y'=-\frac{1}{x}$; 22) $y'(1)=-\frac{2}{\ln 2}$; 23) $y' = 2\ln 10 \cdot 10^{2x-1}$. **144.** 1) $A(0; -1)$, $B\left(\frac{2}{3}; -\frac{17}{27}\right)$; 2) $A(1; 0)$, $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{44}{27}\right)$. **145.** 1) ≈0,0023; 2) ≈ 0,0814. **146.** 45°. **147.** 1) $y = 3 + 2x$; 2) $y = -3x + \frac{4+3\pi}{2}$; 3) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}(20+\pi)}{8}$. **148.** $A(0; -1)$, $B(4; 3)$. **149.** 1) $y = -3x + 2$; 2) $y = -x + 1$; 3) $y = x - 2$; 4) $y = -x + 1$. **150.** 1) $v = (2t^3 - 2t)$ м/с; 2) $t_1 = 0$ с, $t_2 = 1$ с; 3) $v(0) = 0$ м/с, $v(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ м/с; 4) 4 м/с². **151.** 1) $\pi\sqrt{3} \approx 5{,}44$ м/с; $\pi\sqrt{2} \approx 4{,}43$ м/с; $-2\pi \approx -6{,}28$ м/с; 2) $t=\frac{2k+1}{2}$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$; 3) $t = k$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$. **152.** 1) 30 м/с²; 2) $t = 0{,}5$ с, $v(0{,}5) = -13{,}5$ м/с. **153.** 1) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $[-1; 0) \cup (0; +\infty)$. **154.** 1) Непарна; 2) непарна; 3) парна; 4) ні парна, ні непарна. **155.** 1) π; 2) 3π; 3) 2π; 4) $\frac{\pi}{2}$. **156.** 2), 4). **158.** 1) Функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -3]$ і $[4; +\infty)$, функція спадає на проміжку $[-3; 4]$; 2) функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$, функція зростає на кожному з проміжків $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ і $[1; +\infty)$; 3) функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$, функція зростає на проміжку $[-1; 1]$; 4) функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -2]$ і $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, функція спадає на проміжку $\left[-2; \frac{2}{3}\right]$; 5) функція спадає на проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$, функція зростає на проміжку $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; 6) функція зростає на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right]$ і $[1; +\infty)$, функція спадає на проміжку $\left[-\frac{5}{3}; 1\right]$; 7) функція зростає на проміжку $\left(-\infty; \frac{15}{4}\right]$, функція спадає на проміжку $\left[\frac{15}{4}; +\infty\right)$; 8) функція спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$; 9) функція спадає на проміжку $(-\infty; -1]$, функція зростає на проміжку $[-1; +\infty)$; 10) функція спадає на проміжку $(-\infty; e]$, функція зростає на проміжку $[e; +\infty)$; 11) функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$, функція зростає на проміжку $[-3; 1]$. **159.** 1) Два; $(-2; 0) \cup)1; 3)$. **160.** Функція зростає на проміжку $[-2; 1]$, функція спадає на проміжку $[1; 2]$. **163.** а) 1) $(-4; -3)$

і (–1; 4); 2) (–4; –3), (–3; -1) і (4; 6); 3) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$; 4) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$; 5) таких точок немає. **163.** б) 1) (0; 2) 2) (–3; 0) і (2; 4); 3) $x = 0$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 5) $x = 2$. **164.** 1) $x = -1$ – точка максимуму, $x = \frac{7}{3}$ – точка мінімуму; 2) $x = -\frac{5}{3}$ – точка максимуму, $x = 1$ – точка мінімуму; 3) $x = \frac{3}{4}$ – точка мінімуму; 4) $x = -2$ — точка мінімуму; 5) $x = \frac{1}{3}$ – точка максимуму; 6) $x = -1$ – точка мінімуму; 7) $x = -2$ – точка максимуму, $x = 2$ – точка мінімуму; 8) $x = e^{-1}$ – точка мінімуму; 9) $x = 1$ – точка максимуму. **166.** 1) $x = -1$ – точка мінімуму, $x = 3$ — точка максимуму; 2) $g(3)$. **169.** Два. **170.** 1) 1; 0; 2) 2; 1; 3) 5; 3; 4) 4; 0. **171.** 1) 7; –5; 2) 5; –7; 3) 3; –1; 4) 3; 0; 5) $26\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 6) 10; 1; 7) $\sqrt{2}$, 1; 8) $\frac{2+\pi}{2}$; $-\frac{2+\pi}{2}$; 9) 0; $-e^{-1}$. **172.** 1) $-\frac{1}{3}$; –5; 2) $\frac{25}{8}$; 2. **173.** 1) 80×160 м; 2) радіус півкруга дорівнює $\frac{320}{\pi+4} \approx 44{,}8$ м, а сторона прямокутника дорівнює $2R \approx 89{,}6$ м. **174.** Коробка повинна мати форму куба з ребром $x = \sqrt[3]{V}$.

Розділ 4.

176. 1) $y = 5x + C$; 2) $y = \frac{x^8}{8} + C$; 3) $y = -\frac{1}{2x^2} + C$; 4) $y = -\frac{1}{x} + C$; 5) $y = \ln|x| + C$; 6) $y = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$; 7) $y = 2x^{\frac{1}{2}} + C$; 8) $y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$; 9) $y = \frac{3^x}{\ln 3} + C$; 10) $y = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$; 11) $y = e^x + C$. **177.** $y = -2x + C$. **178.** 1) $y = x$; 2) $y = \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{4}$; 3) $y = 2\sqrt{x} - 8$; 4) $y = e^x - 3$; 5) $y = \ln(-x) + 2$. **179.** 1) $y = -\frac{1}{x}$; 2) $y = \ln x - 1$. **180.** 1) $x = \frac{t^3}{3}$; 2) $x = \frac{t^3}{3} - 1$. **181.** $x = -1$. **182.** Другої. Графік першої первісної можна одержати із графіка другої паралельним перенесенням на 1,5 одиниці у від'ємному напрямі осі y. **183.** 1) $y = \frac{u^3}{6} - \frac{3u^2}{2} + 5u + C$; 2) $y = -\frac{1}{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$; 3) $y = \frac{3t^2\sqrt[3]{t}}{7} + t + C$; 4) $y = \frac{\sin x}{5} + 5\operatorname{tg} x + C$; 5) $y = -\frac{1}{x} + 2\ln x - x + C$; 6) $y = \frac{1}{3}\left(e^x + \sin x\right) + C$; 7) $y = x^4 - 2x^2 + C$; 8) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$; 9) $y = -4\sin x - 5\cos x + 0{,}3x + C$; 10) $y = \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| + x + C$; 11) $y = -\frac{1}{2}\cos x + C$; 12) $y = \frac{3^x}{\ln 3} + x + C$; 13) $y = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + C$; 14) $y = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$; 15) $y = -2e^{\frac{1-x}{2}} + C$; 16) $y = \frac{1}{35}(5x+4)^7 + C$. **184.** 1) $y = x^3 + \frac{3}{x} - 5$; 2) $y = -3\operatorname{ctg} x$; 3) $y = x^2 - 5e^x + 7$;

4) $y = x + \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $y = x^3 - \ln x + 1$; 6) $y = e^x - \cos x - 3$; 7) $y = \sin x$. **185.** 1) $y = 1$; 2) $y = 2x + 1$. **186.** $y = 2x - \frac{3}{2}x^2 + 5$. **187.** 1) $x = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$; 2) $x = t - 3\cos t - 2\pi$; 3) $x = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) + 2$. **188.** 1) $x = -3t^2 + 30t - 1$; 2) $x = \frac{5t^2}{2} + 20t - 1$. **189.** 1) $y = x^2 - \ln x + 4$; 2) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + e^x - \frac{2}{3}$; 3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1$. **190.** 1) $v = -\frac{1}{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}$; 2) $x = -\frac{1}{4}\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{t}{4}$. **191.** 1) 8; 2) –1,5. **192.** 1), 2) Прирости рівні. **193.** 2 м/с^2. **195.** 1) 3; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{16}{3}$; 5) 1; 6) $\frac{1 - e^{-2}}{2}$; 7) $\frac{3}{7}$; 8) – 1. **196.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2\ln 2}$; 3) 3; 4) 2. **198.** 2 м. **199.** 1) 3 м; 0,75 м; 2 м; 2) $\int_{0,5}^{1} 2x dx$. **200.** 1) $\frac{35}{3}$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{2}{3\ln 3} - \frac{1}{e}$; 5) $3e - 2$; 6) $\frac{8}{3}$; 7) $\frac{17}{6}$; 8) 4; 9) $-\frac{1}{2} - \ln 2$; 10) $5,5 + 4\ln 2$; 11) 8; 12) $\frac{8}{3\ln 3} + \frac{9}{\ln 2}$; 13) $-\frac{56}{3}$; 14) $1 + e$; 15) $\ln 3$; 16) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **201.** 1) $\frac{16}{3}$ м; 2) $\frac{11}{3}$ м; 3) $\frac{32}{3}$ м. **202.** 50 м. **203.** 1) Перший; 2) 0,5 м. **204.** 1) (0; 1), (1; 1); 2) (3; 3), (0; 3); 3) (0; 0), (1; 1); 4) (0; 1), (1; 1). **206.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{28}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $e - \frac{1}{e} + 2 \approx 4,35$; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 6; 7) $\pi - 2 \approx 1,14$. **207.** 1) $3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 2,29$; 2) $e + \frac{1}{e} - 2 \approx 1,09$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 2; 5) 4,5; 6) 4; 7) $\frac{4}{3}$; 8) $2\sqrt{2}$; 9) $\frac{2}{\ln 2} \approx 2,89$; 10) $\frac{1}{12}$; 11) $\frac{5}{6}$; 12) $\frac{\pi^3 + 12}{6} \approx 7,16$. **208.** $\ln 2 - 0,5 \approx 0,193$. **209.** $\frac{4}{3}$. **210.** 0,4 м^2. **211.** ≈ 624 кг. **212.** 1) $-\frac{2}{3}$ м; 2) 3 м. **213.** 36 рад. **214.** 3,9 К. **215.** Підвищиться на 16,5°. **216.** 1) 0 м; 2) $\frac{96}{\pi}$ м. **217.** 90 Дж. **218.** 1) $\frac{k}{10}$ Дж; 2) $\frac{2k}{15}$ Дж.

Розділ 5

219. 1) 36 см^2, $3\sqrt{2}$ см; 2) 45°; 3) 90°; 4) $\sqrt{6}$ см. **220.** 1) $4l^2\cos^2\alpha$, $l\sin\alpha$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$; 3) $180° - 2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{1}{2}l\sin\alpha$. **221.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{3}}a$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{6}}a$; 4) $\frac{3}{2}a$, $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$. **222.** 1) $\sqrt{p^2 - \frac{a^2}{12}}$; 2) $\arccos\frac{a\sqrt{3}}{6p}$; 3) $\arccos\frac{2a}{\sqrt{12p^2 + 3a^2}}$; 4) $\frac{a}{2p}\sqrt{3p^2 - \frac{a^2}{2}}$.

223. $4\sqrt{3}$ см. 225. 1) 9 см і $\sqrt{65}$ см; 2) $\mathrm{arctg}\frac{7}{4}$ і $\mathrm{arctg}\frac{7\sqrt{2}}{8}$; 3) $42\sqrt{2}$ см², 42 см²; 4) $6\sqrt{85}$ см². 226. 1) $\sqrt{\frac{211}{3}}$, $\sqrt{\frac{163}{3}}$; 2) $\mathrm{arctg}\frac{7\sqrt{3}}{8}$, $\mathrm{arctg}\frac{7\sqrt{3}}{4}$; 3) 21, $42\sqrt{3}$. 228. 1) 5; 2) 12; 3) $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$; 4) $2{,}25\pi$; 5) $\frac{3}{2}\sqrt{41}$; 6) $\frac{12}{\sqrt{41}}$. 230. 1) $\frac{r}{2}$; 2) r; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$; 4) 60°; 5) $\frac{2}{3}\pi r$. 232. 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) $2\sqrt{5}$ см; 4) $3\sqrt{13}$ см². 233. 45°. 234. $\frac{H}{\sqrt{2}}$. 240. 1) $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$, $\mathrm{arctg}\sqrt{5}$; 2) $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{2}$ см²; 4) 0; $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{2}$ см²; 5) $2\sqrt{2}$ см²; 6) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ см². 241. 1) $\sqrt{103}$ см; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{403}$ см; 3) $2\,\mathrm{arctg}\frac{3}{\sqrt{403}}$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt{427}$ см². 242. 1) $H^2\mathrm{ctg}^2\alpha$; 2) $\frac{H^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$; 3) $\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha\right)$; $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{H^2\,\mathrm{ctg}\alpha}{2\sin\alpha}\sqrt{2-\cos^2\alpha}$. 243. 6 см. 244. 7 см. 245. $\frac{9\sqrt{2}}{4}\sqrt{91}$ дм. 246. 1) $2a$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 3) $4a^2$; $a^2\sqrt{15}$; $2a^2\sqrt{3}$. 247. 2) $l\sqrt{\sin^2\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{3}}$. 250. 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{125\sqrt{51}}{12}$ см²; 4) $\mathrm{arctg}\frac{1}{4}$; 5) $20\sqrt{21}$ см²; 6) $\frac{5\sqrt{15}}{4}$ см. 251. 1) $2RH$; 2) $2\,\mathrm{arctg}\frac{R}{H}$; 3) $2\,\mathrm{arctg}\frac{R}{\sqrt{R^2+H\sqrt{2}}}$; 4) $\sqrt{4R^2+H^2}$. 252. 10 см. 253. 60°. 254. $\frac{S}{2\alpha\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 255. $\frac{S}{\pi}$.

258. ***Вказівка.*** Скористайтесь симетріями фігур. 260. ***Вказівка.*** Скористайтесь симетріями фігур. 261. ***Вказівка.*** Кожне ребро використовується двічі. 262. ***Вказівка.*** Спробуйте скласти комбінації з декількох многогранників. 263. 1) 21; 2) 27; 3) 15. 264. ***Вказівка.*** Розгляньте спочатку аналог задачі на площині. 268. 1) 16π см²; 2) $2\arccos\frac{3}{5}$; 3) $\sqrt{29}$ см; 4) $5\sqrt{3}$ см; 5) $5\sqrt{6}$ см. 269. 1) 13 см; 2) $\mathrm{arctg}\frac{12}{5}$; 3) $\sqrt{194}$ см; 4) $26\sqrt{3}$ см; 5) $8\sqrt{6}$ см. 270. 1) 13 см; 2) $2\,\mathrm{arctg}\frac{5}{12}$; 3) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см; 4) 7,5 см. 272. 1) 7 см; 2) 1 см; 3) 37π см²; 4) $\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{7}$; 3) $\sqrt{13}$ см. 273. 1) $\frac{3}{4}a$; 2) $\frac{a}{2+2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{3+\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}}a$. 274. 1) $\frac{144}{17}\pi$; 2) $\frac{144}{289}$. 275. 1) $\sqrt{l^2-a^2}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{2l^2-a^2}$; 3) $\mathrm{arctg}\frac{a}{\sqrt{2l^2-2a^2}}$; 4) $\arcsin\frac{a}{l}$. 276. 7 см. 277. 4 см. 278. 3 см. 279. $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ см. 280. 4,5 см. 281. 8 см. 282. 1) Так; 2) так.

288. 1) $\frac{22,5\pi}{16}$ см²; 2) найбільша площа перерізу дорівнює $23,04\pi$ см², найменшої площі не існує.

Розділ 6

289. 1) $120\sqrt{2}$ см³; 2) 48 см³; 3) 24 см³; 4) $27\sqrt{3}$ см³. **290.** 1) 6 см³; 2) $\frac{324}{7}\sqrt{\frac{2}{7}}$ см³; 3) $384\sqrt{11}$ см³; 4) $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$. **291.** 1) 18 см³; 2) $\frac{243}{4}\sqrt{3}$ см³; 3) $162\sqrt{3}$ см³; 4) $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}\sin 2\alpha\cos\alpha$; 5) 18 см³; 6) 24 см³; 7) $\frac{a^3}{4}$. **292.** 1) $25\sqrt{119}$ см³; 2) $128\sqrt{2}$ см³; 3) $2\sqrt{2}S\sqrt{d^2\pm\sqrt{d^4-4S^2}}$. **293.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м³; 2) $3\sqrt{3}$ м³; 3) $\frac{3\sqrt{3}d^3}{8}\sin\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\sqrt{\frac{S^3\sin\alpha\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}}$. **294.** 1) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{1}{2}a^3\sin 2\beta\,\mathrm{tg}\beta$; 3) $\frac{1}{2}l^3\sin\beta\cos^2\beta\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\frac{1}{4}l^3\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta$. **296.** 1) $\frac{\pi}{4}S\sqrt{S}$; 2) $\frac{\pi}{2}a^2H$; 3) $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\pi a^3\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\varphi}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **302.** 12. **303.** 27. **308.** 1) πR^2H; 2) $\frac{\pi}{3}k^2H$; 3) $\frac{\pi}{5}$.
309. $\frac{500}{3}\pi$. **310.** $\approx 13,7$ кг. **311.** $\approx 10,2$ дм. **314.** $a^2l\sin\alpha$. **315.** 1) $24\sqrt{3}$ см³; 2) $\frac{a^2l}{2}\sqrt{1-2\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{alh}{2}$. **318.** 1) 27π см³; 2) $6\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ см; 3) $3\sqrt{3}$ см³; 4) $18\pi(2-\sqrt{3})$ см³; 5) $4\pi\sqrt{3}$ см³; 6) $32\pi\sqrt{3}$ см³. **321.** $\approx 5,8$ млн. т. **323.** $\approx 2,8$ т.
324. $\frac{512}{27}\sqrt{5}\approx 42,4$ (см²). **325.** 1) $\frac{448}{3}$ см³; 2) $4\sqrt[3]{\frac{7}{\pi}}$ см; 3) 147 см³.
326. 1) $\frac{1}{3}b^3\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{\pi}{9}b^3\cos^2\alpha$; 3) 1:4; 4) $\frac{19}{81}b^3\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$.
327. 1) 192 см³; 2) 12 см; 3) 189 см³; 4) $2\sqrt[3]{36}$ см. **328.** 1) 2 см³; 2) 108π дм³; 3) 175 дм³; 4) 108π м³; 5) 360π см³; 6) 30π см³. **333.** 1) $162\sqrt{3}$ см²; 2) 36 см²; 3) $a^2\left(\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}+2\right)$. **334.** $\approx 24,4$ т. **335.** 1) $9\sqrt{3}\left(\sqrt{117}+3\right)$ см²; 2) $54\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)$ см²; 3) $\frac{b^2}{4}\left(3\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\sqrt{3}\right)$; 4) $3\sqrt{3}r^2+9r^2\,\mathrm{tg}\alpha$; 5) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{48V^2}{a^4}+\frac{a^2}{12}}$; 6) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$. **336.** 1) $\frac{25}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$ см²; 2) 26 см². **337.** ≈ 6 м².
338. 1) 8π см²; 2) 16π см²; 3) $16+8\sqrt{2}$ см² і 64 см³. **339.** 1) $\pi p+\frac{8q^2}{\pi p^2}$; 2) $np\sin\frac{180^\circ}{n}$.

343. 1) $\frac{S}{\cos\alpha}$; 2) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 3) $\cos\frac{180^\circ}{n}\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$. 344. 1) $32\pi\left(1+2\sqrt{3}\right)$ см². 345. 1) $36\left(\sqrt{3}+1\right)$ см²; 2) $9\pi\sqrt{3}$ см²; 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}+2}$. 346. 1) 288 дм²; 2) $6\sqrt{2}$ дм; 3) 108π дм²; 4) $18\pi\sqrt{3}$ дм². 347. ≈ 8.4 см². 348. 39 листів. 349. 535 дм². 350. 1) ≈304 см²; 2) ≈145 см²; 3) ≈327 см²; 4) 0,5. 351. 1) πa^2; 2) $4\pi R^2$; 3) $4\pi\left(\frac{aR}{a+\sqrt{4R^2+a^2}}\right)^2$. 352. 1) 3; 2) 2; 3) 4. 353. 1) 76π см²; 3) 16 см². 354. Куб.

Розділ 7

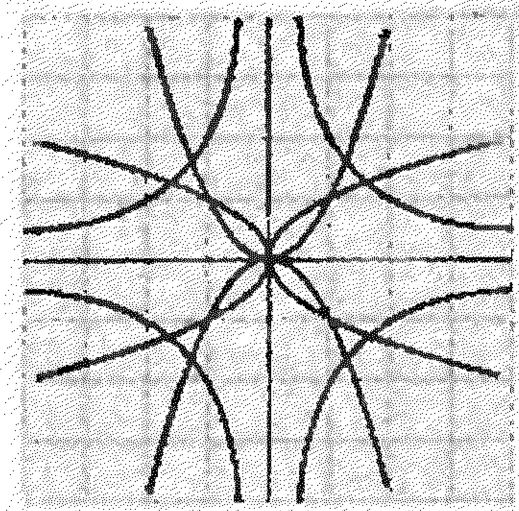
359. 1), 3), 4), 6). 360. 1), 3), 4), 5). 361. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. 362. 1) Так; 2) ні; 3) не менше 7; 4) не менше 10. 363. 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$. 364. 1) 0,25; 2) $\frac{1}{9}$; 3) 0,5; 4) $\frac{4}{9}$. 365. 1) 0,25; 2) 0,25; 3) 0,75. 366. 1) 0,2; 2) 0,3; 3) 0,5; 4) 0,5. 367. 1) 0,2; 2) $\frac{7}{15}$; 3) $\frac{8}{15}$; 4) 0,2; 5) 0,4; 6) 0,4. 368. 1) 0,5; 2) $\frac{5}{18}$; 3) $\frac{5}{18}$; 4) $\frac{17}{36}$; 5) $\frac{1}{3}$. 369. 25. 370. 20. 371. 1) 0,75; 2) 0,25. 373. 15. 374. 60. 375. 1) і 3). 376. 1) 0,975; 2) 0,025; ≈ 25. 377. 1) 499; 2) 1500. 379. 1) 0,89 і 0,84; 2) 0,08 і 0,12; 0,02 і 0,04; 0,01 і 0. 380. 6. 381. 1) 4; 2) 18. 382. 1) 16; 2) 5. 383. 180. 384. 1) 6 375 600. 385. 500. 386. 1) 16; 2) 12; 3) 8; 4) 6; 5) 4; 6) 2; 7) 12. 387. 1) $\frac{1}{5040}$; 2) $\frac{7}{720}$; 3) 0,5. 388. 0,2. 389. 0,125. 390. 780. 391. 1) 330; 2) 350; 3) 200. 392. ≈ 0,267. 393. 1) ≈ 0,508; 2) ≈ 0,246; 3) ≈ 0,492. 394. 1) 210; 2) 5040. 395. 1) $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{1}{15}$; 3) $\frac{7}{15}$. 396. ≈ 0,12. 397. 1) Тільки II. 398. 1), див. табл.

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	1	2	5	8	17	21	18	8
ν_i	0,0125	0,025	0,0625	0,1	0,2125	0,2625	0,225	0,1

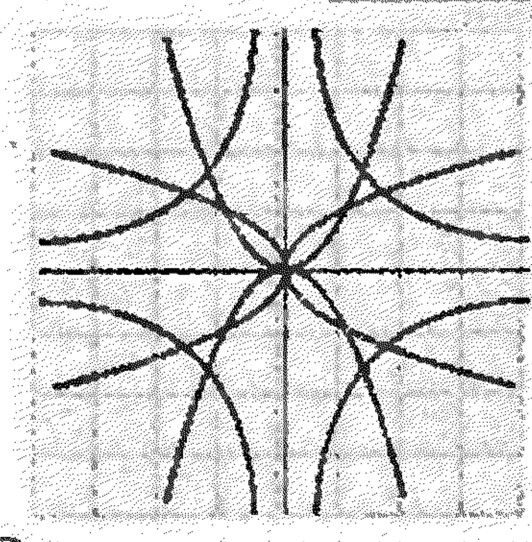
2), див. табл.

x_i	36–37	38–39	40–41	42–43
n_i	3	13	38	26
ν_i	0,0375	0,1625	0,475	0,325

3) $\bar{x}\approx 11{,}1$; Me = 11,2; $w = 2{,}5$; $\bar{x}\approx 14{,}8$; Me = 15,5; $w = 6{,}7$; 4) Ні. 401. Середні арифметичні відрізняються незначно, тому за цими даними не можна відповісти на запитання. 402. 1) Mo = 7; Me = 5. 403. в) 404. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні. 406. 2). 407. $\approx\frac{Mn}{m}$. 408. Немає підстав для відхилення гіпотези про 80-процентну ефективність.



Предметний покажчик



Зміст

Навчальне видання

АФАНАСЬЄВА Ольга Миколаївна
БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович
ПАВЛОВ Олександр Леонідович
СЛІПЕНКО Анатолій Костянтинович

МАТЕМАТИКА
Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів
Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*
Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 15.06.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 27,90. Умовн. фарбо-відб. 55,80. Обл.-вид. арк. 21,60.
Наклад 40 000 прим. Зам. 151-11.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70
publishing@budny.te.ua www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1902-6

9 789661 019026

Надруковано на ПРАТ «Львівська книжкова фабрика "Атлас"»
корпоративне підприємство ДАК «Укрвидавполіграфія»
79005, м. Львів, вул. Зелена, 20

Свідоцтво серія ДК № 1110 від 08.11.2002 р.