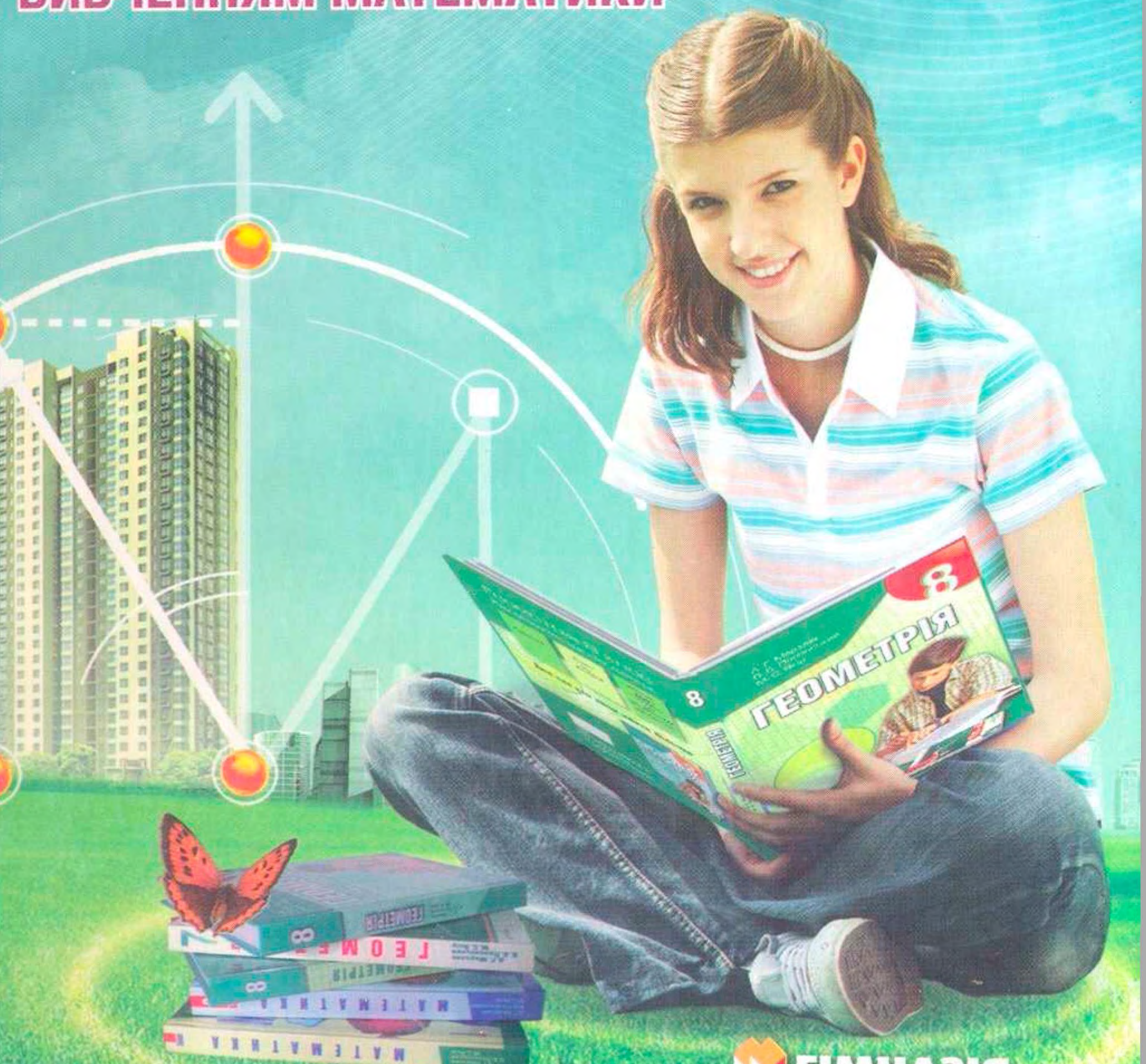
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

9

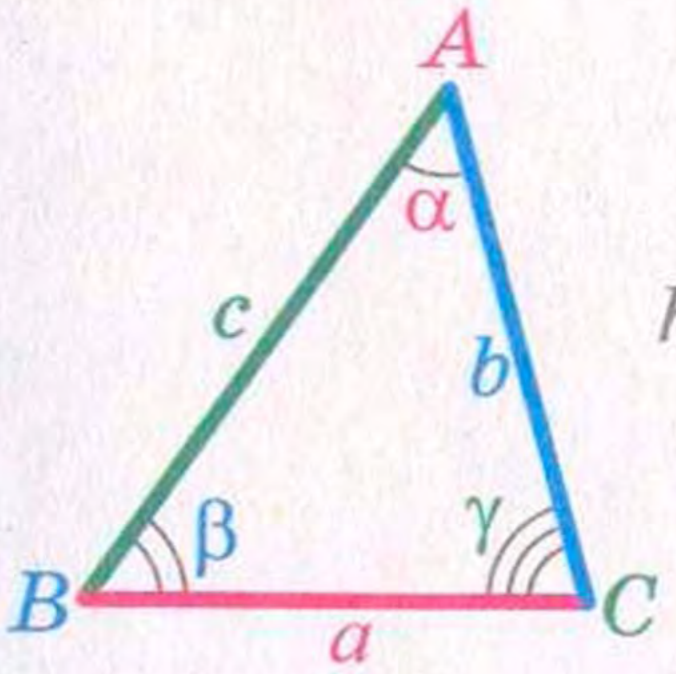
ГЕОМЕТРІЯ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ КЛАСІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ



ГІМНАЗІЯ

ТРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ



a, b, c — довжини сторін BC, AC, AB відповідно

α, β, γ — величини кутів A, B, C відповідно

m_a, m_b, m_c — довжини медіан, проведених з вершин A, B, C відповідно

l_a, l_b, l_c — довжини бісектрис, проведених з вершин A, B, C відповідно

h_a, h_b, h_c — довжини висот, проведених з вершин A, B, C відповідно

r і R — радіуси вписаного і описаного кіл трикутника відповідно

p — півпериметр трикутника

r_a, r_b, r_c — радіуси зовнівписаних кіл, які дотикаються до сторін BC, AC і AB відповідно

ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ТРИКУТНИКА

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

ФОРМУЛИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ РАДІУСІВ ВПИСАНОГО, ОПИСАНОГО І ЗОВНІВПИСАНОГО КІЛ ТРИКУТНИКА

$$r = \frac{S}{p} \qquad R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\sin\alpha} \qquad r_a = \frac{S}{p-a}$$

50

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Формула відстані між двома точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координати точки, яка ділить даний відрізок у відношенні λ

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Загальне рівняння прямої

$$ax + by = c, \text{ де } a^2 + b^2 \neq 0$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку

$$y = k\,(x - x_0) + y_0$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Рівняння кола

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

де $M\,(a;\,b)$ — центр кола, R — радіус кола

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА І КОТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—

ВЛАСТИВОСТІ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА І КОТАНГЕНСА

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{tg}\,(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{ctg}\,(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
з поглибленим вивченням математики

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2009

УДК 373:512
ББК 22.151я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист від 19.06.2009 р. № 1/11-4351)

Відповідальний за випуск
Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
Н. С. Прокопенко

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.
М52 Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики.— X.: Гімназія, 2009.— 272 с.: іл.
ISBN 978-966-474-060-6.

УДК 373:512
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-474-060-6

ВІД АВТОРІВ

Любі дев'ятикласники!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Ми сподіваємося, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

🔑 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

n (m) задача, яка пропонується в різних пунктах для розв'язування різними способами (номер m вказує місцезнаходження цієї задачі в іншому пункті);

▲ закінчення доведення теореми.

ПОВТОРЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ §1

1. Задачі на повторення навчального матеріалу з курсу геометрії 8 класу

1.1.° Бічна сторона AB і менша основа BC трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 16 см і 15 см. Який з відрізків перетинає бісектриса кута BAD — основу BC чи бічну сторону CD?

1.2.° Пряма AB дотикається до кола в точці B, а пряма AC перетинає коло в точках C і D. Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

1.3.° На одній стороні кута з вершиною в точці A позначили точки B і C, а на другій — точки D і E, причому $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Знайдіть CE, якщо $BD = 20$ см.

1.4.° Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює S. Знайдіть площу зафарбованої фігури (рис. 1.1).

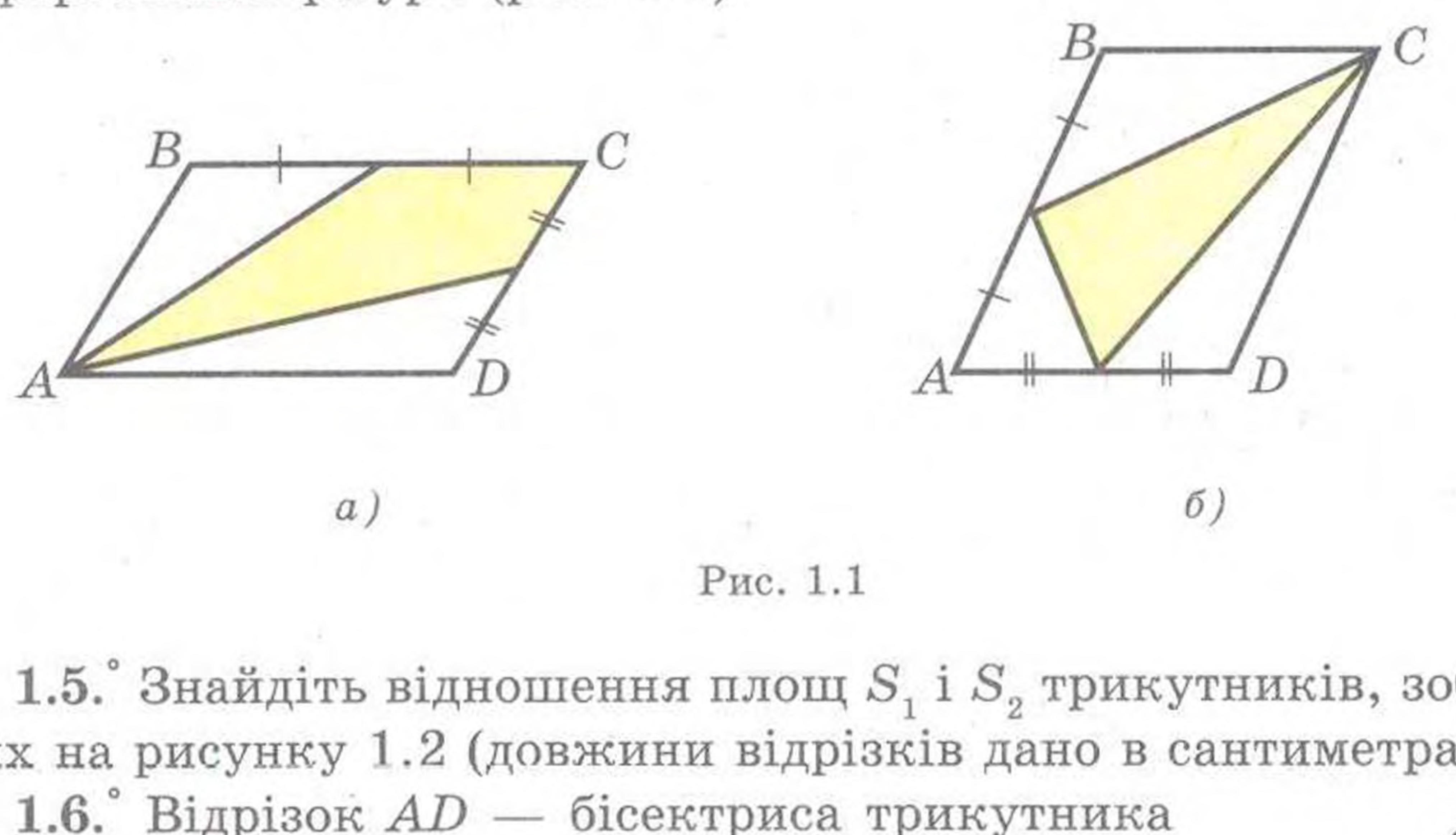


Рис. 1.1

1.5.° Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 1.2 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

1.6.° Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, площа трикутника ABD дорівнює 12 см^2, а трикутника ACD — 20 см^2. Знайдіть відношення сторони AB до сторони AC.

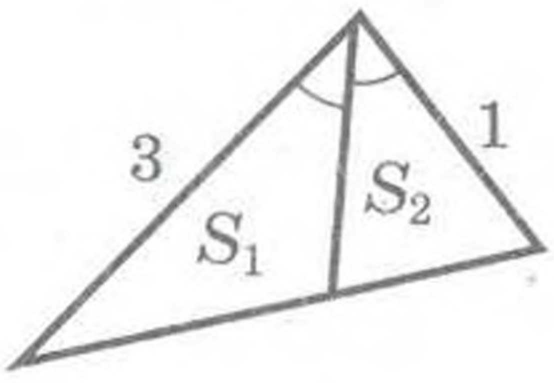


Рис. 1.2

1.7.° Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину поділяються у відношенні 5 : 13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 90 см.

1.8.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.

1.9.° Медіани AM і CK трикутника ABC перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см і $CK = 12$ см.

1.10.° У трикутнику ABC медіани BM і CK перпендикулярні і перетинаються в точці O. Знайдіть довжину відрізка AO, якщо $BM = 36$ см і $CK = 15$ см.

1.11.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, BD і AM – висоти трикутника, $BD : AM = 3 : 1$. Знайдіть $\cos C$.

1.12.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, BD і CK – висоти трикутника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK : BD$.

1.13.° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з основою трапеції кут 30°. Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює R.

1.14.° Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

1.15.° На медіані AM трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AC. У якому відношенні ця пряма ділить сторону BC, рахуючи від вершини C?

? **1.16.**° У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = AD$, $CB = CD$. Доведіть, що $AD \perp BC$.

1.17.° На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначили точку M, а на бічних сторонах AB і BC відповідно точки K і N так, що $MK \parallel BC$, $MN \parallel AB$. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо відомо, що периметр чотирикутника $MKBN$ дорівнює 30 см.

1.18.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 2AD$. Точка K — середина сторони AB. Знайдіть кут CKD.

1.19.° Побудуйте квадрат за трьома точками, які є серединами трьох його сторін.

1.20.° Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці M. Відомо, що $\angle CMD = \angle BAD$. Доведіть, що $BC = AB$.

1.21.° У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) бісектриси гострих кутів BAD і CDA перетинаються в точці, яка належить основі BC. Знайдіть периметр трапеції, якщо $BC = 36$ см, $\angle BAD = 60°$.

1.22.* Побудуйте паралелограм за його вершиною і серединами сторін, яким ця вершина не належить.

1.23.* Перпендикуляр, опущений з вершини кута прямокутника на його діагональ, ділить цю діагональ на відрізки, довжини яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

1.24.* На стороні AD прямокутника $ABCD$ позначили точку M так, що $MD = CD$, $MA = MC$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

1.25.* Висоти BN і DM ромба $ABCD$, проведені з його тупих кутів B і D, перетинаються в точці F. Знайдіть кути ромба, якщо $NF : FB = MF : FD = 1 : 2$.

1.26.* Сума довжин катетів AB і BC прямокутного трикутника ABC дорівнює a. На гіпотенузі AC поза трикутником побудовано квадрат $ACMN$, діагоналі якого перетинаються в точці O. З точки O на прямі BA і BC опустили перпендикуляри OK і OF відповідно. Знайдіть периметр чотирикутника $BKOF$.

1.27.* Серединний перпендикуляр діагоналі прямокутника утворює з його більшою стороною кут $60°$. Відрізок цього перпендикуляра, який міститься всередині прямокутника, дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону прямокутника.

1.28.* На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 2$. Пряма AM перетинає сторону BC у точці E. У якому відношенні точка E поділяє сторону BC, рахуючи від вершини B?

1.29.* Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає діагональ BD і сторону BC у точках E і F відповідно так, що $BE : ED = 2 : 7$. Знайдіть відношення $BF : FC$.

1.30.* Медіани AD і BM трикутника ABC перетинаються в точці O. Через точку O проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть BD, DK і KC, якщо $BC = 18$ см.

1.31.* Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета і проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 см і 12 см.

1.32.* Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

1.33.* Площа рівнобічної трапеції дорівнює $36\sqrt{2}$ см^2, а гострий кут — $45°$. Знайдіть висоту трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

1.34.$^{\bullet}$ Бісектриса кута A трикутника ABC ($\angle C = 90°$) поділяє катет BC на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A, C і точку перетину цієї бісектриси з катетом BC.

1.35.$^{\bullet}$ Центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трапеції.

1.36.$^{\bullet}$ Діагональ рівнобічної трапеції поділяє висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

1.37.$^{\bullet}$ Більша діагональ прямокутної трапеції поділяє висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

1.38.$^{\bullet}$ У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M — середина AB. Знайдіть площу трикутника CMD, якщо площа даної трапеції дорівнює S.

1.39.$^{\bullet}$ Коло, побудоване на діагоналі AC ромба $ABCD$ як на діаметрі, проходить через середину сторони AB. Знайдіть кути ромба.

1.40.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано в зовнішній бік квадрати $ABDE$ і $BCFG$. Виявилося, що $DG \parallel AC$. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

1.41.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC проведено висоту AH і медіану BM. Відрізок MH перетинає бісектрису CK в її середині. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

1.42.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте чотирикутник за його сторонами і відстанню між серединами діагоналей.

1.43.$^{\bullet\bullet}$ Точка C належить прямому куту BOA (рис. 1.3). Доведіть, що периметр трикутника ABC більший, ніж $2OC$.

1.44.$^{\bullet\bullet}$ На аркуші паперу в клітинку накреслено трикутник ABC з вершинами у вузлах сітки (рис. 1.4). За допомогою лінійки побудуйте точку перетину медіан цього трикутника.

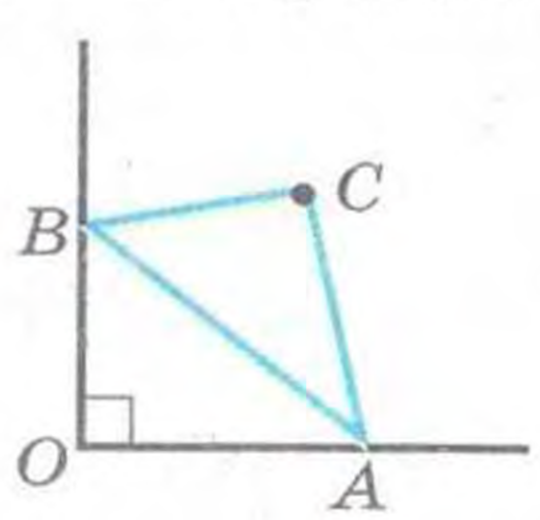


Рис. 1.3

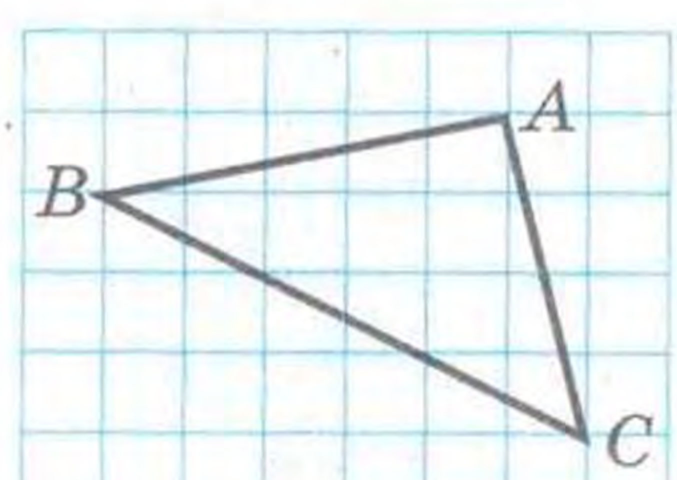


Рис. 1.4

1.45.•• У трапеції довжина однієї з діагоналей дорівнює сумі основ, а кут між діагоналями дорівнює 60°. Доведіть, що трапеція є рівнобічною.

1.46.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точку K так, що вписані кола трикутників ABK і BCK дотикаються. Доведіть, що точка K належить вписаному колу трикутника ABC.

1.47.•• На сторонах AB і CD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відповідно позначили точки K і L такі, що $\angle BAL = \angle CDK$. Доведіть, що $\angle BLA = \angle CKD$.

1.48.•• У гострокутному трикутнику ABC відрізок AH є висотою. З точки H на сторони AB і AC опущено перпендикуляри HK і HL відповідно. Доведіть, що чотирикутник $BKLC$ — вписаний.

1.49.•• Точка J належить трикутнику ABC і $\angle BJC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$. Відомо, що пряма AJ містить центр описаного кола трикутника BJC. Доведіть, що J — центр вписаного кола трикутника ABC.

1.50.•• Дано два кола. Перше з них проходить через центр O другого кола і перетинає це коло в точках A і B. Хорда OC першого кола перетинає друге коло в точці J. Доведіть, що точка J — центр вписаного кола трикутника ABC.

1.51.•• У трикутнику ABC проведено висоти AH і CP. Знайдіть величину кута B, якщо відомо, що $AC = 2PH$.

1.52.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точку D таку, що $\angle ABD = \angle BCD$ і $AB = CD$. Бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці E. Доведіть, що $DE \parallel AB$.

1.53.•• Точка D — середина сторони AC трикутника ABC, DE і DF — бісектриси відповідно трикутників ABD і CBD. Відрізки BD і EF перетинаються в точці M. Доведіть, що $DM = \frac{1}{2}EF$.

1.54.•• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) відрізки CH, CL і CM — відповідно висота, бісектриса і медіана трикутника. Знайдіть довжину CL, якщо $CH = 6$, $CM = 10$.

1.55.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Відомо, що $AB = 15$ см, $BC = 10$ см. Доведіть, що $BD < 12$ см.

1.56.•• В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Відомо, що $\angle BAC = \angle CBD$, $\angle BCA = \angle CDB$. Доведіть, що $CO \cdot CA = BO \cdot BD$.

1.57.•• Бісектриси кутів A і B трикутника ABC перетинають описане коло трикутника ABC у точках K і L відповідно. Відрізки

AK і BL перетинаються в точці O так, що $\frac{AO}{OK} = \frac{BO}{OL}$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

1.58.** Трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$) така, що коло, описане навколо трикутника ABD, дотикається до прямої BC. Доведіть, що коло, описане навколо трикутника BCD, дотикається до прямої AD.

1.59.** У трикутнику ABC проведено бісектрису BK. На сторонах BA і BC позначили відповідно точки M і N такі, що $\angle AKM = \angle CKN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Доведіть, що пряма AC — дотична до кола, описаного навколо трикутника MBN.

1.60.** У колі проведено хорду CD паралельно діаметру AB так, що в трапецію $ABCD$ можна вписати коло. Знайдіть довжину хорди CD, якщо $AB = 2R$.

1.61.** На медіані AM трикутника ABC позначили точку F. Точки K і N — основи перпендикулярів, проведених з точки F на сторони AB і AC відповідно. Знайдіть відрізки FK і FN, якщо $FK + FN = d$, $AB = c$, $AC = b$.

1.62.** У трикутнику ABC проведено чевіани AA_1, BB_1, CC_1, які перетинаються в точці M. Відомо, що площа трикутника AMB_1 дорівнює площі трикутника AMC_1, площа трикутника BMC_1 дорівнює площі трикутника BMA_1, а площа трикутника CMA_1 дорівнює площі трикутника CMB_1. Доведіть, що M — точка перетину медіан.

1.63.** У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) на діагоналі AC позначили точку E так, що $BE \parallel CD$. Доведіть, що площі трикутників ABC і DEC рівні.

1.64.* На медіані BM трикутника ABC позначили точку D. Через точки C і D провели прямі, паралельні відповідно прямим BM і AB. Проведені прямі перетинаються в точці E. Доведіть, що $BE = AD$.

1.65.* На основі AD трапеції $ABCD$ позначили точку M. Відомо, що периметри трикутників ABM, MBC і CMD рівні. Доведіть, що $AD = 2BC$.

1.66.* У коло вписано чотирикутник $ABCD$. На хорді AB побудуйте точку M таку, що $\angle ADM = \angle BCM$.

1.67.* Точки M і N — середини основ AD і BC трапеції $ABCD$ відповідно. На сторонах AB і CD позначили точки P і Q відповідно так, що $PQ \parallel AD$ ($AP \neq PB$). Доведіть, що прямі PN, MQ і AC перетинаються в одній точці.

1.68 - ?

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ §2

2. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180°

Поняття «синус», «косинус», «тангенс» і «котангенс» гострого кута вам знайомі з курсу геометрії 8 класу. Розширимо ці поняття для будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

У верхній півплощині координатної площини розглянемо півколо з центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1 (рис. 2.1). Таке півколо називають **одиничним**.

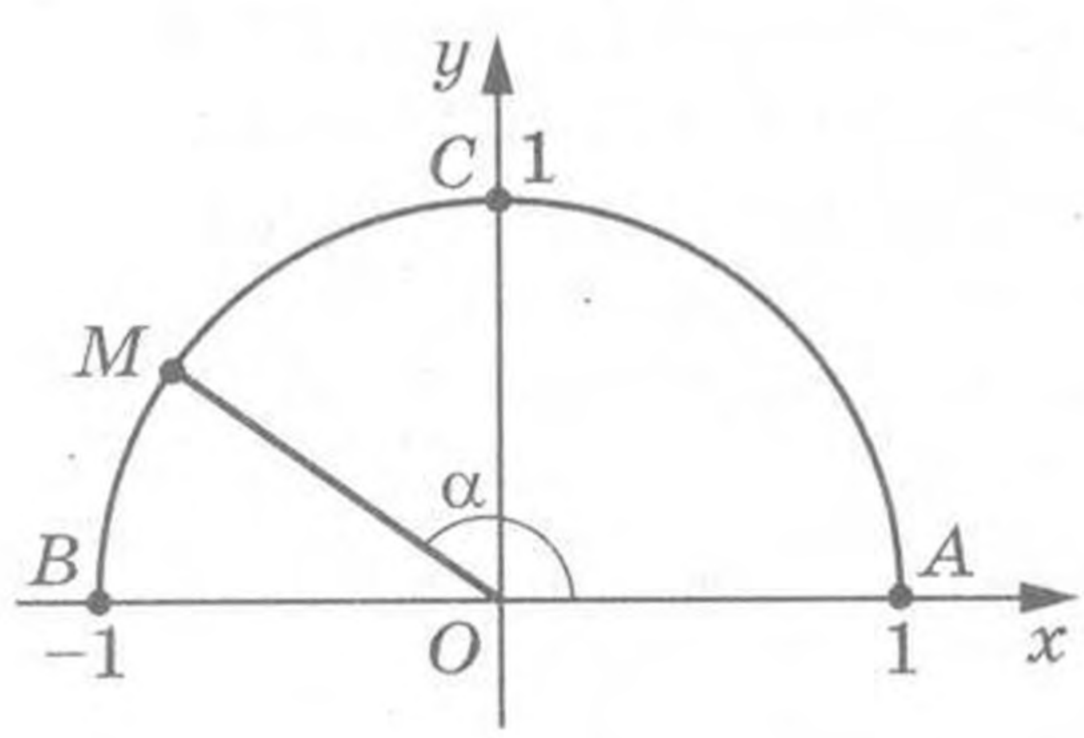


Рис. 2.1

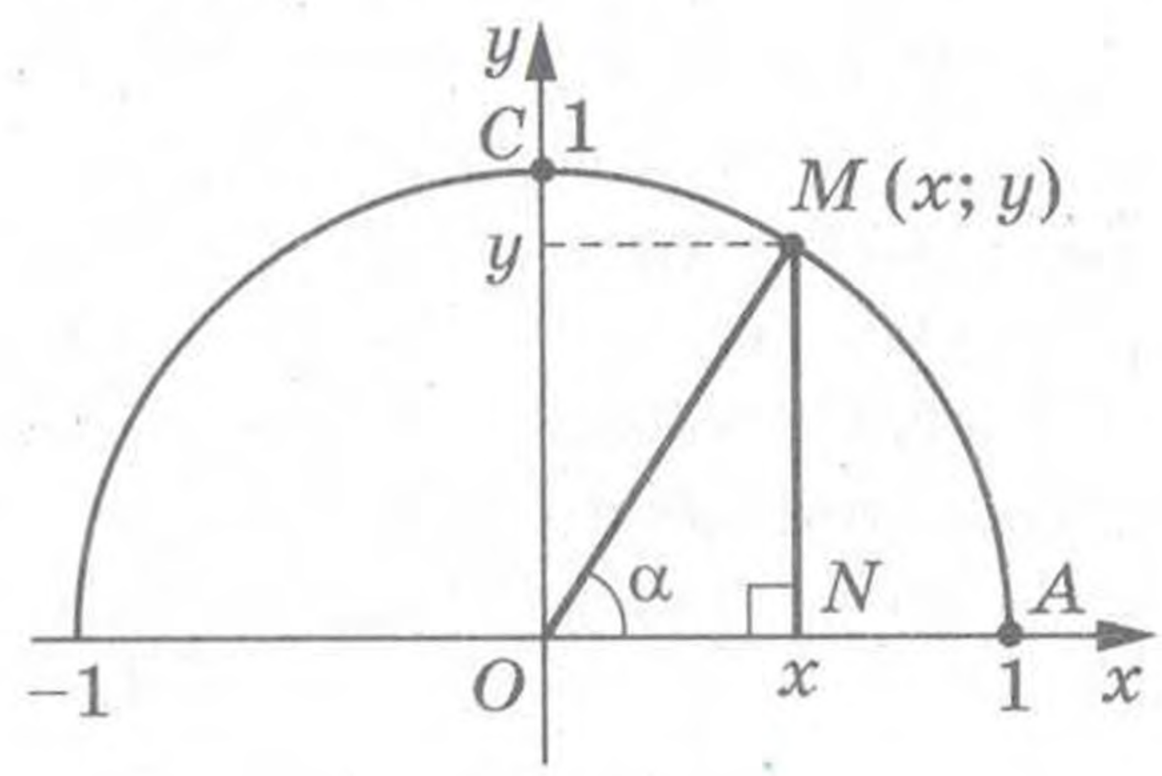


Рис. 2.2

Будемо говорити, що **куту** α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ **відповідає точка** M одиничного півкола, якщо $\angle MOA = \alpha$, де точки O і A мають відповідно координати (0; 0) і (1; 0) (рис. 2.1). Наприклад, на рисунку 2.1 куту, який дорівнює 90°, відповідає точка C; куту, який дорівнює 180°, — точка B; куту, який дорівнює 0°, — точка A.

Нехай α — гострий кут. Йому відповідає деяка точка $M(x; y)$ дуги AC (рис. 2.2). З прямокутного трикутника OMN маємо:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Оскільки $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Отже, косинус і синус гострого кута α — це відповідно абсциса і ордината точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α.

Отриманий результат підказує, як визначити синус і косинус будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Означення. Косинусом і синусом кута α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) називають відповідно абсцису x і ординату y точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α (рис. 2.3).

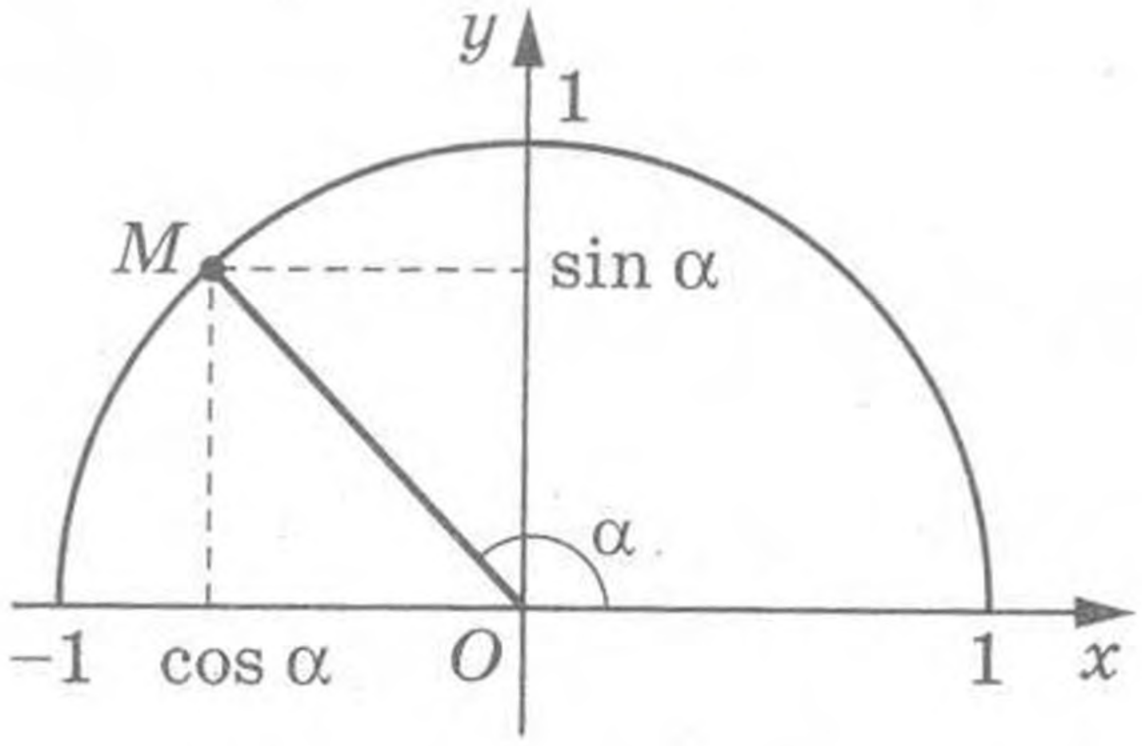


Рис. 2.3

Користуючись таким означенням, можна, наприклад, записати: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Якщо $M(x; y)$ — довільна точка одиничного півкола, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отже, для будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, маємо:

$$0 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1.$$

Якщо α — тупий кут, то абсциса точки одиничного півкола, що відповідає цьому куту, є від'ємною. Отже, косинус тупого кута є від'ємним числом. Зрозуміло, що справедливе і таке твердження: якщо $\cos \alpha < 0$, то α — тупий або розгорнутий кут.

З курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що для будь-якого гострого кута α виконуються рівності

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(90° - \alpha) &= \cos \alpha, \\ \cos(90° - \alpha) &= \sin \alpha \end{aligned}}$$

Ці формули залишаються справедливими і для $\alpha = 0°$, і для $\alpha = 90°$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай кутам α і $180° - \alpha$, де $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ і $\alpha \neq 180°$, відповідають точки $M(x_1; y_1)$ і $N(x_2; y_2)$ одиничного півкола (рис. 2.4).

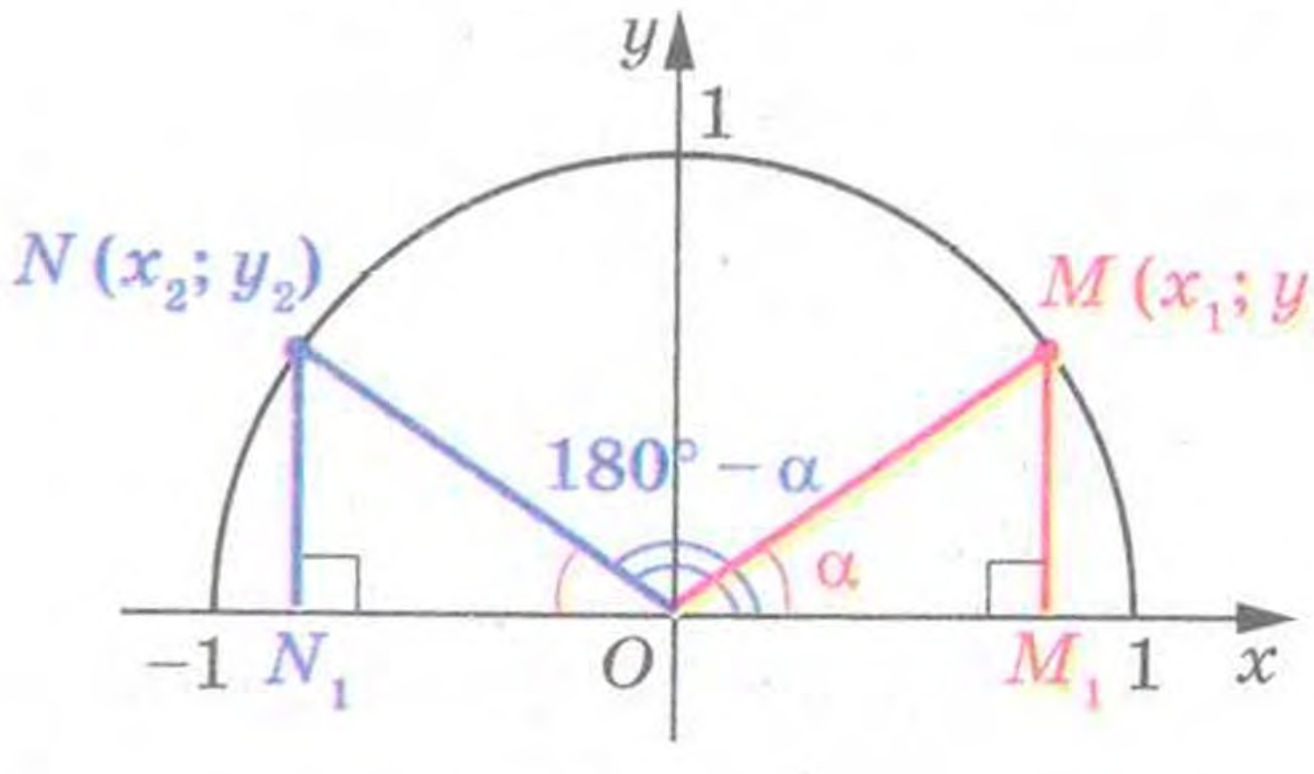


Рис. 2.4

Прямокутні трикутники OMM_1 і ONN_1 рівні за гіпотенузою і гострим кутом ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Звідси $y_2 = y_1$ і $x_2 = -x_1$. Отже,

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha\end{gathered}}$$

Переконайтеся самостійно, що ці рівності залишаються правильними для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

Якщо α — гострий кут, то, як ви знаєте з курсу геометрії 8 класу, справедлива тотожність

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,}$$

яка залишається правильною для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай α — тупий кут. Тоді $180^\circ - \alpha$ є гострим кутом. Маємо:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1.$$

Отже, рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ виконується для всіх $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

З геометричних міркувань зрозуміло, що коли $0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 90^\circ$, то $\sin\alpha < \sin\beta$ (рис. 2.5); коли $90^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$, то $\sin\alpha > \sin\beta$ (рис. 2.6); коли $0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$, то $\cos\alpha > \cos\beta$ (рис. 2.5, 2.6).

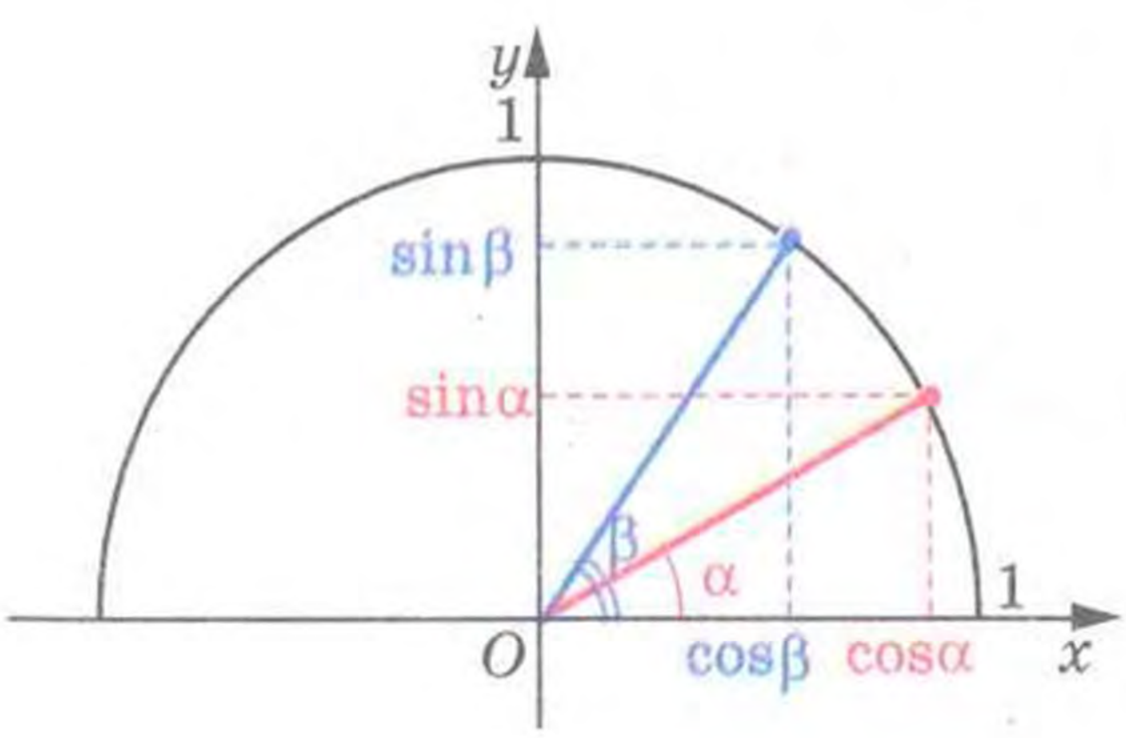


Рис. 2.5

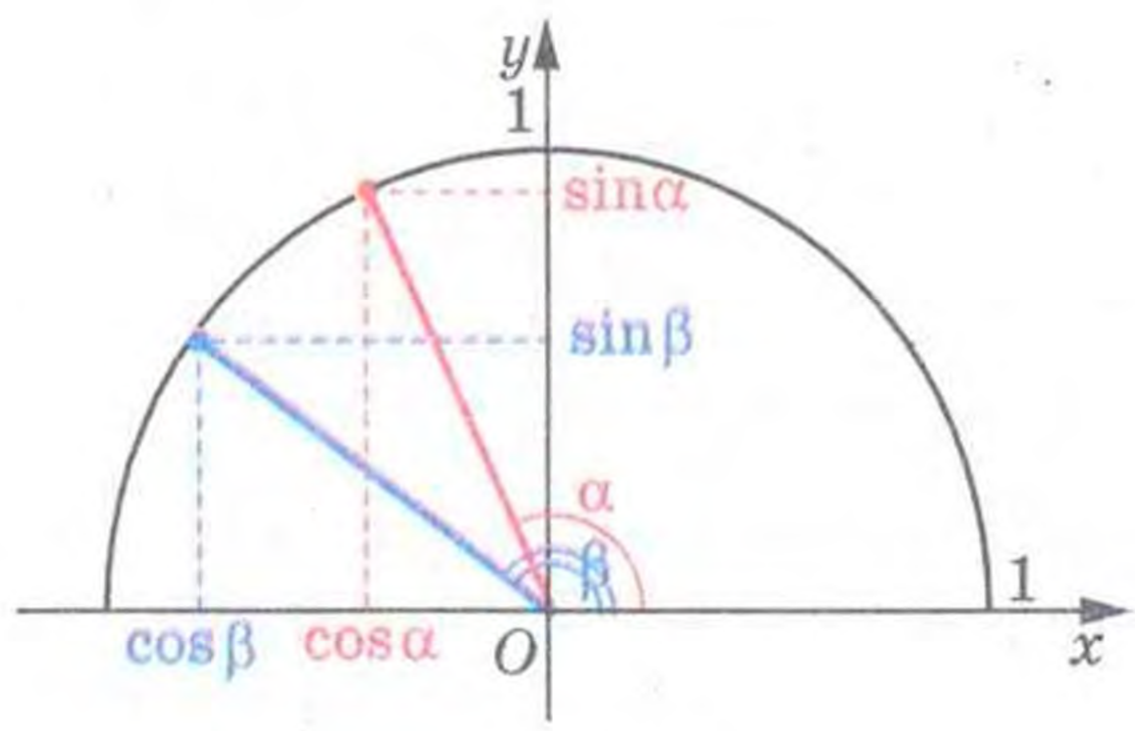


Рис. 2.6

Означення. **Тангенсом** **кута α, де $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ і $\alpha \neq 90^\circ$, називають відношення $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,** тобто

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Оскільки $\cos 90^\circ = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 90^\circ$.

Означення. Котангенсом кута α (позначають ctg α), де $0° < \alpha < 180°$, називають відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тобто

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Оскільки $\sin 0° = \sin 180° = 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 0°$ і $\alpha = 180°$.

Очевидно, що кожному куту α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) відповідає *єдина* точка одиничного півкола. Отже, кожному куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$, котангенса для $\alpha \neq 0°$ і $\alpha \neq 180°$). Тому залежність значень синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута α.

Задача. Доведіть, що $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Розв'язання

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Приклад. Знайдіть $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ВПРАВИ

2.1.° Чому дорівнює:

1) $\sin(180° - \alpha)$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = 0{,}7$;

3) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;

4) $\mathrm{tg}(180° - \alpha)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = -5$;

5) $\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$, якщо $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{1}{3}$?

2.2.° Кути α і β суміжні, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Знайдіть $\cos\beta$.

2) Який із кутів α і β є гострим, а який — тупим?

2.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0° + \mathrm{ctg}\, 90°$;

2) $3\sin 0° - 5\cos 180° + \mathrm{tg}\, 180°$;

3) $\mathrm{tg}\, 23° \cdot \mathrm{tg}\, 0° \cdot \mathrm{tg}\, 106°$;

4) $6\,\mathrm{tg}\, 180° + 5\sin 180° + \cos 180°$;

5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;

6) $\frac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

2.4.° Обчисліть:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180° - \mathrm{ctg}\, 90°$;

2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90° + \mathrm{tg}\, 180°$.

2.5.° Чому дорівнює синус кута, якщо його косинус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

2.6.° Чому дорівнює косинус кута, якщо його синус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

2.7.° Чому дорівнює тангенс кута, якщо його котангенс дорівнює: 1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$?

2.8.° Чому дорівнює котангенс кута, якщо його тангенс дорівнює: 1) −1; 2) 3?

2.9.° Знайдіть $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\mathrm{tg}\, 135°$, $\mathrm{ctg}\, 135°$.

2.10.° Знайдіть sin 150°, cos 150°, tg 150°, ctg 150°.

2.11.° Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;
2) $\sin\alpha = 0,3$;
3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$;
4) $\cos\alpha = -0,99$;
5) $\cos\alpha = 1,001$;
6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

2.12.° Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ і $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0,8$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ і $90° < \alpha \leqslant 180°$;

6) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ і $0° < \alpha \leqslant 90°$.

2.13.° Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

2) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ і $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

2.14.° Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):

1) косинус гострого кута більший за косинус тупого кута;
2) існує тупий кут, синус і косинус якого рівні;
3) існує кут, синус і косинус якого дорівнюють нулю;
4) косинус кута трикутника є невід'ємним числом;
5) синус кута трикутника може дорівнювати від'ємному числу;
6) косинус кута трикутника може дорівнювати нулю;
7) синус кута трикутника може дорівнювати нулю;

8) косинус кута трикутника може дорівнювати −1;
9) синус кута трикутника може дорівнювати 1;
10) синус кута, відмінного від прямого, менший від синуса прямого кута;
11) косинус розгорнутого кута менший від косинуса кута, відмінного від розгорнутого;
12) синуси суміжних кутів рівні;
13) косинуси нерівних суміжних кутів є протилежними числами;
14) якщо косинуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
15) якщо синуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
16) тангенс гострого кута більший за тангенс тупого кута;
17) тангенс гострого кута більший за котангенс тупого кута?

2.15.° Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$;
5) $\operatorname{ctg} 100° \sin 114° \cos 11°$;
6) $\cos 85° \sin 171° \operatorname{ctg} 87°$.

2.16.° Знайдіть значення виразу:
1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\cos 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$;
4) $2 \sin^2 30° + \cos^2 60° + \sin^2 45° + \operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{ctg}^2 30°$.

2.17.° Чому дорівнює значення виразу:
1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120° + 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\operatorname{tg} 45° \sin 60° \operatorname{ctg} 30°$;
3) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

2.18.° Знайдіть значення виразу, не користуючись таблицями і калькулятором:

1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 18°}{\operatorname{ctg} 162°}$.

2.19.° Обчисліть:

1) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 12°}{\operatorname{tg} 168°}$; 3) $\dfrac{\sin 53°}{\sin 127°}$.

2.20.° Знайдіть суму квадратів синусів усіх кутів прямокутного трикутника.

2.21.° Знайдіть суму квадратів косинусів усіх кутів прямокутного трикутника.

2.22.° Порівняйте:

1) $\sin 17°$ і $\sin 35°$; 3) $\cos 89°$ і $\cos 113°$; 5) $\frac{1}{2}$ і $\sin 40°$;

2) $\cos 1°$ і $\cos 2°$; 4) $\sin 50°$ і $\sin 140°$; 6) $-\frac{1}{2}$ і $\cos 130°$.

2.23.° Порівняйте:

1) $\sin 118°$ і $\sin 91°$; 3) $\cos 75°$ і $\cos 175°$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\cos 20°$;

2) $\cos 179°$ і $\cos 160°$; 4) $\sin 70°$ і $\sin 105°$; 6) $\frac{1}{2}$ і $\sin 130°$.

2.24.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 60°$, точка O — центр вписаного кола. Чому дорівнює косинус кута AOC?

2.25.° Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\cos\angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут A трикутника.

2.26.• У непрямокутному трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 30°$, точка H — ортоцентр. Чому дорівнює тангенс кута AHC?

2.27.• Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $\cos\angle AHC = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.28.• Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\sin\angle AOC = \frac{1}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.29.• Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $\sin\angle AHC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.30.• Точка O — центр описаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\sin\angle AOC = \frac{1}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.31.•• Обчисліть $\operatorname{ctg} 5° \operatorname{ctg} 15° \operatorname{ctg} 25° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 75° \operatorname{ctg} 85°$.

2.32.•• Обчисліть $\operatorname{tg} 10° \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 30° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 80°$.

3. Теорема косинусів

З першої ознаки рівності трикутників випливає, що дві сторони і кут між ними однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти третю сторону трикутника. Як це зробити, показує така теорема.

Теорема 3.1 (теорема косинусів). ***Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, наприклад, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Можливі три випадки:

1) кут A — гострий;
2) кут A — тупий;
3) кут A — прямий.

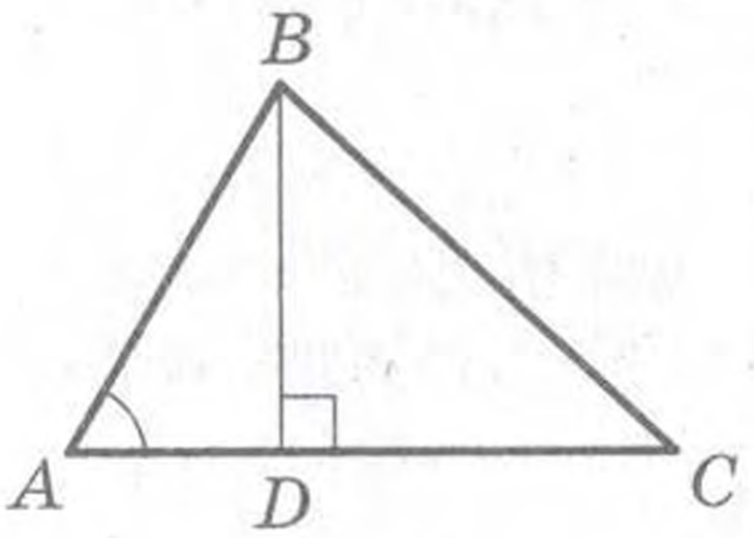


Рис. 3.1

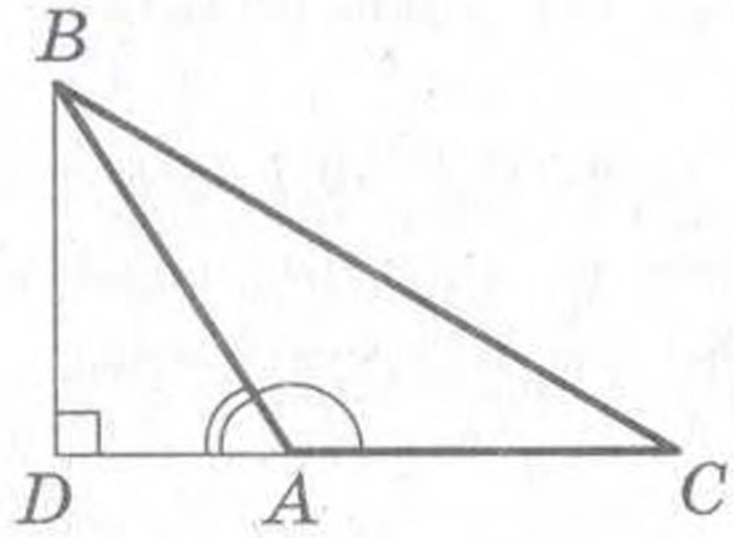


Рис. 3.2

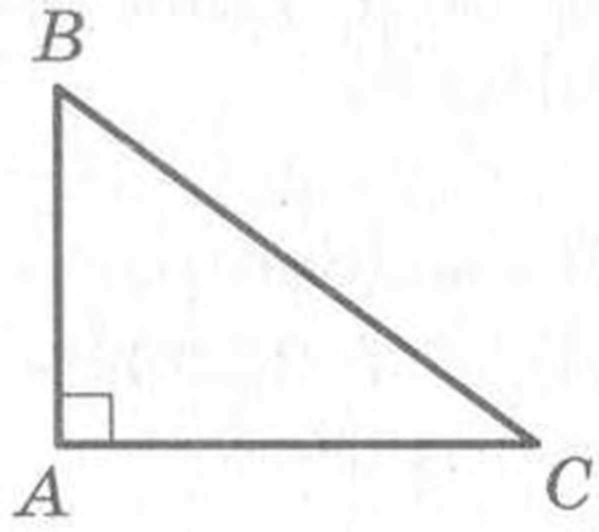


Рис. 3.3

• Розглянемо перший випадок. Якщо $\angle A < 90°$, тоді хоча б один з кутів B і C є гострим. Нехай, наприклад, $\angle C < 90°$. Проведемо висоту BD (рис. 3.1).

З ΔABD отримуємо: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.

З ΔBDC отримуємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 =$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Якщо $\angle C \geqslant 90°$, то $\angle B < 90°$. Тоді потрібно провести висоту трикутника ABC з вершини C. Далі доведення аналогічне розглянутому.

• Для випадку, коли кут A — тупий, проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 3.2).

З $\Delta\, ABD$ отримуємо: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin (180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$

$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180° - \angle BAC) =$
$= -AB \cdot \cos \angle BAC.$

З ΔBDC отримуємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2\, AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

• Якщо кут A — прямий (рис. 3.3), то $\cos A = 0$. Рівність, яку потрібно довести, набуває вигляду

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

і виражає теорему Піфагора для трикутника ABC ($\angle A = 90°$). ▲

Та частина доведення, у якій розглянуто випадок, коли $\angle A$ — прямий, показує, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів. Тому теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.

Якщо скористатися позначенням для сторін і кутів трикутника ABC (див. форзац), то, наприклад, для сторони a можна записати:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

За допомогою теореми косинусів, знаючи три сторони трикутника, можна визначити, чи є він гострокутним, тупокутним або прямокутним.

Теорема 3.2 (наслідок з теореми косинусів). ***Нехай a, b і c — сторони трикутника ABC, причому a — його найбільша сторона. Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним. Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним. Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.***

Доведення. Маємо:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Звідси $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Нехай $a^2 < b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Отже, $2bc \cos \alpha > 0$, тобто $\cos \alpha > 0$. Тому кут α — гострий.

Оскільки a — найбільша сторона трикутника, то проти неї лежить найбільший кут, який на підставі вищедоведеного є гострим. Отже, у цьому випадку трикутник є гострокутним.

Нехай $a^2 > b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Отже, $2bc \cos \alpha < 0$, тобто $\cos \alpha < 0$. Тому кут α — тупий.

Нехай $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $2bc \cos \alpha = 0$, тобто $\cos \alpha = 0$. Звідси $\alpha = 90°$. ▲

Теорема 3.3. ***Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.***

Доведення. На рисунку 3.4 зображено паралелограм $ABCD$. Нехай $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тоді $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.

З ΔABD за теоремою косинусів

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

З ΔACD за теоремою косинусів

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$ або

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. \blacktriangle$$

Задача. Доведіть, що у трикутнику ABC (див. позначення на форзаці):

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Розв'язання. Нехай відрізок BM — медіана трикутника ABC. На промені BM позначимо таку точку D, що $BM = MD$ (рис. 3.5). Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

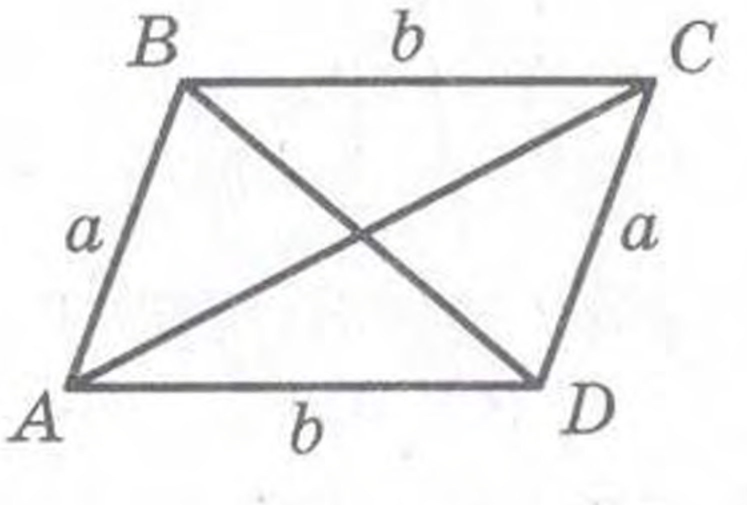


Рис. 3.4

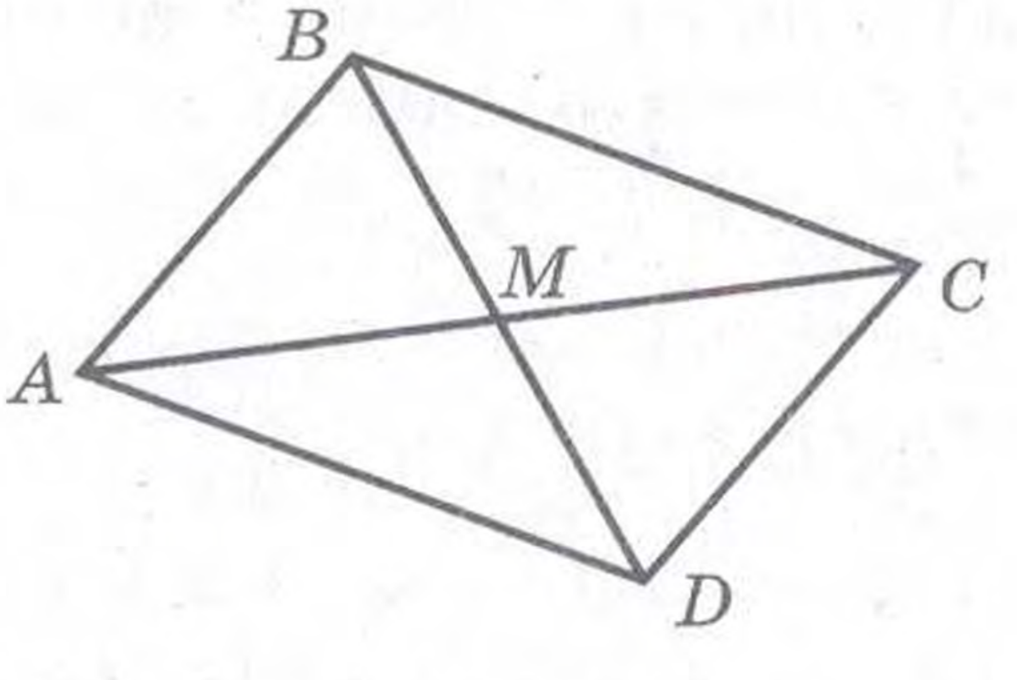


Рис. 3.5

Використовуючи теорему 3.3, можна записати

$BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2$ або $4m_b^2 + b^2 = 2c^2 + 2a^2$.

Звідси $m_b^2 = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$.

Аналогічно доводяться дві інші формули.

Приклад 1. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD : AD = 1 : 2$. Знайдіть відрізок BD, якщо $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів з ΔABC (рис. 3.6): $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$, звідси

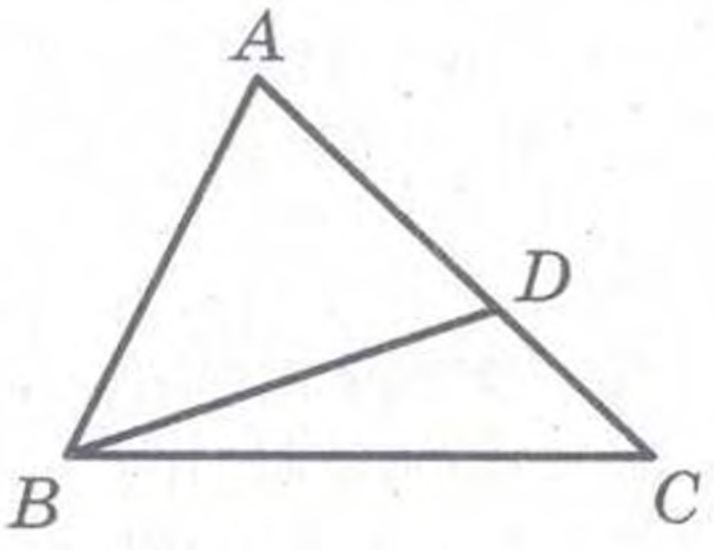


Рис. 3.6

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Оскільки $CD : AD = 1 : 2$, то

$$CD = \frac{1}{3} AC = 5 \text{ см}.$$

Тоді з ΔBCD:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Отже, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см.

Приклад 2. На діаметрі AB кола з центром у точці O взято точки M і N так, що $OM = ON$. На колі позначили точку X. Доведіть, що сума $XM^2 + XN^2$ не залежить від вибору точки X.

Розв'язання. Нехай X — точка кола, відмінна від точок A і B. Тоді радіус OX — медіана трикутника MXN (рис. 3.7). Скориставшися ключовою задачею, запишемо:

$$XO^2 = \frac{2XM^2 + 2XN^2 - MN^2}{4}.$$

Звідси $XM^2 + XN^2 = \dfrac{4XO^2 + MN^2}{2}$.

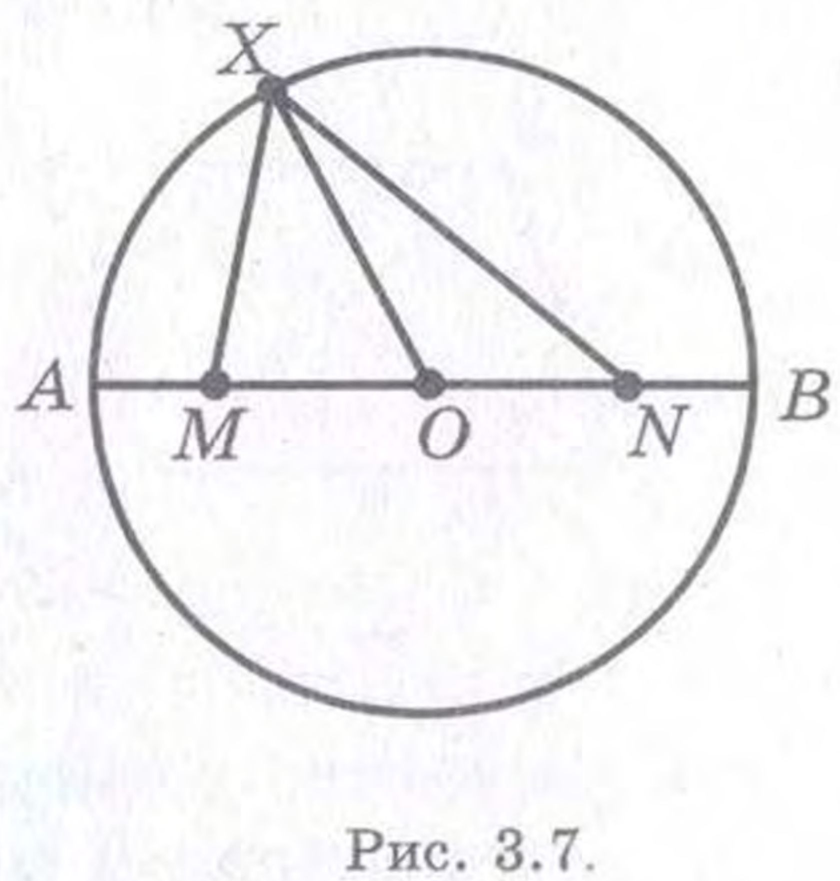


Рис. 3.7.

Оскільки XO — радіус даного кола, то значення правої частини останньої рівності не залежить від вибору точки X.

Випадок, коли точка X збігається з точкою A або точкою B, розгляньте самостійно.

Приклад 3. Відомо, що довжина найбільшої сторони трикутника дорівнює $\sqrt{3}$. Доведіть, що три круги з центрами у вершинах трикутника і радіусами 1 повністю покривають трикутник.

Розв'язання. Очевидно, що ці круги покривають сторони трикутника.

Нехай у трикутнику ABC знайшлася непокрита точка O, яка не належить сторонам. Очевидно, що один з кутів AOB, BOC, COA не менший від $120°$.

Нехай, наприклад, це кут AOC. Тоді $\cos \angle AOC \leqslant -\frac{1}{2}$. З ΔAOC за теоремою косинусів $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC \geqslant \geqslant OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC$. З умови випливає, що $AC^2 \leqslant 3$. Тоді $OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC \leqslant 3$. Оскільки точка O не покрита, то $OA > 1$ і $OC > 1$. Тоді $OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC > 3$. Отримали суперечність. Отже, точок трикутника, не покритих одним з указаних кругів, не існує.

Приклад 4. Додатні числа a, b, c такі, що $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Доведіть, що $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

Розв'язання. Побудуємо кут MON, який дорівнює $60°$. На його сторонах OM і ON позначимо відповідно точки A і B так, що $OA = a$, $OB = b$ (рис. 3.8). За теоремою косинусів $AB^2 = a^2 + b^2 - ab$. Отже, $AB = c$.

У трикутнику OAB один з кутів A і B не менший від $60°$, а другий не більший за $60°$. Отже, у трикутнику OAB сторона c не менша від однієї з двох інших сторін і не більша за другу. Звідси $(a - c)(b - c) \leqslant 0$.

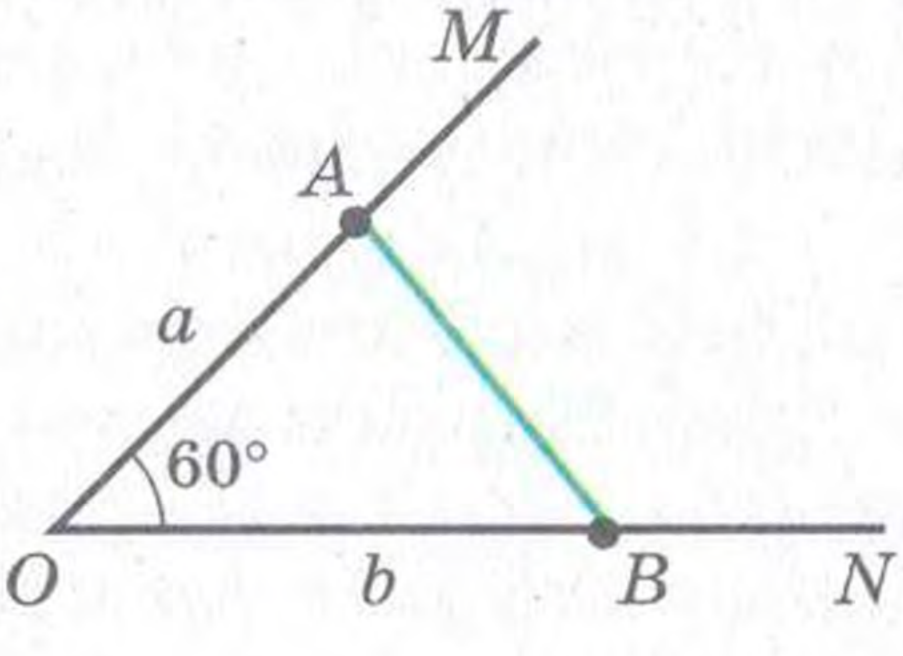


Рис. 3.8

ВПРАВИ

3.1.° Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

3.2.° Знайдіть невідому сторону трикутника DEF, якщо:

1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;

2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

3.3.° Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 20 см і 28 см. Знайдіть найбільший кут трикутника.

3.4.° Сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{18}$ см, 5 см і 7 см. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

3.5.° Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють:

1) 5 см, 7 см і 9 см; 3) 10 см, 15 см і 18 см.

2) 5 см, 12 см і 13 см;

3.6.° Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 12 см. Чи є правильним твердження, що даний трикутник є гострокутним?

3.7.° Доведіть, що трикутник зі сторонами 8 см, 15 см і 17 см є прямокутним.

3.8.° Сторони паралелограма дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см, а один з кутів дорівнює $45°$. Знайдіть діагоналі паралелограма.

3.9.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Знайдіть діагоналі трапеції.

3.10.° На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DB = 2 : 1$. Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см.

3.11.° На гіпотенузі AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : BM = 1 : 3$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AC = BC = 4$ см.

3.12.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороні AB позначено точку M так, що $BM = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка CM.

3.13.° На продовженні гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку D так, що $BD = BC$. Знайдіть відрізок CD, якщо катет трикутника ABC дорівнює a.

3.14.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продовженні гіпотенузи AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 26$ см. Знайдіть довжину відрізка CD.

3.15.° Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, знаходиться на відстанях a і b від кінців гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

3.16.° Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Знайдіть сторону AB.

3.17.° Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює $60°$, відносяться як $5 : 8$, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.18.° Дві сторони трикутника відносяться як $1:2\sqrt{3}$ і утворюють кут у $30°$. Третя сторона трикутника дорівнює $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.19.° Сума двох сторін трикутника, які утворюють кут у $120°$, дорівнює 8 см, а довжина третьої сторони становить 7 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.20.° Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює $120°$, відносяться як $5 : 3$. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

3.21.° Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 14 см, а кут, протилежний меншій з відомих сторін, дорівнює $60°$. Знайдіть невідому сторону трикутника.

3.22.° Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 35 см, а кут, протилежний більшій з відомих сторін, дорівнює $120°$. Знайдіть периметр трикутника.

3.23.° Одна із сторін трикутника у 2 рази більша за другу, а кут між цими сторонами становить $60°$. Доведіть, що даний трикутник є прямокутним.

3.24.° Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату суми двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює $120°$.

3.25.° Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату різниці двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює $60°$.

3.26.° Дві сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна з діагоналей — 12 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

3.27.° Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 см і 11 см, а одна зі сторін — 9 см. Знайдіть периметр паралелограма.

3.28.° Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 14 см, а одна зі сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть сторони паралелограма.

3.29.° Сторони паралелограма дорівнюють 11 см і 23 см, а його діагоналі відносяться як $2 : 3$. Знайдіть діагоналі паралелограма.

3.30.° Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 18 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.

3.31.° Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 14 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 7 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

3.32.° Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Знайдіть третю сторону трикутника.

3.33.$^{\bullet}$ На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD = 14$ см. Знайдіть відрізок AD, якщо $AB = 37$ см, $BC = 44$ см і $AC = 15$ см.

3.34.$^{\bullet}$ На стороні AB трикутника ABC позначено точку K, а на продовженні сторони BC за точку C — точку M. Знайдіть відрізок MK, якщо $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

3.35.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продовженні відрізка AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 2AB$. Доведіть, що трикутник ACD рівнобедрений.

3.36.$^{\bullet}$ Знайдіть діагональ AC чотирикутника $ABCD$, якщо навколо нього можна описати коло, і $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

3.37.$^{\bullet}$ Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см і $\angle C = 40°$?

3.38.$^{\bullet}$ Доведіть, що проти більшого кута паралелограма лежить більша діагональ. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

3.39.$^{\bullet}$ Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

3.40.$^{\bullet}$ Доведіть, що в трикутнику ABC виконується рівність
$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

3.41.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли в трикутнику ABC виконується рівність $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, то цей трикутник є прямокутним.

3.42.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли в трикутнику ABC виконується рівність $a^2 + b^2 = 5c^2$, то медіани, проведені з вершин A і B, перпендикулярні.

3.43.$^{\bullet}$ Доведіть, що сума квадратів довжин медіан трикутника не менша від квадрата його півпериметра.

3.44.$^{\bullet}$ Дано два кола, які мають спільний центр (такі кола називають концентричними). Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки одного з кіл до кінців діаметра другого кола не залежить ні від обраної точки, ні від обраного діаметра.

3.45.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що сума квадратів діагоналей чотирикутника в два рази більша за суму квадратів відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін.

3.46.** В опуклому чотирикутнику відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін, дорівнюють m і n, кут між ними дорівнює $60°$. Знайдіть діагоналі чотирикутника.

3.47.** Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють a і b, кут між ними дорівнює $45°$. Знайдіть відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника.

3.48.** Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 5 см, а її бічні сторони дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань між серединами основ.

3.49.** У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Знайдіть сторону CD трапеції.

3.50.** У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відомо, що $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Знайдіть косинус кута D трапеції.

3.51.** У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 1$ см, $AD = 6$ см, $AC = 3$ см, $BD = 5$ см. Знайдіть кут AOD, де O — точка перетину діагоналей трапеції.

3.52.** У трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і CC_1. Відомо, що $A_1C_1 : AC = \frac{1}{2}$, $AB = c$, $BC = a$. Знайдіть AC.

3.53.** З вершини D ромба $ABCD$ до сторони BC проведено висоту DE. Діагональ AC перетинає відрізок DE в точці F так, що $DF : FE = 5 : 1$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AE = 35$ см.

3.54.** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, причому $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника перпендикулярні.

3.55.** У паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Відомо, що $AB = a$, $BC = b$ ($a \geqslant b$), $\angle BOC = \alpha$. Доведіть, що $\cos\alpha \geqslant \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

3.56.** На діаметрі кола з центром O радіуса R позначили точку M. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки M до кінців хорди, паралельної цьому діаметру, не залежить від вибору хорди.

3.57.** Кожна із сторін опуклого чотирикутника не більша за 7 см. Доведіть, що для будь-якої точки чотирикутника знайдеться вершина, відстань від якої до цієї точки менша від 5 см.

3.58.* (теорема Стюарта). На стороні BC трикутника ABC взято точку D. Доведіть, що

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

3.59.* Знайдіть найменше значення виразу

$$\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}.$$

3.60.* Доведіть, що $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}$.

3.61.* Доведіть, що для додатних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

3.62.* Чи існують такі три точки A, B і C, що для будь-якої точки X хоча б один з відрізків XA, XB, XC має ірраціональну довжину?

4. Теорема синусів

З другої ознаки рівності трикутників випливає, що сторона і два прилеглих до неї кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші сторони трикутника. Як це зробити, підказує така теорема.

Теорема 4.1 (теорема синусів). ***Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.***

Лема. ***Хорда кола дорівнює добутку діаметра на синус будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.***

Доведення. На рисунку 4.1 відрізок MN — хорда кола з центром у точці O. Проведемо діаметр MP. Тоді $\angle MNP = 90^\circ$ як вписаний кут, що спирається на діаметр. Нехай величина вписаного кута MPN дорівнює α. Тоді з прямокутного трикутника MPN отримуємо

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

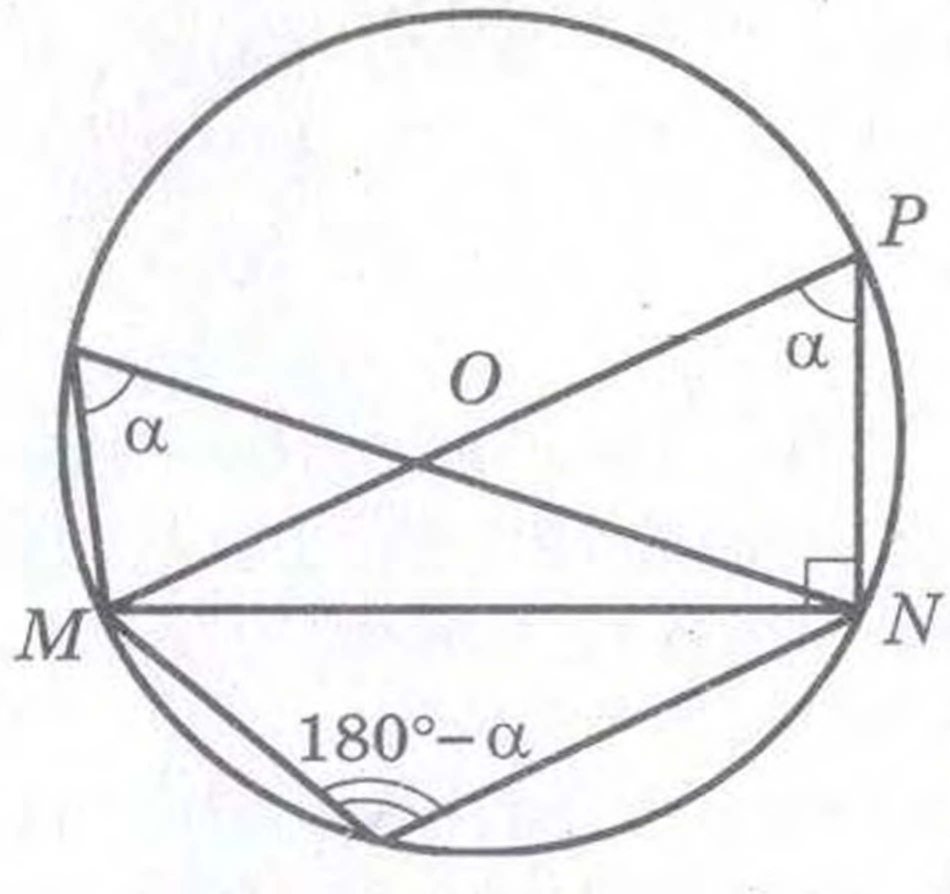


Рис. 4.1

Усі вписані кути, які спираються на хорду MN, дорівнюють α або $180^\circ - \alpha$. Отже, їх синуси рівні. Тому отримана рівність (1) справедлива для всіх вписаних кутів, які спираються на хорду MN. ▲

Тепер ми можемо довести теорему синусів.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Нехай радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює R. Тоді за лемою $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Звідси

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R} \quad ▲$$

Наслідок. ***Радіус описаного кола трикутника можна обчислити за формулою***

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin\alpha},}$$

де a — сторона трикутника, α — протилежний їй кут.

Приклад 1. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть кут A.

Розв'язання. За теоремою синусів

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тоді маємо:

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Отже, $\angle A$ — гострий. Звідси, ураховуючи, що $\sin A = \frac{1}{2}$, отримуємо $\angle A = 30°$.

Відповідь: $\angle A = 30°$.

Приклад 2. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть кут B.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тоді кут B може бути як гострим, так і тупим. Звідси $\angle B = 45°$ або $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Відповідь: 45° або 135°.

Приклад 3. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, дорівнює $8\sqrt{6}$ см.

Розв'язання. Нехай R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника BDC (рис. 4.2), $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

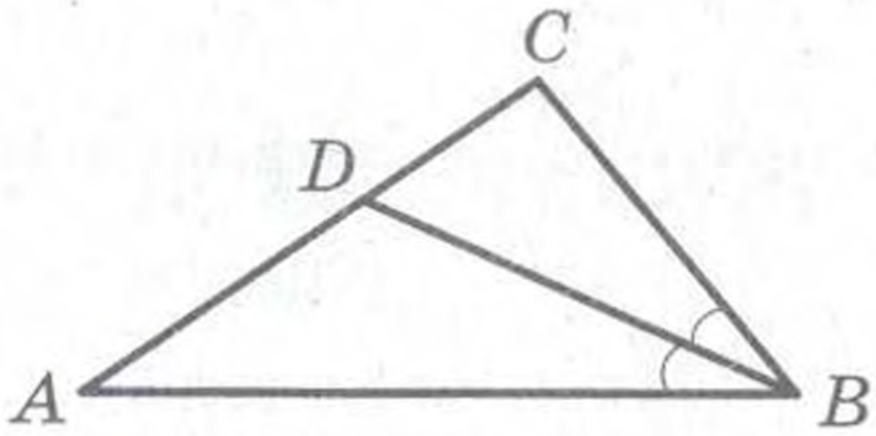


Рис. 4.2

$$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15°.$$

З ΔBDC:

$\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C) = 180° - (15° + 105°) = 60°$.

Тоді $\dfrac{BC}{\sin \angle BDC} = 2R_1$, звідси

$$BC = 2R_1 \sin \angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60° = 24\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

З ΔABC:

$\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C) = 180° - (30° + 105°) = 45°$.

Нехай R — шуканий радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Тоді $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$, звідси $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2\sin 45°} = 24$ (см).

Відповідь: 24 см.

Приклад 4. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 21 см і 9 см, а висота — 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Розв'язання. Проведемо висоту BM рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 4.3). Відомо[1], що

$$AM = \frac{AD - BC}{2},$$

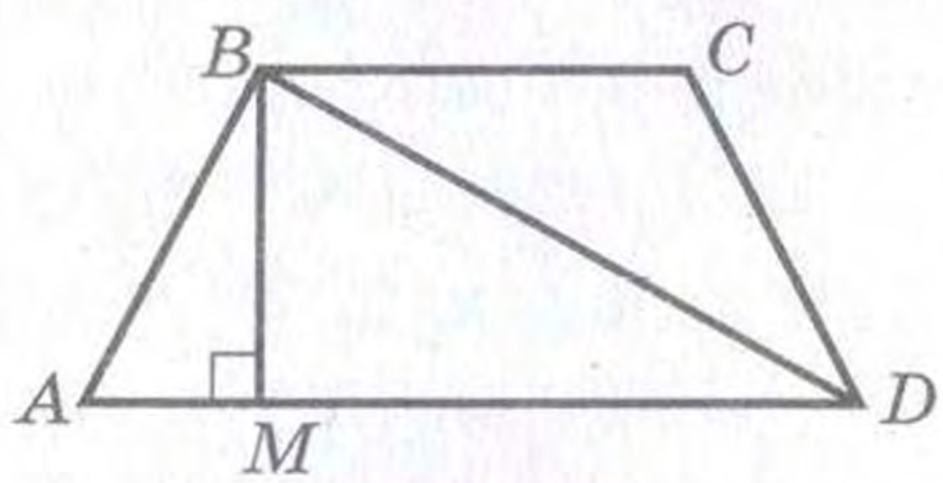


Рис. 4.3

[1] Див. ключову задачу пункту 10 книги «А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Геометрія. Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики. – Харків: Гімназія, 2008». Далі посилатимемося на цю книгу так: «Геометрія-8».

$MD = \frac{BC + AD}{2}$. Маємо: AM = 6 см, MD = 15 см.

З ΔABM отримуємо: $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см), $\sin A = \frac{BM}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

З ΔMBD отримуємо: $BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см).

Коло, описане навколо трапеції $ABCD$, є також описаним колом трикутника ABD. Відрізок BD — хорда цього кола, $\angle A$ — вписаний кут, що спирається на цю хорду. Позначивши шуканий радіус R, можна записати: $BD = 2R \cdot \sin A$. Звідси $R = \frac{BD}{2\sin A} = \frac{17}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{85}{8}$ (см).

Приклад 5. На найбільшій стороні AC трикутника ABC позначено точку X, відмінну від вершин A і C. З точки X опущено перпендикуляри XM і XN на прямі AB і BC відповідно. Знайдіть таке положення точки X, при якому довжина відрізка MN буде найменшою.

Розв'язання. На рисунку 4.4 показано випадок, коли точки M і N лежать на сторонах трикутника, а на рисунку 4.5 — випадок, коли тільки одна точка, наприклад точка M, лежить на стороні трикутника.

Легко показати, що точки M, B, N, X лежать на одному колі з діаметром BX. Відрізок MN — хорда цього кола, на яку спирається кут B (рис. 4.4) або кут, суміжний з кутом B (рис. 4.5). Для кожного з цих випадків можна записати $MN = BX \cdot \sin B$. Отже, довжина відрізка MN набуває найменшого значення, якщо набуває найменшого значення довжина відрізка BX. А ця умова досягається тоді, коли точка X є основою висоти трикутника ABC, проведеної з вершини B.

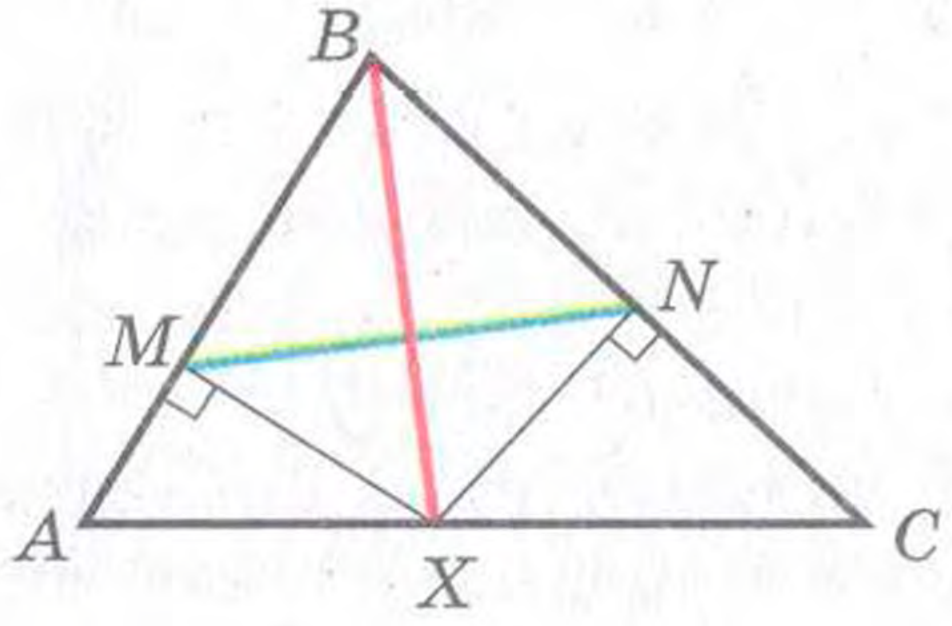


Рис. 4.4

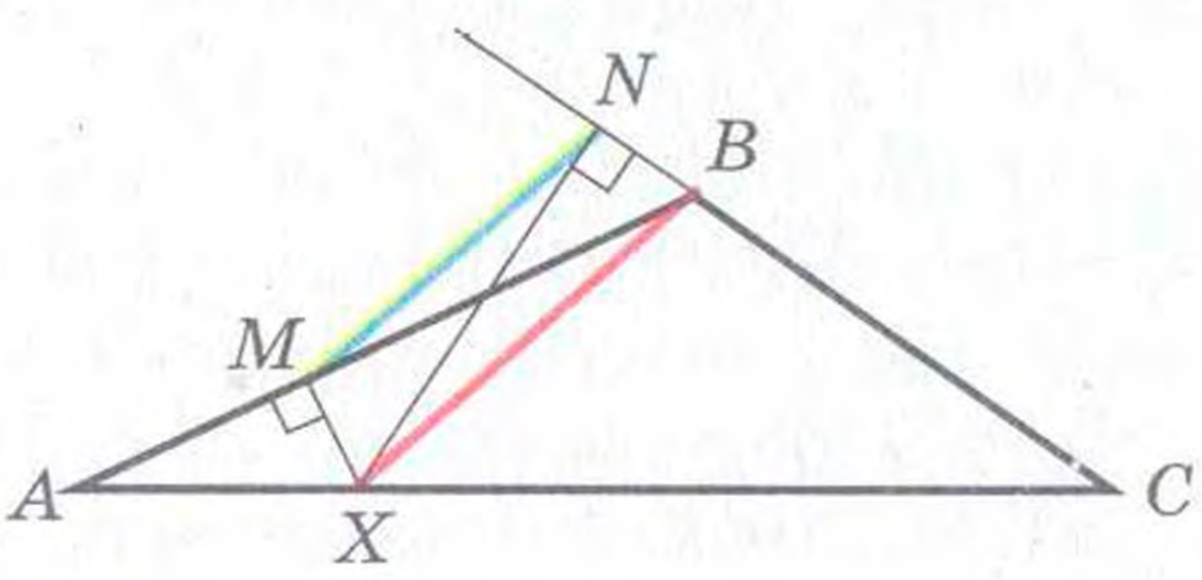


Рис. 4.5

ВПРАВИ

4.1.° Знайдіть сторону BC трикутника ABC, зображеного на рисунку 4.6 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

4.2.° Знайдіть кут A трикутника ABC, зображеного на рисунку 4.7 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

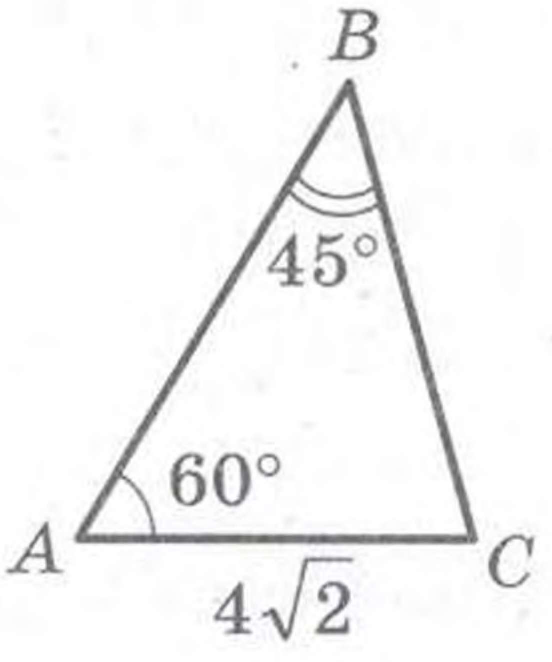


Рис. 4.6

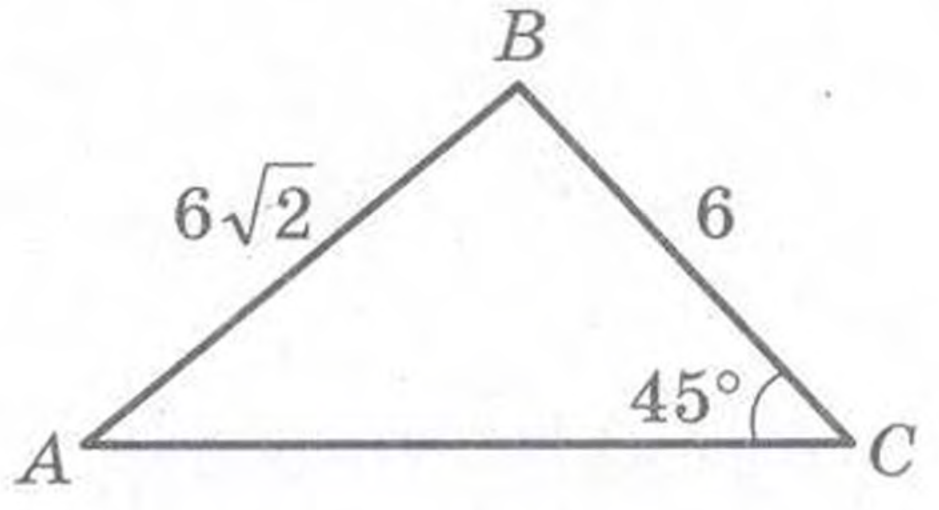


Рис. 4.7

4.3.° Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

4.4.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Знайдіть синус кута C трикутника.

4.5.° У трикутнику ABC відомо, що $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть AB і AC.

4.6.° Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з його сторонами кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

4.7.° Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:

1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;

2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.

Скільки розв'язків у кожному з випадків має задача? Відповідь обґрунтуйте.

4.8.° Чи існує трикутник ABC такий, що $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.

4.9.° На продовженні сторони AB трикутника ABC за точку B позначено точку D. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ACD, якщо $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 4 см.

4.10.° Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O — точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60°$.

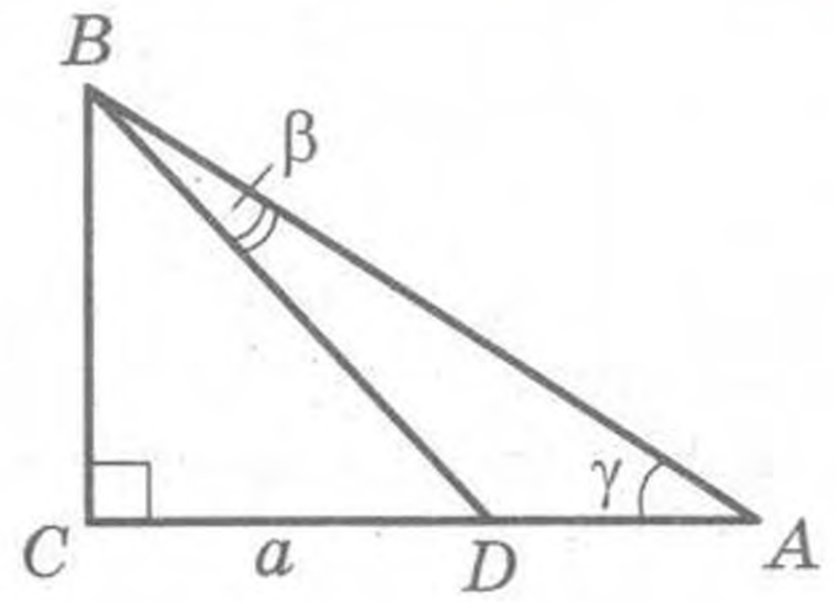


Рис. 4.8

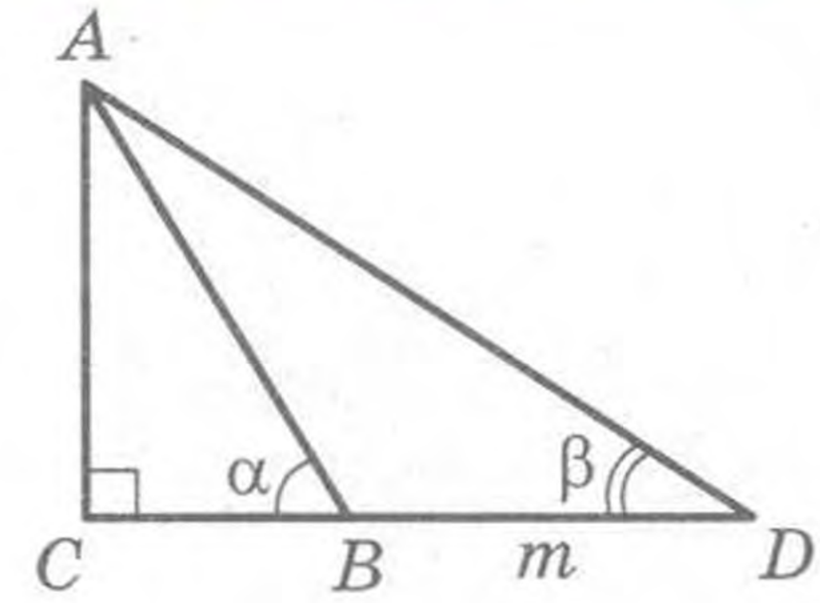


Рис. 4.9

4.11.° За рисунком 4.8 знайдіть AD, якщо $CD = a$.

4.12.° За рисунком 4.9 знайдіть AC, якщо $BD = m$.

4.13.° На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $\angle AMC = \varphi$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

4.14.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороні BC позначено точку D так, що $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Знайдіть сторону BC.

4.15.• Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, де A, B і C — кути даного трикутника ABC.

4.16.• Доведіть, користуючись теоремою синусів, що бісектриса трикутника поділяє його сторону на відрізки, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам[1].

4.17.• Доведіть, що бісектриса трикутника поділяє його сторону на відрізки, довжини яких обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

4.18.• Для сторін і кутів трикутника ABC виконується рівність $\frac{BC}{\cos A} = \frac{AC}{\cos B}$. Доведіть, що $AC = BC$.

4.19.• Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 12 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 4 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

4.20.• Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 16 см і бічною стороною 10 см.

4.21.• Сторона трикутника дорівнює 24 см, а радіус описаного кола — $8\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює кут трикутника, протилежний даній стороні?

4.22.• У трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть бісектрису BD трикутника.

[1] Нагадаємо, що цей факт було доведено у 8 класі з використанням теореми про пропорційні відрізки (див. «Геометрія-8», п. 16, теорема 16.2).

4.23.* Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, протилежний їй кут дорівнює α. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

4.24.* Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці E, причому $AE = a$. Знайдіть CE.

4.25.* Медіана AM трикутника ABC дорівнює m і утворює зі сторонами AB і AC кути α і β відповідно. Знайдіть сторони AB і AC.

4.26.* Медіана CD трикутника ABC утворює зі сторонами AC і BC кути α і β відповідно, $BC = a$. Знайдіть медіану CD.

4.27.* У прямокутному трикутнику ABC через вершини A і C і середину M гіпотенузи AB проведено коло радіуса R. Знайдіть радіус описаного кола трикутника CMB, якщо $\angle A = \alpha$.

4.28.* Висоти непрямокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AHB, BHC, AHC і ABC, рівні.

4.29.* Центр вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 5 см і 3 см, рахуючи від вершини. Знайдіть радіус описаного кола.

4.30.** Діагоналі описаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Радіуси описаних кіл трикутників AOB, BOC, COD, DOA відповідно дорівнюють R_1, R_2, R_3, R_4. Доведіть, що $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

4.31.** На стороні AB трикутника ABC позначено точки M і N. Відомо, що радіуси описаних кіл трикутників ANC і BMC рівні. Крім того, радіуси описаних кіл трикутників AMC і BNC також рівні. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним.

4.32.** З точки M кола проведено три хорди $MN = 1$ см, $MP = 6$ см, $MQ = 2$ см. Відомо, що $\angle NMP = \angle PMQ$. Знайдіть радіус кола.

4.33.** З точки M, яка належить куту, на його сторони AB і AC опустили перпендикуляри, які дорівнюють $\sqrt{7}$ см і $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть MA, якщо $\angle A = 60°$.

4.34.** Дано дві прямі, які перетинаються і кут між якими дорівнює α. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що відстань між основами перпендикулярів, проведених з точки X до даних прямих, дорівнює заданій величині a.

4.35.** З точки M кола на його діаметри AB і CD опустили перпендикуляри. Доведіть, що відстань між основами перпендикулярів не залежить від вибору точки M.

4.36.** Навколо трикутника ABC описано коло. З довільної точки M кола проведено перпендикуляри MN і MK до прямих AB і AC відповідно. Для якої точки M довжина відрізка NK є максимальною?

4.37.** Бісектриси трикутника ABC перетинаються в точці O. Пряма AO вдруге перетинає описане коло трикутника BOC в точці M. Знайдіть OM, якщо $BC = 3$ см, $\angle BAC = 120°$.

4.38.** Точка J — центр вписаного кола трикутника ABC. Пряма AJ вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці D. Знайдіть DJ, якщо $BC = 6$ см, а радіус описаного кола дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

4.39.** У трикутнику ABC на стороні AB існує така точка D, що $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$. Доведіть, що кут C — тупий.

4.40.** На діагоналі BD квадрата $ABCD$ позначили точку E. Нехай O_1 і O_2 — центри описаних кіл трикутників ABE і ADE відповідно. Доведіть, що чотирикутник AO_1EO_2 — квадрат.

4.41.* Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці K. Відомо, що $AB = a$, $CD = b$, $\angle BKA = \alpha$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо чотирикутника.

4.42.* У коло вписано чотирикутник $ABCD$ (рис. 4.10). Прямі AB і CD перетинаються в точці M, а прямі BC і AD — у точці N. Відомо, що $BM = DN$. Доведіть, що $CM = CN$.

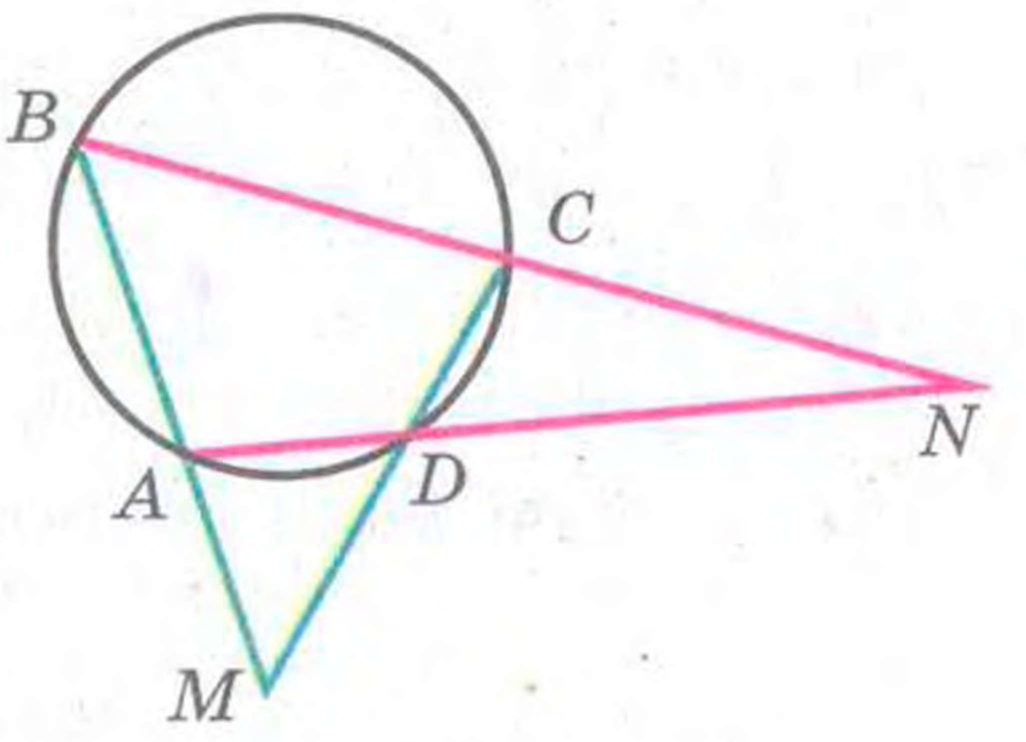


Рис. 4.10

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Тригонометрична форма теореми Чеви

У 8 класі ви вивчали теорему Чеви. Нагадаємо її.

Теорема Чеви. ***Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці (рис. 4.11), необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

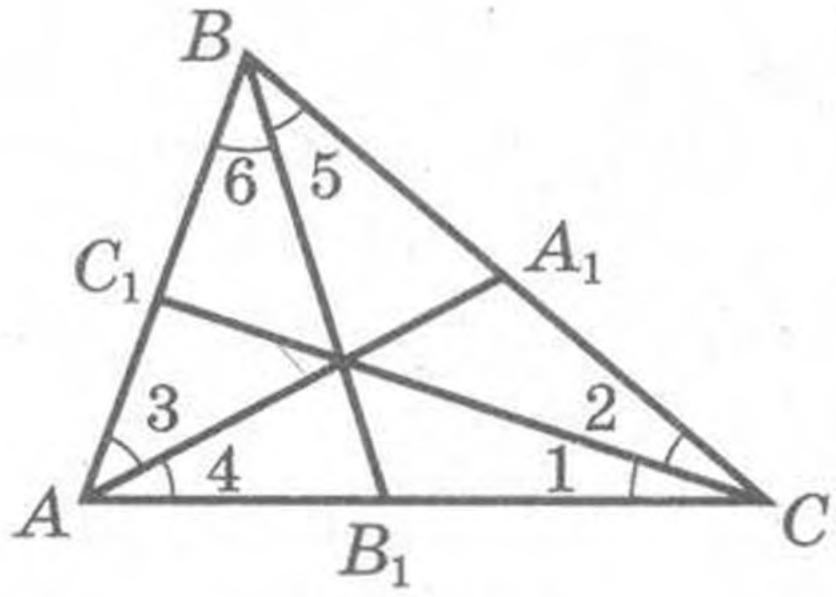


Рис. 4.11

Теорема синусів дозволяє записати критерій конкурентності прямих AA_1, BB_1, CC_1 в іншій формі.

Позначимо кути, які чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 утворюють зі сторонами трикутника ABC, так, як показано на рисунку 4.11.

З трикутника AC_1C отримуємо:

$$\frac{AC_1}{CC_1}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC}.$$

З трикутника BC_1C отримуємо: $\frac{CC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}$.

Звідси

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC}\cdot\frac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}. \qquad (1)$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle C_1BC}\cdot\frac{\sin\angle A_1CA}{\sin\angle 4}, \qquad (2)$$

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle A_1CA}\cdot\frac{\sin\angle C_1AC}{\sin\angle 6}. \qquad (3)$$

Перемноживши рівності (1), (2) і (3), отримаємо:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}.$$

Тоді необхідну і достатню умови конкурентності чевіан AA_1, BB_1 і CC_1 можна виразити такою рівністю:

$$\frac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}=1.$$

Приклад. Шестикутник $ABCDEF$ вписано в коло. Доведіть, що діагоналі AD, BE і CF перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA.$$

Розв'язання. Розглянемо трикутник ACE. Введемо позначення кутів так, як показано на рисунку 4.12. Нехай радіус кола дорівнює R.

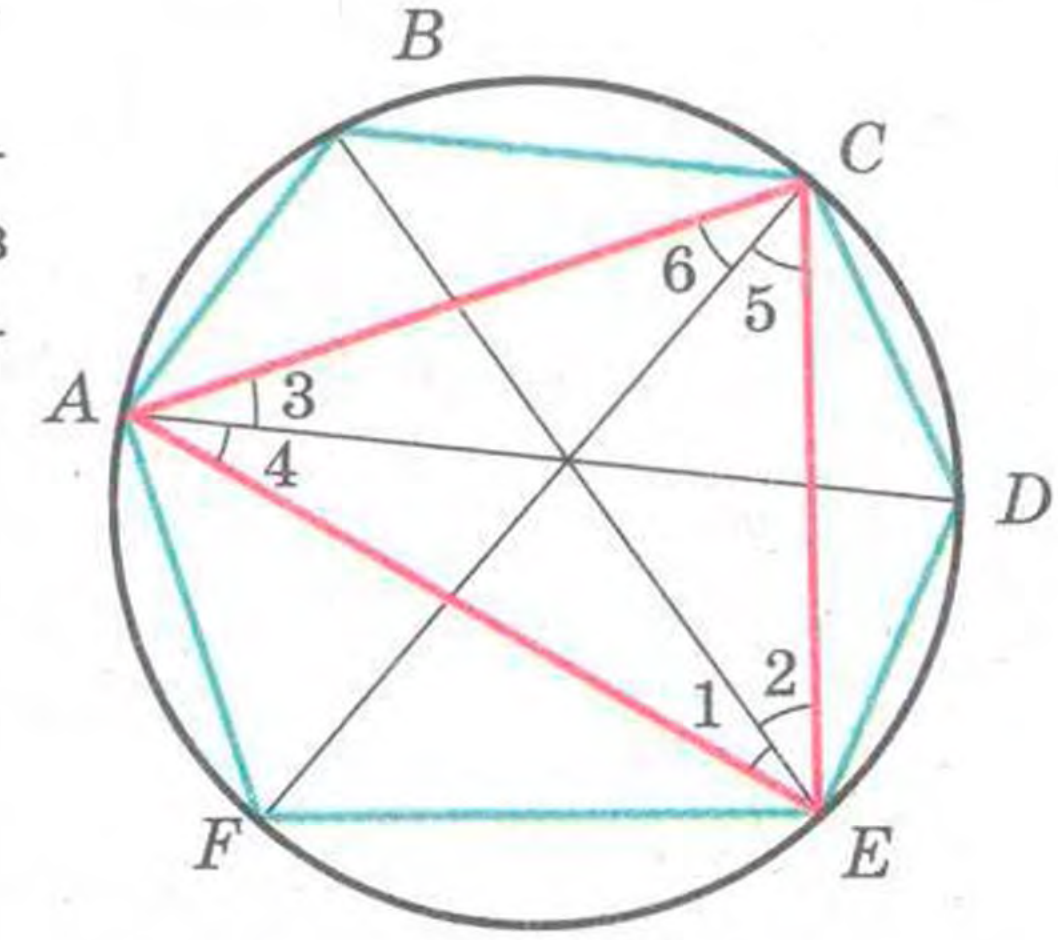


Рис. 4.12

Тоді:

$AB = 2R \sin \angle 1;$

$BC = 2R \sin \angle 2;$

$CD = 2R \sin \angle 3;$

$DE = 2R \sin \angle 4;$

$EF = 2R \sin \angle 5;$

$FA = 2R \sin \angle 6.$

Звідси $\dfrac{\sin\angle 1 \cdot \sin\angle 3 \cdot \sin\angle 5}{\sin\angle 2 \cdot \sin\angle 4 \cdot \sin\angle 6} = \dfrac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA}.$

Діагоналі AD, BE і CF є конкурентними тоді і тільки тоді, коли ліва частина записаної рівності дорівнює 1. Звідси випливає справедливість твердження, що доводиться.

ВПРАВИ

1. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2, симетричні прямим AA_1, BB_1 і CC_1 відносно бісектрис кутів A, B і C відповідно, також конкурентні.

2. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні (рис. 4.13). На сторонах A_1B_1, B_1C_1 і C_1A_1 трикутника $A_1B_1C_1$ позначено відповідно точки C_2, A_2 і B_2 так, що прямі A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 конкурентні. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2 також конкурентні.

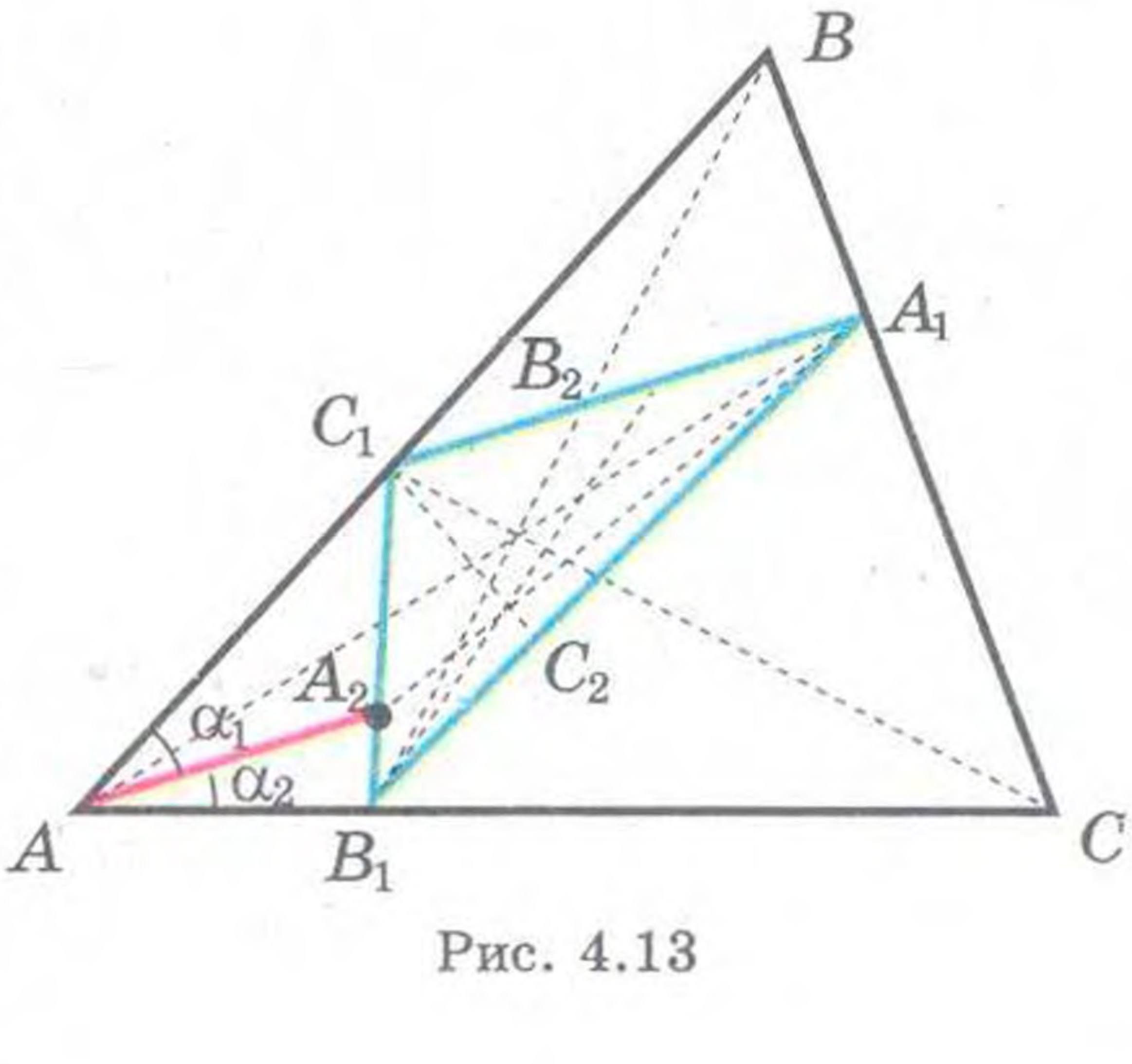


Рис. 4.13

Вказівка. Доведіть, що

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{AB_1\cdot C_1A_2}{A_2B_1\cdot AC_1}.$$

Формула Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного і описаного кіл трикутника

Теорема. ***Відстань d між центрами вписаного і описаного кіл трикутника обчислюється за формулою***

$$\boxed{d=\sqrt{R^2-2Rr}}$$

де r і R — відповідно радіуси його вписаного і описаного кіл.

Доведення. Нехай O_1 і O — центри вписаного і описаного кіл відповідно (рис. 4.14). Бісектриса кута B перетинає описане коло в точці D. Згідно з ключовою задачею 18.25 («Геометрія-8»)

$$BO_1\cdot O_1D=R^2-O_1O^2=R^2-d^2. \qquad (*)$$

Нехай вписане коло дотикається до сторони BC у точці K. Тоді з трикутника O_1BK отримуємо: $BO_1=\dfrac{O_1K}{\sin\angle DBC}=\dfrac{r}{\sin\angle DBC}$.

За лемою п. 4 маємо: $DC=2R\sin\angle DBC$. Згідно з ключовою задачею 11.25 («Геометрія-8») $O_1D=DC=2R\sin\angle DBC$. Отримані результати підставляємо у формулу (*):

$$\frac{r}{\sin\angle DBC}\cdot 2R\sin\angle DBC=R^2-d^2.$$

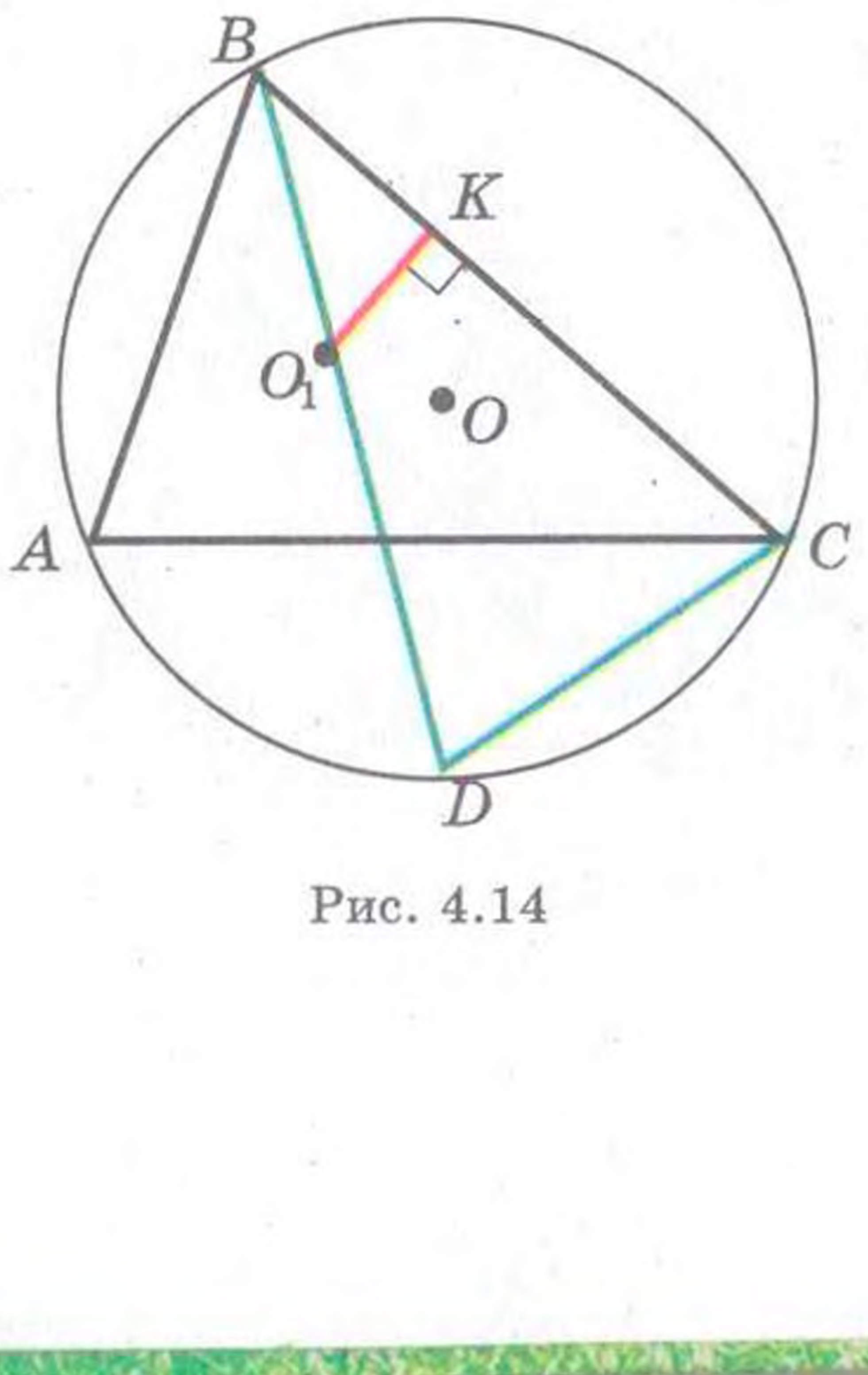


Рис. 4.14

Звідси $d^2=R^2-2Rr$. ▲

Оскільки $d^2=R^2-2Rr$, то $R^2-2Rr\geqslant 0$. Звідси отримуємо, що для будь-якого трикутника виконується нерівність

$$R\geqslant 2r.$$

У цій нерівності рівність досягається тоді і тільки тоді, коли центри вписаного і описаного кіл трикутника збігаються. Така властивість притаманна лише рівносторонньому трикутнику.

5. Розв'язування трикутників

Розв'язати трикутник — це означає знайти невідомі його сторони і кути за відомими сторонами і кутами.

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Теореми косинусів і синусів дозволяють розв'язати будь-який трикутник.

Приклад 1. Розв'яжіть трикутник (рис. 5.1) за стороною $a = 12$ см і двома кутами $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.

Розв'язання. Маємо:

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

За теоремою синусів:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0{,}588}{0{,}423} \approx 16{,}7 \text{ (см)};$$

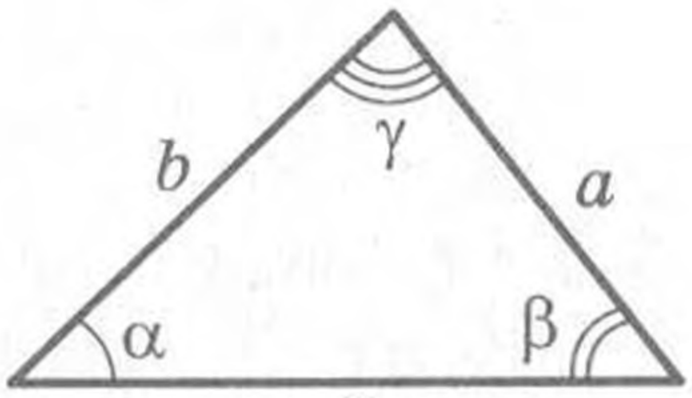


Рис. 5.1

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0{,}875}{0{,}423} \approx 24{,}8 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $b \approx 16{,}7$ см, $c \approx 24{,}8$ см; $\alpha = 25°$.

Зауважимо, що значення тригонометричних функцій знайдено за таблицею, розміщеною на с. 267 підручника. Їх також можна знайти за допомогою мікрокалькулятора.

Приклад 2. Розв'яжіть трикутник (рис. 5.1) за двома сторонами $a = 14$ см, $b = 8$ см і кутом $\gamma = 38°$ між ними.

Розв'язання. За теоремою косинусів:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8\cos 38° \approx 260 -$
$- 224 \cdot 0{,}788 = 83{,}488;$

$c \approx 9{,}1$ см.

Далі маємо:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx -0{,}338.$$

Знайдемо кут α_1 такий, що $\cos\alpha_1 = 0{,}338$.

Число 0,338 відсутнє в таблиці значень косинуса, найближчим до нього є число 0,342. Тоді отримуємо $\alpha_1 \approx 70^\circ$. Звідси
$\alpha = 180^\circ - \alpha_1 \approx 110^\circ$.
$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.
Відповідь: $c \approx 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$.

Приклад 3. Розв'яжіть трикутник (рис. 5.1) за трьома сторонами $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Розв'язання. Маємо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, звідси

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}594. \text{ Тоді } \alpha \approx 54^\circ.$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \quad \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} \approx \frac{2\sin 54^\circ}{7} \approx \frac{2 \cdot 0{,}809}{7} \approx 0{,}231.$$

Оскільки b є найменшою стороною даного трикутника, то кут β є гострим, $\beta \approx 13^\circ$.

Тоді $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

Відповідь: $\alpha \approx 54^\circ$, $\beta \approx 13^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$.

Приклад 4. Розв'яжіть трикутник (рис. 5.1) за двома сторонами і кутом, який протилежний одній зі сторін: 1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156^\circ$; 2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65^\circ$; 3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50^\circ$.

Розв'язання. 1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$,

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{6\sin 156^\circ}{17} = \frac{6\sin 24^\circ}{17} \approx \frac{6 \cdot 0{,}407}{7} \approx 0{,}144.$$

Оскільки кут α даного трикутника тупий, то кут β є гострим, $\beta \approx 8^\circ$.

Тоді $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 16^\circ$.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{a\sin 16^\circ}{\sin 156^\circ} \approx \frac{17 \cdot 0{,}276}{0{,}407} \approx 11{,}5 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\beta \approx 8^\circ$, $\gamma \approx 16^\circ$, $c \approx 11{,}5$ см.

2) $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, $\sin\gamma = \dfrac{c\sin\beta}{b} = \dfrac{8\sin 65^\circ}{7} \approx \dfrac{8 \cdot 0{,}906}{7} \approx 1{,}035 > 1$, що неможливо.

Відповідь: задача не має розв'язку.

3) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\beta}{b} = \dfrac{6\sin 50^\circ}{5} \approx \dfrac{6 \cdot 0{,}766}{5} \approx 0{,}919$.

Можливі два випадки: $\alpha \approx 67^\circ$ або $\alpha \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 67^\circ$:

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$;

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} \approx \frac{5\sin 63^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0{,}891}{0{,}766} \approx 5{,}8 \text{ (см)}.$$

При $\alpha \approx 113^\circ$ отримуємо:

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - 163^\circ = 17^\circ$;

$$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} \approx \frac{5\sin 17^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0{,}292}{0{,}766} \approx 1{,}9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\alpha \approx 67^\circ$, $\gamma \approx 63^\circ$, $c \approx 5{,}8$ см або $\alpha \approx 113^\circ$, $\gamma \approx 17^\circ$, $c \approx 1{,}9$ см.

ВПРАВИ

5.1.° Розв'яжіть трикутник за стороною і двома кутами[1]:

1) $a = 10$ см, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 85^\circ$;

2) $b = 16$ см, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 110^\circ$.

5.2.° Розв'яжіть трикутник за стороною і двома кутами:

1) $b = 9$ см, $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 70^\circ$;

2) $c = 14$ см, $\beta = 132^\circ$, $\gamma = 24^\circ$.

5.3.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом між ними:

1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76^\circ$;

2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104^\circ$.

5.4.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом між ними:

1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15^\circ$;

2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145^\circ$.

5.5.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:

1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см;

2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

5.6.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:

1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см;

2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

5.7.° Розв'яжіть трикутник, у якому:

1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10^\circ$, кут α — гострий;

2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10^\circ$, кут α — тупий.

---

[1] У задачах №№ 5.1–5.9 прийнято позначення: a, b і c — сторони трикутника, α, β і γ — кути, протилежні відповідно сторонам a, b і c.

5.8.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:

1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46°$;
2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32°$;
3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27°$.

5.9.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:

1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36°$.

5.10.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 70°$. Знайдіть: 1) сторону AC; 2) медіану CM; 3) бісектрису AD; 4) радіус описаного кола трикутника ABC.

5.11.° Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 8 см, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Знайдіть: 1) сторони трапеції; 2) радіус описаного кола трикутника ABC.

5.12.° Основи трапеції дорівнюють 12 см і 16 см, а бічні сторони — 7 см і 9 см. Знайдіть кути трапеції.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Тригонометрія — наука про вимірювання трикутників

Ви знаєте, що стародавні мандрівники орієнтувалися за зірками і планетами. Вони могли досить точно визначити місцезнаходження корабля в океані або каравану в пустелі за розташуванням світил на небосхилі. При цьому одним з орієнтирів була висота, на яку піднімалося над горизонтом те або інше небесне світило в даній місцевості у даний момент часу.

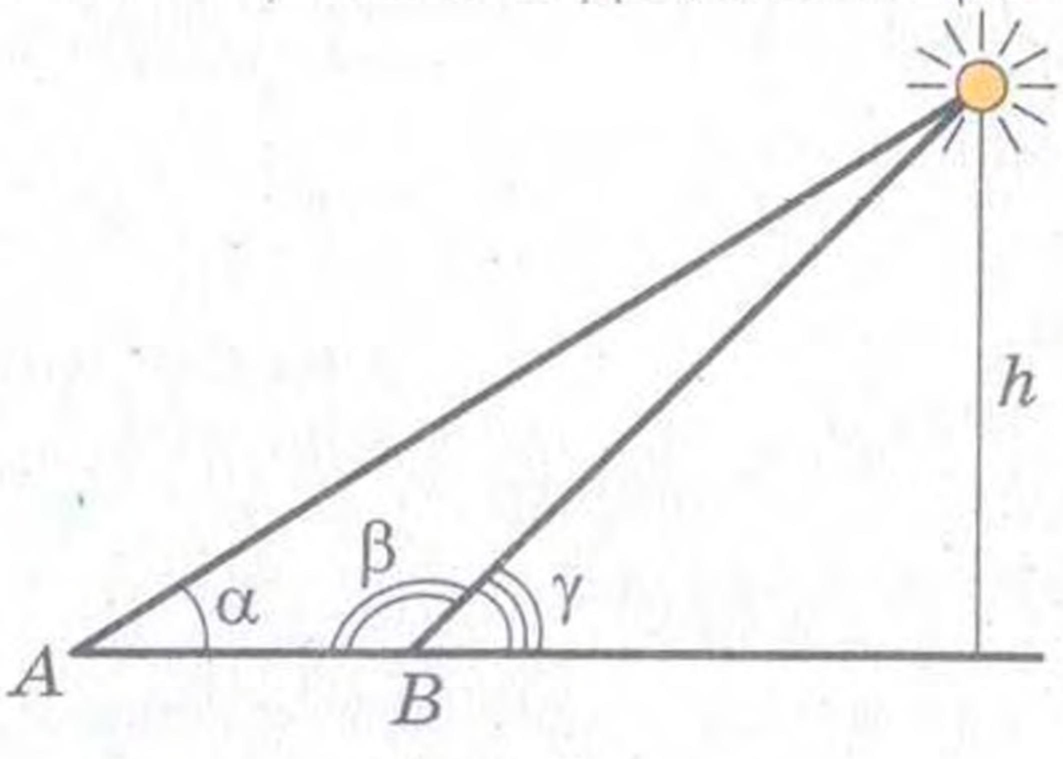


Рис. 5.2

Зрозуміло, що безпосередньо виміряти цю висоту неможливо. Тому вчені стали розробляти методи непрямих вимірювань. Тут суттєву роль відігравало розв'язування трикутника, дві вершини якого лежали на поверхні Землі, а третя була зіркою або планетою (рис. 5.2) — знайома вам задача № 4.12.

Для розв'язування подібних задач стародавнім астрономам необхідно було навчитися знаходити взаємозв'язки між елементами трикутника. Так виникла **тригонометрія** — наука, яка вивчає залежність між сторонами і кутами трикутника. Термін «тригонометрія» (від грецьких слів «тригоном» — трикутник і «метрео» — вимірювати) означає «вимірювання трикутників».

На рисунку 5.3 зображено центральний кут AOB, який дорівнює 2α. З прямокутного трикутника OMB маємо: $MB = OB \sin \alpha$. Отже, якщо в одиничному колі виміряти половини довжин хорд, на які спираються центральні кути з величинами 2°, 4°, 6°, ..., 180°, то таким чином ми обчислимо значення синусів кутів 1°, 2°, 3°, ..., 90° відповідно.

Вимірюючи довжини півхорд, давньогрецький астроном Гіппарх (II ст. до н. е.) склав перші тригонометричні таблиці.

Поняття «синус» і «косинус» з'являються в тригонометричних трактатах індійських учених у IV–V ст. У X ст. арабські вчені оперували поняттям «тангенс», яке виникло з потреб гномоніки — учення про сонячний годинник (рис. 5.4).

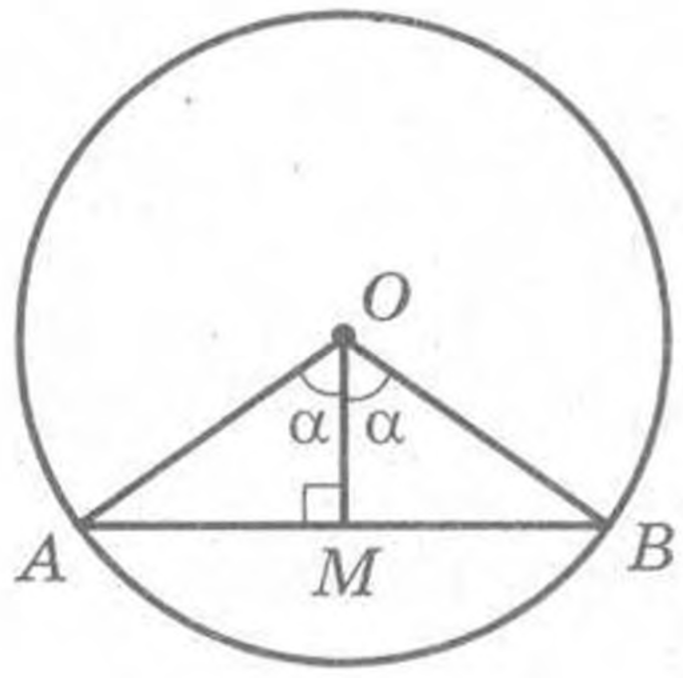


Рис. 5.3


Рис. 5.4

У Європі перший трактат з тригонометрії «П'ять книг про трикутники всіх видів», автором якого був німецький учений Регіомонтан (1436–1476), було опубліковано в 1533 р. Він же відкрив і теорему тангенсів:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}, \qquad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

де a, b і c — сторони трикутника, α, β і γ — кути трикутника, протилежні відповідно сторонам a, b і c.

Леонард Ейлер
(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік, астроном

Сучасного вигляду тригонометрія набула в роботах видатного математика Леонарда Ейлера (1707–1783).

6. Формули для знаходження площі трикутника

З курсу геометрії 8 класу ви дізналися, що площу S трикутника можна обчислити за формулами

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c,$$

де a, b і c — сторони трикутника, h_a, h_b, h_c — висоти, проведені до цих сторін відповідно.

Тепер у нас з'явилася можливість отримати ще кілька формул для знаходження площі трикутника.

Теорема 6.1. ***Площа трикутника дорівнює півдобутку двох його сторін і синуса кута між ними.***

Доведення. Доведемо, що площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,}$$

де a і b — сторони трикутника, γ — кут між ними.

Можливі три випадки:

1) кут γ — гострий (рис. 6.1);
2) кут γ — тупий (рис. 6.2);
3) кут γ — прямий.

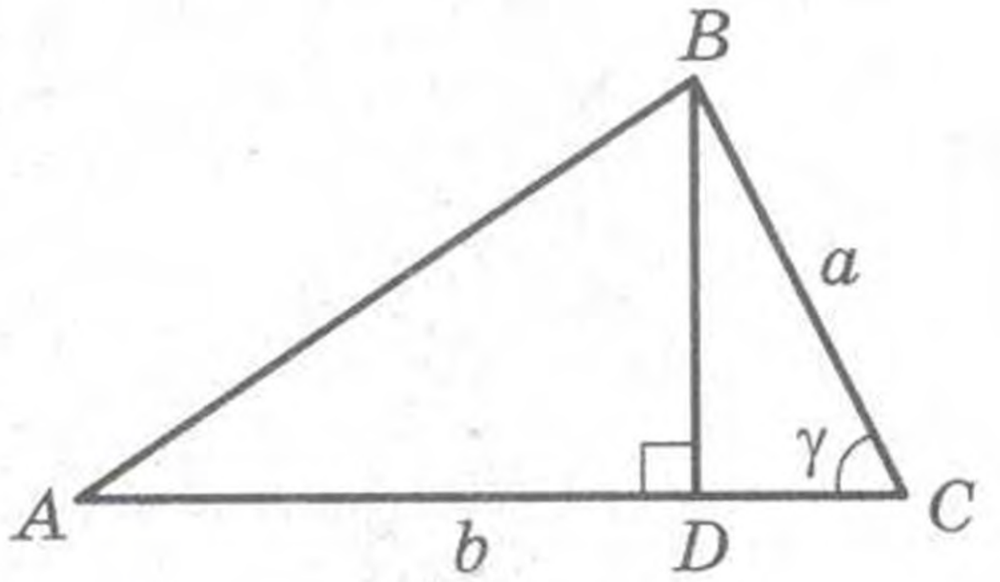


Рис. 6.1

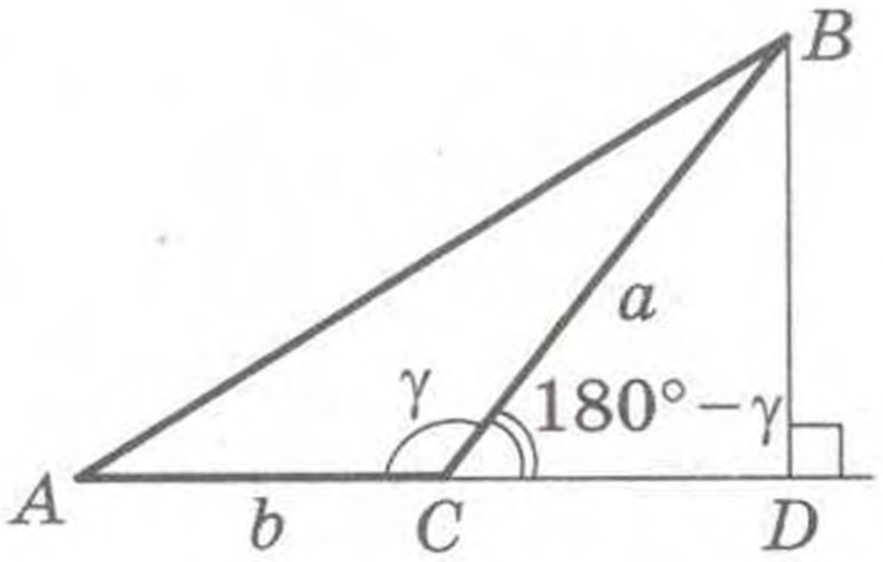


Рис. 6.2

На рисунках 6.1 і 6.2 проведемо висоту BD трикутника ABC. Тоді $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b$.

З $\Delta\, BDC$ у першому випадку $BD = a \sin\gamma$, а у другому $BD = a \sin(180^\circ - \gamma) = a \sin\gamma$. Звідси для двох перших випадків маємо $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

Якщо кут C — прямий, то $\sin\gamma = 1$. Для прямокутного трикутника ABC з катетами a і b маємо:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2} ab \sin\gamma. \ \blacktriangle$$

Теорема 6.2 (формула Герона[1]). ***Площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

де a, b, c — сторони трикутника, p — його півпериметр.

Доведення. Маємо: $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

Звідси $S^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2\gamma$.

За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Звідси $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Оскільки $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)$, то маємо:

[1] Герон Александрійський — давньогрецький учений, який жив у I ст. н. е.

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) = \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2) = \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Звідси $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ▲

Теорема 6.3. ***Площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

де a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола трикутника ABC.

Доведення. Маємо: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. З леми пункту 4 випливає, що $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Тоді $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ▲

Зауважимо, що доведена теорема дає змогу знаходити радіус описаного кола трикутника за формулою

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Теорема 6.4. ***Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.***

Доведення. На рисунку 6.3 зображено трикутник ABC, у який вписано коло радіуса r. Доведемо, що

$$\boxed{S = pr,}$$

де S — площа даного трикутника, p — його півпериметр.

Нехай точка O — центр вписаного кола, яке дотикається до сторін трикутника ABC у точках M, N і P. Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників AOB, BOC, COA. Це зручно записати в такій формі:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

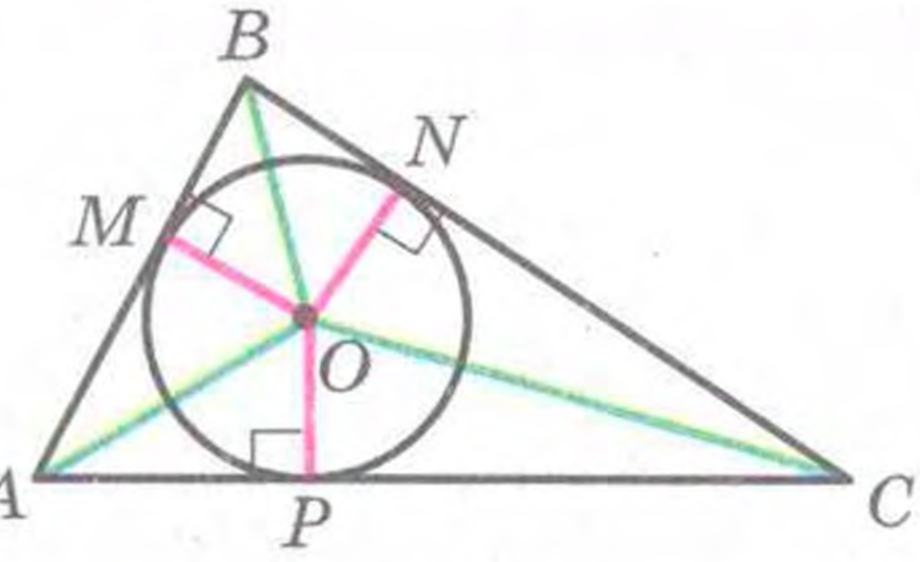


Рис. 6.3

Проведемо радіуси в точки дотику. Отримуємо: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Звідси:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB; \quad S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

Отже, $S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr.$ ▲

Вищезазначене узагальнює така теорема.

Теорема 6.5. ***Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.***

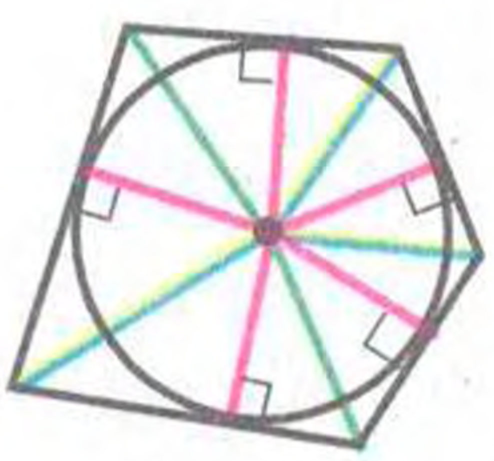


Рис. 6.4

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 6.4).

Зауважимо, що теорема 6.5 дає змогу знаходити радіус вписаного кола многокутника за формулою

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

Теорема 6.6. ***Площу S паралелограма можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = ab \sin \alpha,}$$

де a і b — сусідні сторони паралелограма, α — кут між ними.

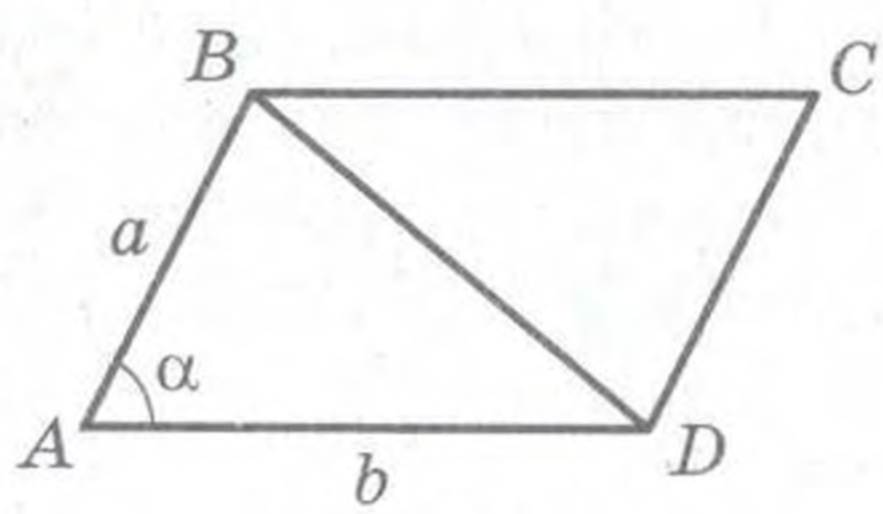


Рис. 6.5

Доведення. Розглянемо паралелограм $ABCD$, у якому $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 6.5). Проведемо діагональ BD. Оскільки $\Delta ABD = \Delta CBD$, то запишемо:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin\alpha = ab \sin\alpha. \quad \blacktriangle$$

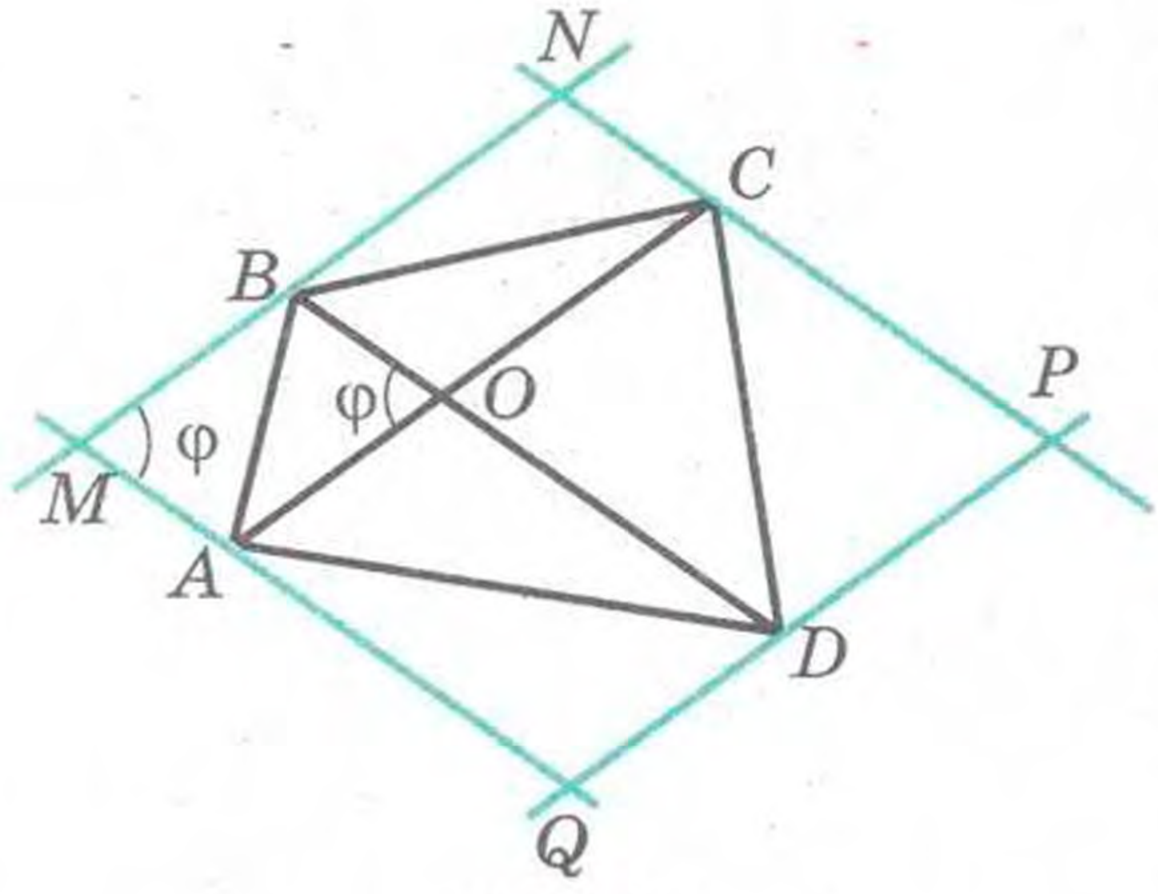


Рис. 6.6

Теорема 6.7. ***Площа опуклого чотирикутника дорівнює півдобутку його діагоналей і синуса кута між ними.***

Доведення. Через вершини A, B, C і D чотирикутника $ABCD$ проведемо прямі, паралельні його діагоналям AC і BD (рис. 6.6). Отримаємо паралелограм $MNPQ$, у якому $\angle M = \varphi$, $MN = AC$, $MQ = BD$. Площа цього паралелограма вдвічі більша за площу чотирикутника $ABCD$ (доведіть це самостійно). Звідси

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MN \cdot MQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi. \quad \blacktriangle$$

Задача 1. Доведіть, що площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$\boxed{S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C,}$$

де R — радіус описаного кола трикутника ABC.

Розв'язання. Маємо: $S = \dfrac{abc}{4R}$ і $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

Звідси $S = \dfrac{2R \sin A \cdot 2R \sin B \cdot 2R \sin C}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$

Задача 2. Доведіть, що $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Розв'язання. Розглянемо рівнобедрений трикутник з кутом 2α при вершині і бічними сторонами, які дорівнюють 1 (рис. 6.7).

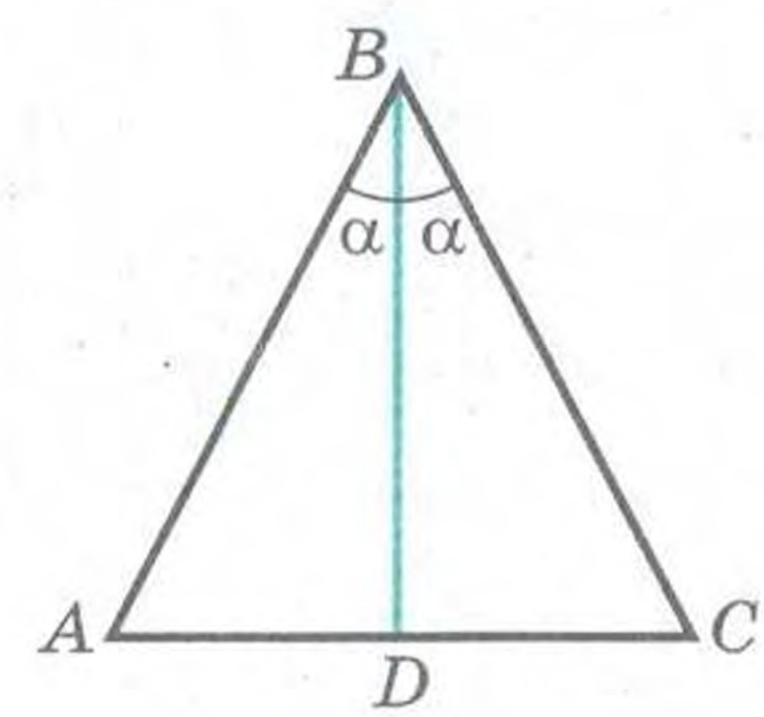


Рис. 6.7

Маємо:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Також можна записати:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = BD \cdot AD = \cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Тоді $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \cos\alpha \sin\alpha$, тобто $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Приклад 1. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 65 см і 80 см. Знайдіть найменшу висоту трикутника, радіуси його вписаного і описаного кіл.

Розв'язання. Нехай $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Півпериметр трикутника $p = \frac{17+65+80}{2} = 81$ (см), його площа

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} =$$

$$= \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288\ (\text{см}^2).$$

Найменшою висотою трикутника є висота h, проведена до його найбільшої сторони c.

Оскільки $S = \frac{1}{2}ch$, то $h = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радіус вписаного кола $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радіус описаного кола $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (см).

Відповідь: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см.

Приклад 2. З точки M, яка належить куту AOB, опущено перпендикуляри MM_1 і MM_2 на сторони OA і OB відповідно (рис. 6.8). Доведіть, що $S_{OM_1MM_2} \leqslant \frac{1}{2}OM^2 \cdot \sin\angle AOB$.

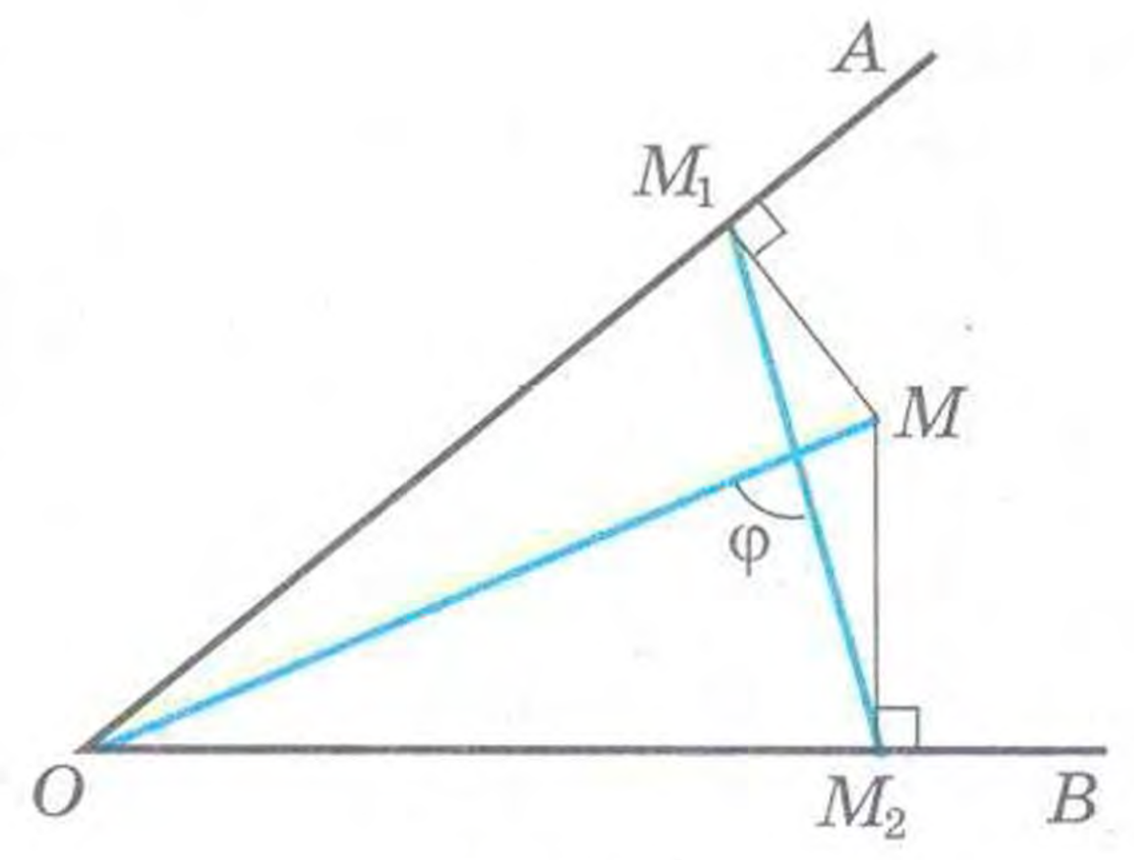


Рис. 6.8

Розв'язання. Очевидно, що точки O, M_1, M, M_2 лежать на одному колі з діаметром OM. Тоді $M_1M_2 = OM \cdot \sin\angle AOB$.

Маємо: $S_{OM_1MM_2} = \frac{1}{2} OM \cdot M_1M_2 \sin\varphi$, де φ — кут між діагоналями чотирикутника OM_1MM_2.

Оскільки $0 < \sin\varphi \leqslant 1$, то

$$S_{OM_1MM_2} \leqslant \frac{1}{2} OM \cdot M_1M_2 = \frac{1}{2} OM^2 \cdot \sin\angle AOB.$$

Приклад 3. На стороні AC трикутника ABC позначено довільну точку M, відмінну від вершин A і C. У кожний з трикутників ABM і MBC вписано коло (рис. 6.9). Доведіть, що сума радіусів цих кіл більша за радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

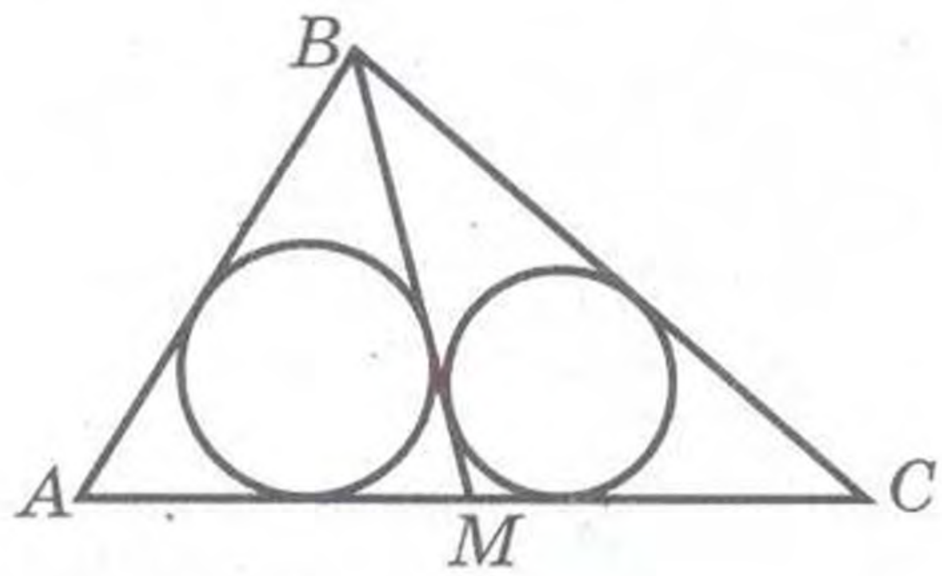


Рис. 6.9

Розв'язання. Позначимо S, S_1, S_2 — площі, p, p_1, p_2 — півпериметри, r, r_1, r_2 — радіуси вписаних кіл трикутників ABC, ABM, MBC відповідно. Маємо: $S = S_1 + S_2$,

$$rp = r_1p_1 + r_2p_2.$$

Легко отримати (зробіть це самостійно), що $p_1 < p$ і $p_2 < p$. Тоді $rp = r_1p_1 + r_2p_2 < r_1p + r_2p$. Звідси $r < r_1 + r_2$.

ВПРАВИ

6.1.° Площа трикутника MKN дорівнює 75 см². Знайдіть сторону MK, якщо $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

6.2.° Знайдіть кут між даними сторонами трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площа трикутника дорівнює $30\sqrt{3}$ см²;

2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площа трикутника дорівнює 56 см².

6.3.° Площа трикутника ABC дорівнює 18 см², $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Знайдіть кут C.

6.4.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника з бічною стороною 16 см і кутом 15° при основі.

6.5.° Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює 36 см², а кут при вершині — 30°.

6.6.° Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

6.7.° Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см.

6.8.° Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами:

1) 5 см, 5 см і 6 см; 2) 25 см, 29 см і 36 см.

6.9.° Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см.

6.10.° Доведіть, що $S \leqslant \frac{1}{2}ab$, де S — площа трикутника, a і b — довжини його сусідніх сторін.

6.11.° Чи може площа трикутника зі сторонами 4 см і 6 см дорівнювати: 1) 6 см^2; 2) 14 см^2; 3) 12 см^2?

6.12.° Дві сусідні сторони паралелограма відповідно дорівнюють двом сусіднім сторонам прямокутника. Чому дорівнює гострий кут паралелограма, якщо його площа вдвічі менша від площі прямокутника?

6.13.° Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 6.10 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

Рис. 6.10

6.14.° Знайдіть площу трикутника, сторона якого дорівнює a, а прилеглі до неї кути дорівнюють β і γ.

6.15.° У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть площу трикутника.

6.16.° У трикутнику ABC кут A дорівнює α, а висоти BD і CE дорівнюють відповідно h_1 і h_2. Знайдіть площу трикутника ABC.

6.17.° Відрізок BM — висота трикутника ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Знайдіть площу трикутника ABC.

6.18.° У трикутник зі сторонами 17 см, 25 см і 28 см вписано коло, центр якого сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трикутників, які при цьому утворилися.

6.19.• Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120°$. Знайдіть бісектрису AD.

6.20.° Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 50 см, а бічні сторони — 13 см і 37 см.

6.21.° Основи трапеції дорівнюють 4 см і 5 см, а діагоналі — 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

6.22.° Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 41 см і 50 см. Знайдіть радіус кола, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін.

6.23.° Доведіть, що $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$, де h_1, h_2 і h_3 — висоти трикутника, r — радіус вписаного кола.

6.24.° Вершини трикутника сполучено з центром вписаного в нього кола. Проведені відрізки розбивають даний трикутник на трикутники, площі яких дорівнюють 26 см², 28 см² і 30 см². Знайдіть сторони даного трикутника.

6.25.° Медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 12$ см, $\angle AMB = 150°$.

6.26.° Радіус вписаного кола трикутника дорівнює 4 см. Точка дотику ділить одну із сторін трикутника на відрізки завдовжки 6 см і 8 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника.

6.27.° Доведіть, що площу S трикутника можна обчислити за формулою[1]

$$S=\sqrt{rr_ar_br_c}.$$

6.28.° Доведіть, що площу S трикутника можна обчислити за формулою

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}}.$$

6.29.° Доведіть, що площу S трикутника можна обчислити за формулою $S=\sqrt{\frac{Rh_ah_bh_c}{2}}$.

6.30.° Доведіть, що коли площа трикутника ABC дорівнює rr_c, то $\angle C = 90°$.

6.31.° Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло радіуса R. Кут між його діагоналями дорівнює φ. Доведіть, що площу S чотирикутника можна обчислити за формулою $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$.

---

[1] У задачах 6.27–6.32, 6.36–6.39 використовуються позначення, наведені на форзаці.

6.32.•• Доведіть, що довжину бісектриси трикутника ABC можна обчислити за формулою $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

6.33.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису AD. Відомо, що $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AD}$. Знайдіть кут BAC.

6.34.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle ABC = 60°$, $AB + BC = 3$ см. Відрізок BD — бісектриса трикутника, $BD = \dfrac{2}{3}AC$. Знайдіть сторони трикутника.

6.35.•• Знайдіть площу трикутника, якщо відомо, що дві його сторони дорівнюють 35 см і 14 см, а бісектриса трикутника, яка виходить з їх спільної вершини, дорівнює 12 см.

6.36.•• Для трикутника ABC доведіть нерівність $S \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{4}$.

6.37.•• Для трикутника ABC доведіть нерівність: 1) $S \leqslant \dfrac{a^2+ab+b^2}{6}$; 2) $S \leqslant \dfrac{a^2-ab+b^2}{2}$.

6.38.•• Доведіть, що для прямокутного трикутника виконується нерівність $R + r \geqslant \sqrt{2S}$, де R і r — радіуси описаного і вписаного кіл відповідно.

6.39.•• Для трикутника ABC доведіть нерівність $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$.

6.40.•• У трикутник ABC вписано коло радіуса r. Через центр цього кола проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $S_{MBN} \geqslant 2r^2$.

6.41.•• У трикутнику ABC проведено медіану BM. Чи може радіус кола, вписаного в трикутник BCM, бути вдвічі меншим від радіуса кола, вписаного в трикутник ABC?

6.42.•• Довжини сторін трикутника не перевищують 1. Доведіть, що його площа не перевищує $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

6.43.* У трикутнику позначено дві точки. Відстані від однієї з них до сторін трикутника дорівнюють 1 см, 3 см і 15 см, а від другої — 4 см, 5 см і 11 см (сторони розглядаються в тому самому порядку). Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

6.44.* У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доведіть, що $S \leqslant \frac{(a+c)(b+d)}{4}$, де S — площа чотирикутника.

6.45.* Периметр чотирикутника дорівнює 4. Доведіть, що його площа не перевищує 1.

6.46.* (формула Карно.) Точка O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Точки M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC, AC і AB відповідно. Доведіть, що $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$, де R і r — радіуси відповідно описаного і вписаного кіл трикутника ABC.

6.47.* Додатні числа x, y, z задовольняють систему

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 16, \\ z^2 + zx + x^2 = 9. \end{cases}$$

Знайдіть значення виразу $xy + 2yz + 3xz$.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ §3

7. Правильні многокутники та їх властивості

Означення. Многокутник називають правильним, якщо у нього всі сторони рівні і всі кути рівні.

З деякими правильними многокутниками ви вже знайомі: рівносторонній трикутник — це правильний трикутник, квадрат — це правильний чотирикутник. На рисунку 7.1 зображено правильні п'ятикутник і восьмикутник.

Рис. 7.1

Ознайомимося з деякими властивостями, що притаманні всім правильним n-кутникам.

Теорема 7.1. ***Правильний многокутник є опуклим многокутником.***

Доведення. Достатньо показати, що в будь-якому многокутнику є хоча б один кут, менший від $180°$. Тоді з того, що в правильному n-кутнику всі кути рівні, випливатиме, що всі вони менші від $180°$, тобто многокутник буде опуклим.

Розглянемо довільний многокутник і пряму a, яка не має з ним спільних точок (рис. 7.2). Із кожної вершини многокутника опустимо перпендикуляр на пряму a.

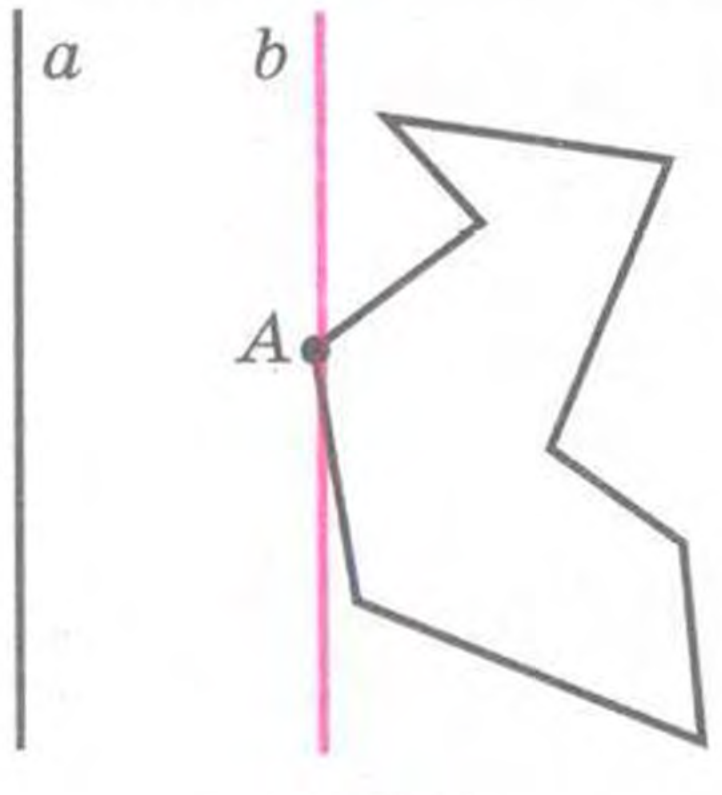


Рис. 7.2

Порівнявши довжини цих перпендикулярів, ми зможемо обрати вершину многокутника, яка найменш віддалена від прямої a (якщо таких вершин кілька, то оберемо будь-яку з них). Нехай цю властивість має вершина A (рис. 7.2). Через точку A проведемо пряму b, паралельну прямій a. Тоді кут A многокутника лежить в одній півплощині відносно прямої b. Отже, $\angle A < 180°$. ▲

У правильному трикутнику є точка, рівновіддалена від усіх його вершин і від усіх його сторін. Це точка перетину бісектрис правильного трикутника. Точці перетину діагоналей квадрата теж притаманна аналогічна властивість. Те, що в будь-якому правильному многокутнику є точка, рівновіддалена від усіх його вершин і від усіх його сторін, підтверджує така теорема.

Теорема 7.2. ***Будь-який правильний многокутник є одночасно вписаним і описаним, причому центри його описаного і вписаного кіл збігаються.***

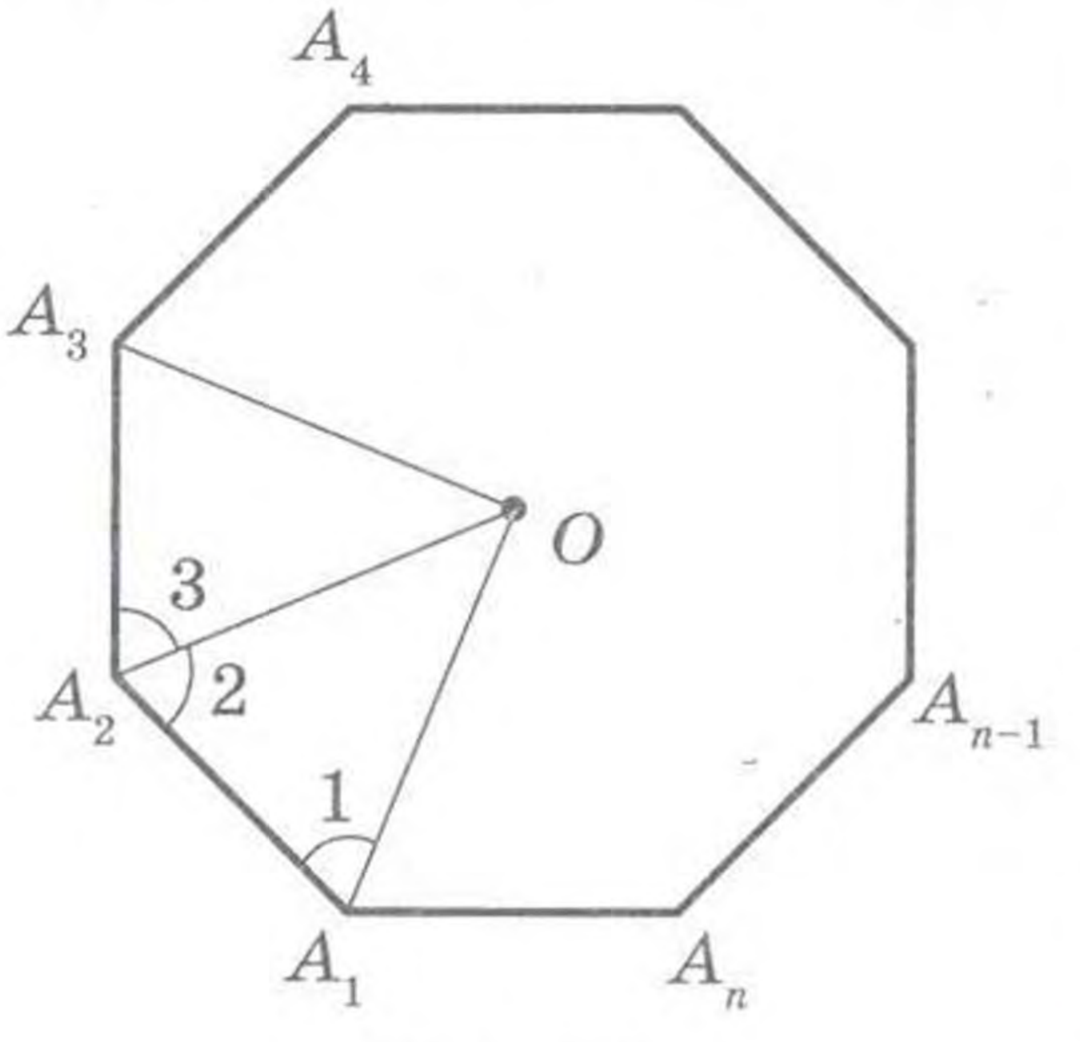


Рис. 7.3

Доведення. На рисунку 7.3 зображено правильний n-кутник $A_1A_2A_3...A_n$. Проведемо бісектриси кутів A_1 і A_2. Нехай O — точка їх перетину. З'єднаємо точки O і A_3. Оскільки в трикутниках OA_1A_2 і OA_2A_3 кути 2 і 3 рівні, а також $A_1A_2 = A_2A_3$ і OA_2 — спільна сторона, то ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. Крім того, кути 1 і 2 рівні як половини рівних кутів. Звідси трикутник OA_1A_2 — рівнобедрений, отже, рівнобедреним є трикутник OA_2A_3. Тому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

З'єднуючи точку O з вершинами $A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n$, аналогічно можна показати, що $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Таким чином, для многокутника $A_1A_2A_3...A_n$ існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Це точка O — центр описаного кола.

Оскільки рівнобедрені трикутники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 рівні, то рівні і їх висоти, проведені з вершини O. Звідси робимо висновок, що точка O рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Отже, точка O — центр вписаного кола. ▲

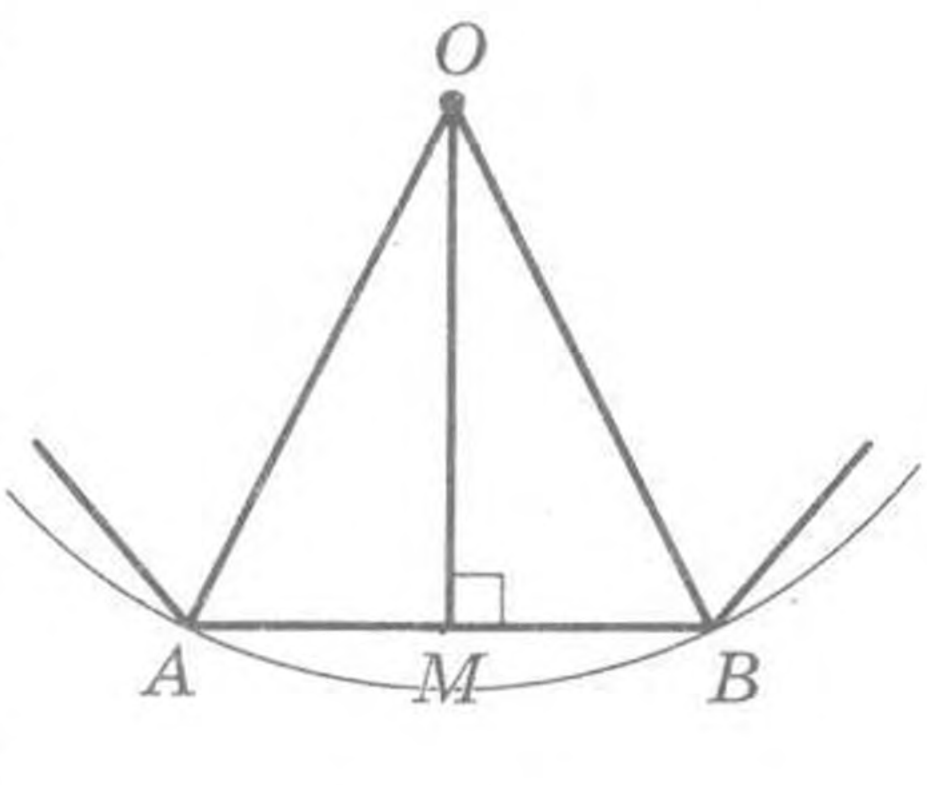


Рис. 7.4

Точку, яка є центром описаного і вписаного кіл правильного многокутника, називають **центром правильного многокутника.**

На рисунку 7.4 зображено фрагмент правильного n-кутника з центром O

і стороною AB, довжину якої позначимо a_n. Кут AOB називають **центральним кутом правильного многокутника**. Зрозуміло, що $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

У рівнобедреному трикутнику AOB проведемо висоту OM. Тоді $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. З $\Delta\ OMB$

$$OB = \frac{MB}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}} \text{ і } OM = \frac{MB}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Відрізки OB і OM — радіуси відповідно описаного і вписаного кіл правильного n-кутника. Якщо їх довжини позначити R_n і r_n відповідно, то отримані результати можна записати у вигляді формул:

$$\boxed{R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}}$$

$$\boxed{r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}$$

Підставивши у ці формули замість n числа 3, 4, 6, отримаємо формули для знаходження радіусів описаного і вписаного кіл для правильних трикутника, чотирикутника і шестикутника зі стороною a:

Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

З отриманих результатів випливає, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу його описаного кола. Звідси отримуємо простий алгоритм побудови правильного шестикутника: від довільної точки M кола потрібно послідовно відкладати хорди, які дорівнюють радіусу (рис. 7.5). Таким чином отримуємо вершини правильного шестикутника.

Сполучивши через одну вершини правильного шестикутника, отримаємо правильний трикутник (рис. 7.6).

Для побудови правильного чотирикутника достатньо в колі провести два перпендикулярні діаметри AC і BD (рис. 7.7). Тоді чотирикутник $ABCD$ — квадрат (доведіть це самостійно).

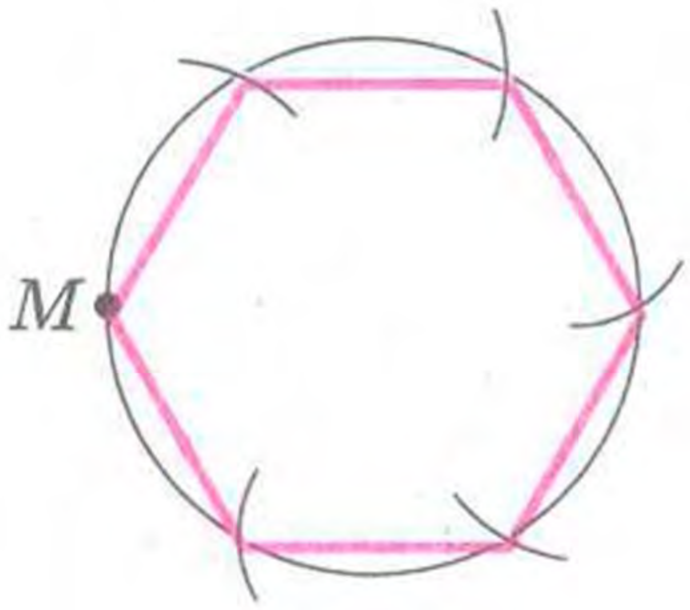


Рис. 7.5

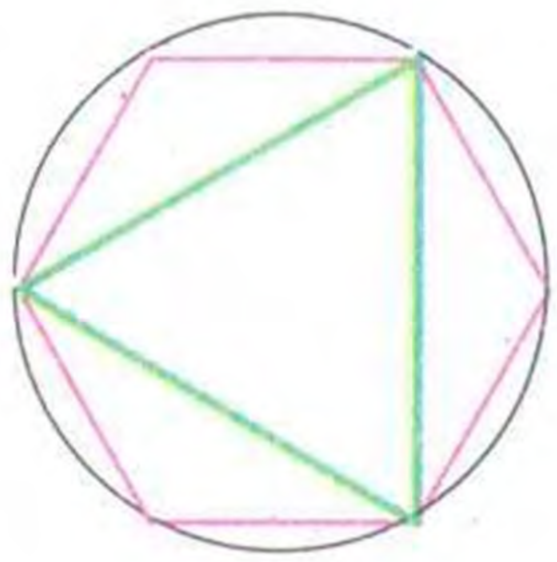


Рис. 7.6

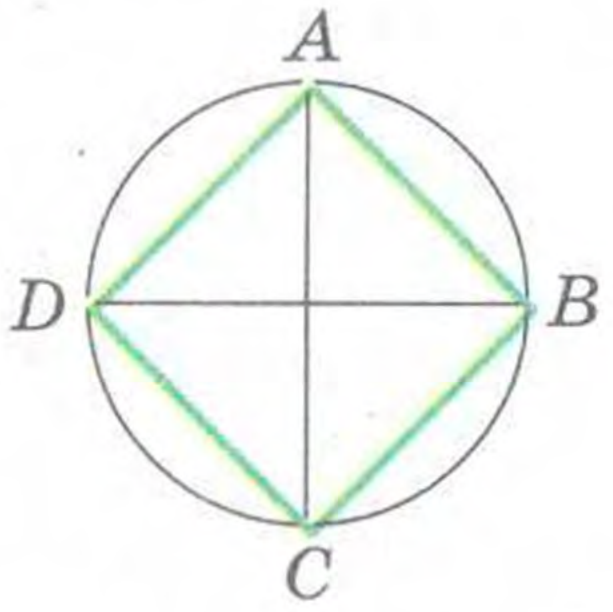


Рис. 7.7

Якщо вже побудовано правильний n-кутник, то легко побудувати правильний $2n$-кутник. Для цього потрібно знайти середини всіх сторін n-кутника і провести радіуси описаного кола через отримані точки. Тоді кінці радіусів і вершини даного n-кутника будуть вершинами правильного $2n$-кутника. На рисунках 7.8 і 7.9 показано побудову правильних 8-кутника і 12-кутника.

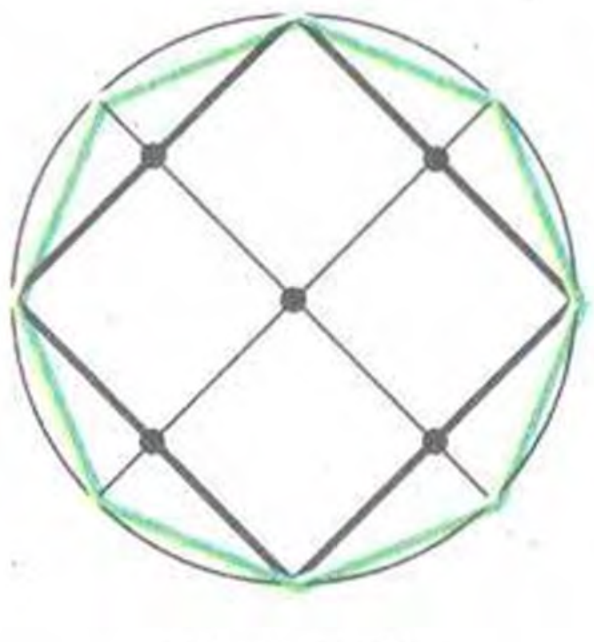


Рис. 7.8

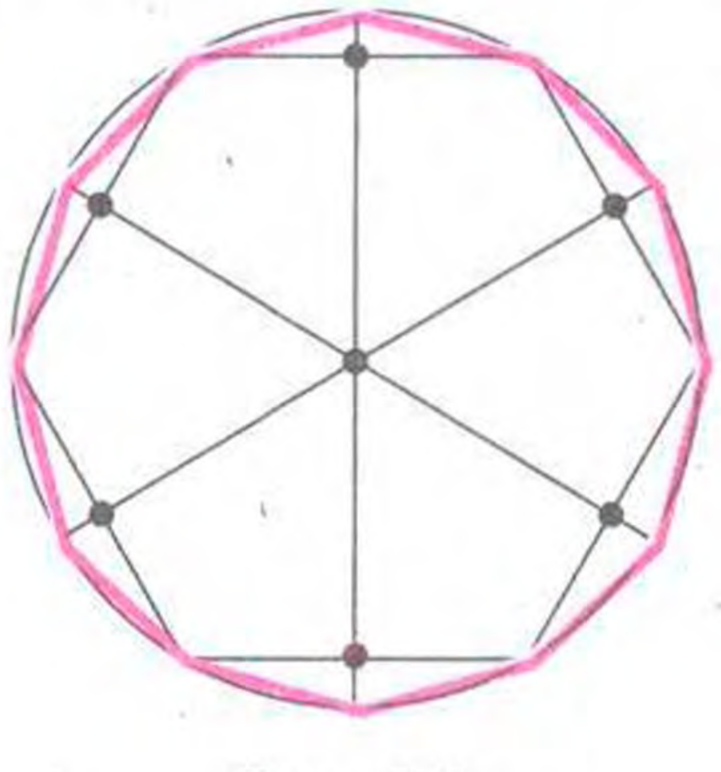


Рис. 7.9

Узагалі, якщо ви вмієте будувати правильний m-кутник, то зможете побудувати будь-який правильний $m \cdot 2^n$-кутник (n — натуральне).

Задача побудови правильних многокутників за допомогою циркуля і лінійки вивчалася ще давньогрецькими геометрами. Зокрема, крім зазначених вище многокутників вони вміли будувати правильні 5-кутник і 15-кутник, що є досить непростою справою.

Стародавні вчені, які вміли будувати будь-який із правильних n-кутників, де $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, намагалися розв'язати цю задачу і для $n = 7, 9$. Їм це не вдалося. Узагалі, більше двох тисяч років ніхто не міг вирішити цю проблему. Лише в 1796 р. великий німецький математик Карл Фрідріх Гаусс зміг довести, що за допомогою циркуля і лінійки побудувати правильні 7-кутник і 9-кутник неможливо. У 1801 р. Гаусс показав, що циркулем і лінійкою можна побудувати правильний n-кутник тоді і тільки тоді, коли $n = 2^k$, де $k \in N$, $k > 1$, або $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, де k — ціле невід'ємне число, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — різні прості числа виду $2^{2^m} + 1$, де m — ціле невід'ємне число, які називають простими числами Ферма[1]. Зараз відомо лише п'ять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65537.

Гауссу вдалося побудувати правильний 17-кутник. Він надавав цьому відкриттю настільки великого значення, що заповів зобразити правильний 17-кутник на своєму надгробку. На могильній плиті Гаусса цього рисунка немає, проте сам пам'ятник стоїть на сімнадцятикутному постаменті.

Карл Фрідріх Гаусс
(1777–1855)

Великий німецький математик

Приклад 1. Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 177°; 2) 155°? У разі позитивної відповіді вкажіть вид многокутника.

Розв'язання

1) Нехай n — кількість сторін шуканого правильного многокутника. З одного боку, сума його кутів дорівнює $180° (n - 2)$. З іншого боку, ця сума дорівнює $177°n$. Отже,

$180° (n - 2) = 177°n$; $\quad 180°n - 360° = 177°n$; $n = 120$.

Відповідь: існує, це — стодвадцятикутник.

---

[1] П'єр Ферма (1601–1665) — французький математик, один з фундаторів теорії чисел.

2) Маємо: $180^\circ(n-2)=155^\circ n$; $25^\circ n = 360^\circ$; $n = 14{,}4$, що неможливо, оскільки n має бути натуральним числом.

Відповідь: не існує.

Приклад 2. У коло вписано правильний трикутник зі стороною 18 см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

Розв'язання. Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, обчислюється за формулою $R_3=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, де a — сторона трикутника (рис. 7.10). Отже, $R_3=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$ (см).

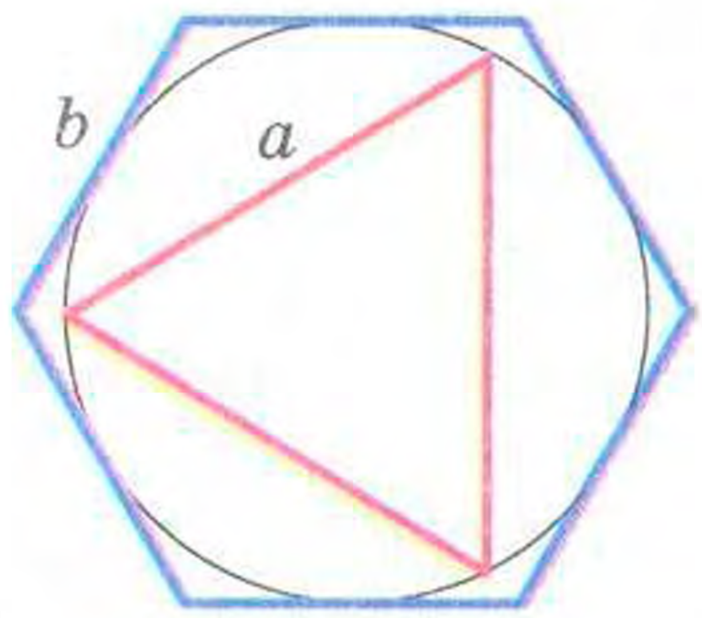


Рис. 7.10

За умовою радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює радіусу кола, описаного навколо правильного трикутника, тобто $r_6=R_3=6\sqrt{3}$ см. Оскільки $r_6=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, де b — сторона правильного шестикутника, то $b=\frac{2r_6}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=12$ (см).

Відповідь: 12 см.

Приклад 3. Побудуйте правильний п'ятикутник.

Розв'язання. Розглянемо правильний п'ятикутник $ABCDE$, сторона якого дорівнює a. Нехай діагоналі BE і AC перетинаються в точці M (рис. 7.11). Легко показати, що $AC \parallel ED$ і $BE \parallel CD$. Отже, чотирикутник $EMCD$ — паралелограм. Звідси $MC = ED = a$.

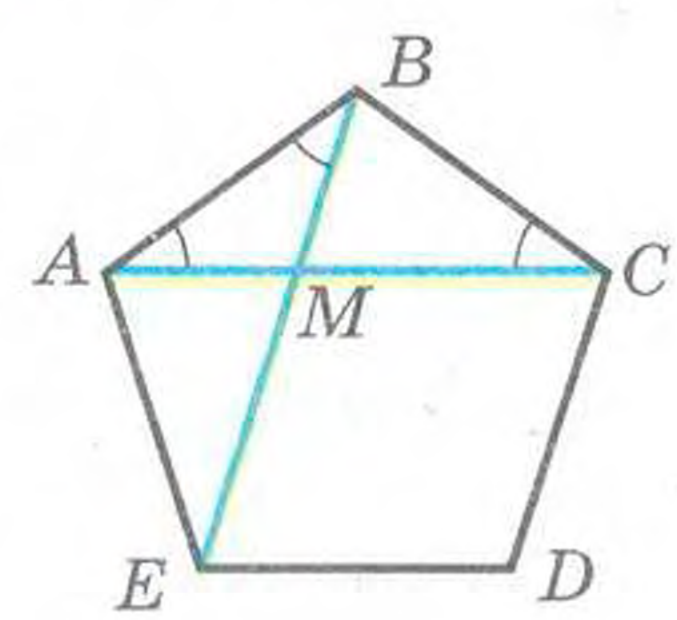


Рис. 7.11

$\Delta AMB \sim \Delta ABC$ за першою ознакою подібності трикутників (доведіть це самостійно). Звідси $\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AB}$. Але $AM = AC - a$. Маємо: $\frac{a}{AC}=\frac{AC-a}{a}$. Звідси

$AC^2 - a\cdot AC - a^2 = 0$; $AC=\frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$.

Побудову відрізка завдовжки $a\sqrt{5}$ при заданому відрізку a показано на рисунку 7.12.

Тепер легко побудувати відрізок

$$AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}.$$

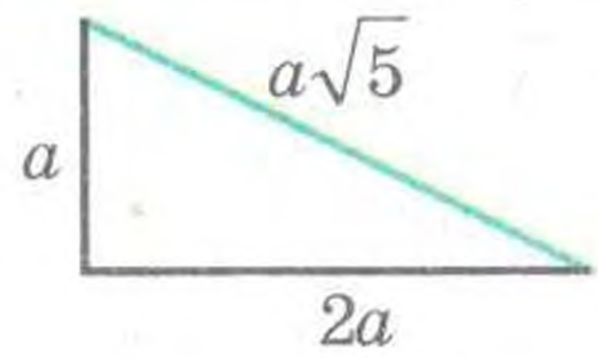


Рис. 7.12

Отже, ми можемо побудувати за трьома сторонами трикутник ABC, у якому сторони AB і AC — це сторони правильного п'ятикутника, відрізок AC — його діагональ. Завершіть побудову правильного п'ятикутника самостійно.

Приклад 4. Чи існує опуклий семикутник, у якому будь-яка сторона перпендикулярна до якої-небудь діагоналі?

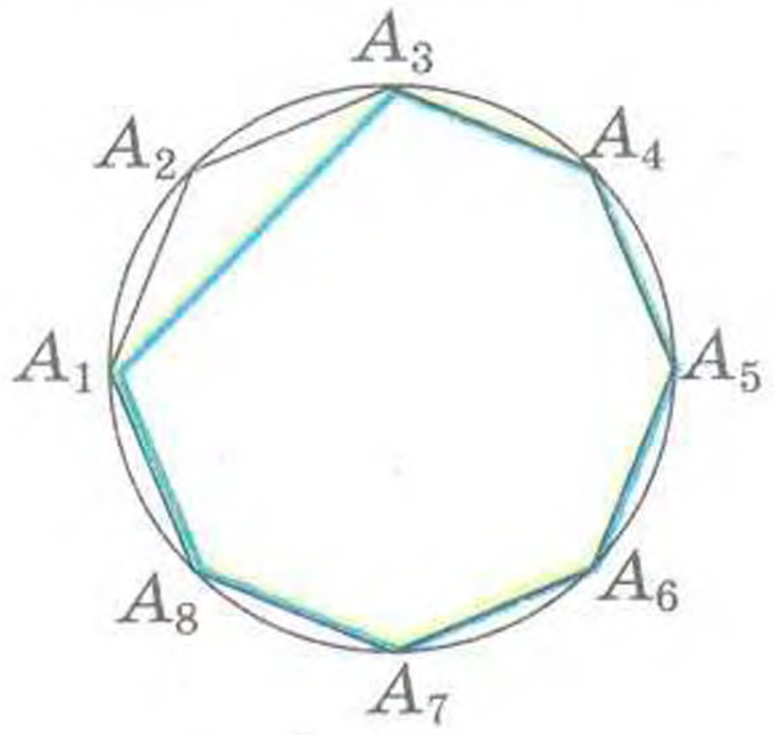


Рис.7.13

Розв'язання. У правильному восьмикутнику для будь-якої сторони знайдеться перпендикулярна до неї діагональ. Доведіть це самостійно.

Проведемо діагональ A_1A_3 правильного восьмикутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (рис. 7.13). Очевидно, що семикутник $A_1A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ має потрібну властивість.

ВПРАВИ

7.1.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) $160°$; 2) $171°$?

7.2.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) $108°$; 2) $175°$?

7.3.° Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) $140°$; 2) $130°$?

7.4.° Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кут, суміжний з кутом многокутника, становить $\frac{1}{9}$ кута многокутника?

7.5.° Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут на $168°$ більший за суміжний з ним кут.

7.6.° Нехай a_3 — сторона правильного трикутника, R і r — відповідно радіуси описаного і вписаного його кіл. Заповніть таблицю (розміри дано в сантиметрах):

a_3	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

7.7.° Нехай a_4 — сторона квадрата, R і r — відповідно радіуси описаного і вписаного його кіл. Заповніть таблицю (розміри дано в сантиметрах):

a_4	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

7.8.° Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть сторону вписаного в це коло правильного: 1) шестикутника; 2) дванадцятикутника.

7.9.° Радіус кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону описаного навколо цього кола правильного шестикутника.

7.10.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус описаного кола дорівнює R. Знайдіть радіус вписаного кола.

7.11.° Радіуси вписаного і описаного кіл правильного многокутника дорівнюють відповідно r і R. Знайдіть сторону многокутника.

7.12.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус вписаного кола дорівнює r. Знайдіть радіус описаного кола.

7.13.° Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

7.14.° У коло вписано квадрат зі стороною $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

7.15.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого на 36° більший за його центральний кут?

7.16.° Кут між радіусами вписаного кола правильного многокутника, проведеними в точки дотику цього кола до сусідніх сторін многокутника, дорівнює 20°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

7.17.° Доведіть, що всі діагоналі правильного п'ятикутника рівні.

7.18.° Доведіть, що кожна діагональ правильного п'ятикутника паралельна одній з його сторін.

7.19.° У коло вписано і навколо нього описано правильні шестикутники. Знайдіть відношення сторін цих шестикутників.

7.20.° Доведіть, що сторона правильного восьмикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, де R — радіус описаного кола.

7.21.° Доведіть, що сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, де R — радіус описаного кола.

7.22.° Знайдіть площу правильного восьмикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R.

7.23.° Знайдіть діагоналі та площу правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a.

7.24.• Кути квадрата зі стороною 6 см зрізали так, що отримали правильний восьмикутник. Знайдіть сторону утвореного восьмикутника.

7.25.• Кути правильного трикутника зі стороною 24 см зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону утвореного шестикутника.

7.26.• Знайдіть діагоналі правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a.

7.27.• У правильному дванадцятикутнику, довжина сторони якого дорівнює a, послідовно сполучили середини шести сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону правильного шестикутника, який утворився при цьому.

7.28.• У правильному восьмикутнику, довжина сторони якого дорівнює a, послідовно сполучили середини чотирьох сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону квадрата, який утворився при цьому.

7.29.• У коло радіуса R вписано правильний n-кутник і правильний $2n$-кутник. Доведіть, що $a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$.

7.30.• На сторонах правильного n-кутника поза ним побудовано квадрати. Відомо, що $2n$-кутник, утворений вершинами цих квадратів, відмінними від вершин n-кутника, є правильним. При яких значеннях n це можливо?

7.31.• Дано правильний п'ятикутник $ABCDE$. Позначили точку M таку, що трикутник DEM — правильний. Знайдіть кут AMC.

7.32.° Усі кути вписаного шестикутника рівні. Чи можна стверджувати, що цей шестикутник є правильним?

7.33.° У правильному шестикутнику обчисліть: 1) кут між діагоналями, які виходять з однієї вершини; 2) кут між найменшими діагоналями, що перетинаються.

7.34.° Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки, взятої всередині правильного многокутника, до всіх прямих, які містять його сторони, є величиною сталою.

7.35.•• Діагоналі AC і BD правильного п'ятикутника $ABCDE$ перетинаються в точці M. Доведіть, що $AM^2 = AC \cdot MC$.

7.36.•• Дано правильний 30-кутник $A_1A_2...A_{30}$ з центром у точці O. Знайдіть кут між прямими OA_3 і A_1A_4.

7.37.•• Чи існує правильний n-кутник, у якого одна з діагоналей дорівнює сумі довжин двох інших діагоналей?

7.38.•• Дано правильний десятикутник $A_1A_2...A_{10}$, вписаний в коло радіуса R. Знайдіть різницю $A_1A_4 - A_1A_2$.

7.39.•• Доведіть, що коли в п'ятикутник, у якого всі сторони рівні, можна вписати коло, то він є правильним.

7.40.•• Доведіть, що коли в п'ятикутник, у якого всі кути рівні, можна вписати коло, то він є правильним.

7.41.•• Доведіть, що площа правильного восьмикутника дорівнює добутку найбільшої і найменшої діагоналей.

7.42.* Форму яких рівних правильних многокутників можуть мати дощечки паркету, щоб ними можна було замостити підлогу?

7.43.* Накреслено правильний шестикутник, довжина сторони якого дорівнює 1. Користуючись тільки лінійкою, побудуйте відрізок завдовжки $\sqrt{7}$.

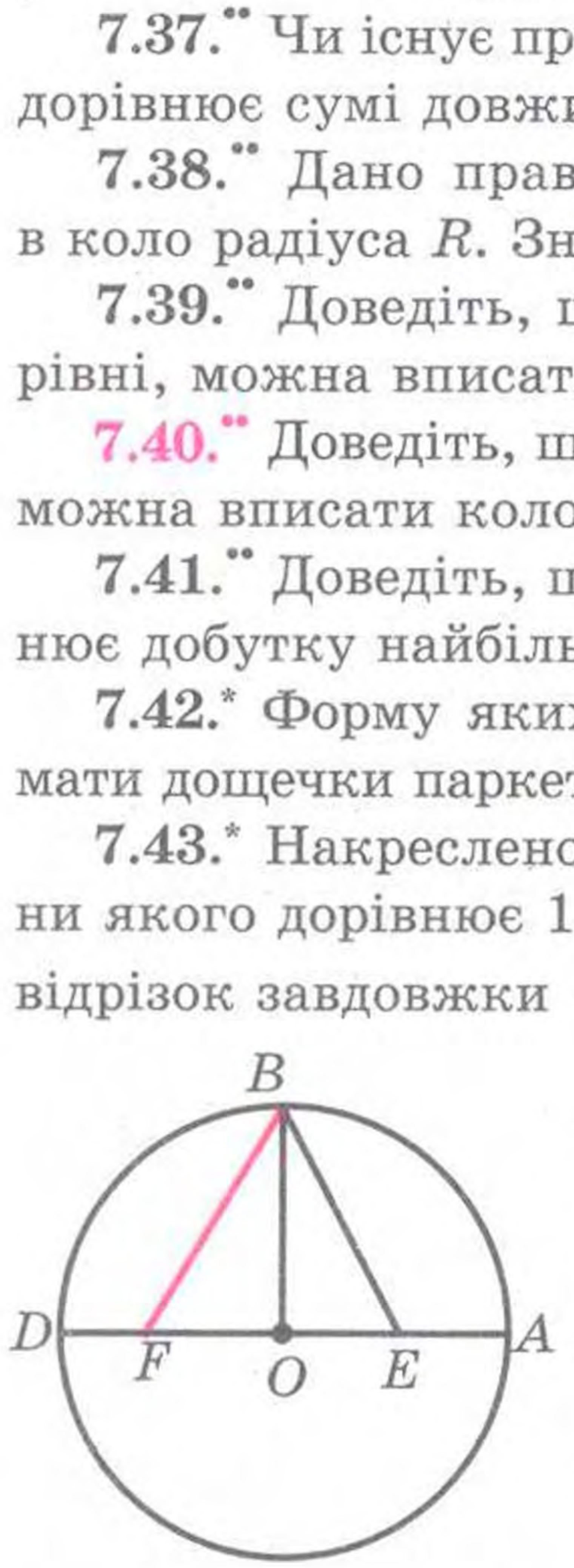


Рис. 7.14

7.44.* На колі з центром у точці O позначено точки A і B так, що $OA \perp OB$. Точка E — середина відрізка OA. На діаметрі AD позначено точку F так, що $EF = EB$ (рис. 7.14). Доведіть, що відрізок BF може бути стороною правильного п'ятикутника, вписаного в дане коло[1].

7.45.* Усі кути вписаного п'ятикутника рівні. Чи можна стверджувати, що цей многокутник є правильним?

[1] Ця задача показує, як за допомогою циркуля і лінійки побудувати правильний п'ятикутник. Цю побудову описано в роботі давньогрецького вченого Птолемея «Альмагест».

7.46.* Кожну точку кола зафарбовано в один з двох кольорів: червоний або синій. Доведіть, що в це коло можна вписати рівнобедрений трикутник, усі вершини якого одного кольору.

7.47.* У правильному 15-кутнику довільним чином позначили 7 вершин. Доведіть, що серед позначених точок є три, які є вершинами рівнобедреного трикутника.

7.48.* Усі кути п'ятикутника рівні. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки п'ятикутника до його сторін є величиною сталою.

8. Довжина кола. Площа круга

Як на практиці виміряти довжину лінії, зображеної на рисунку 8.1?

Можна, наприклад, позначити кілька точок на лінії, а потім послідовно сполучити їх відрізками так, як показано на рисунку 8.2. Потім виміряти довжину утвореної ламаної. Отримана величина наближено дорівнює довжині даної лінії. Зрозуміло, що коли зменшувати довжини всіх ланок ламаної і збільшувати їх кількість, то результат вимірювання довжини даної лінії стає точнішим (рис. 8.3).

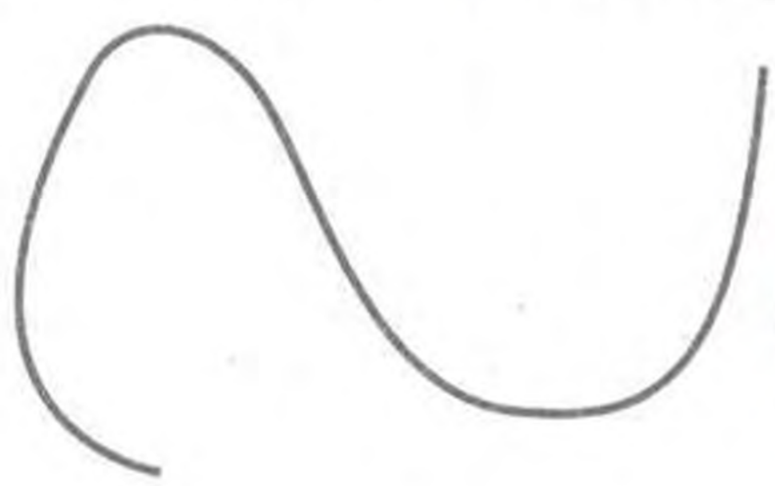


Рис. 8.1

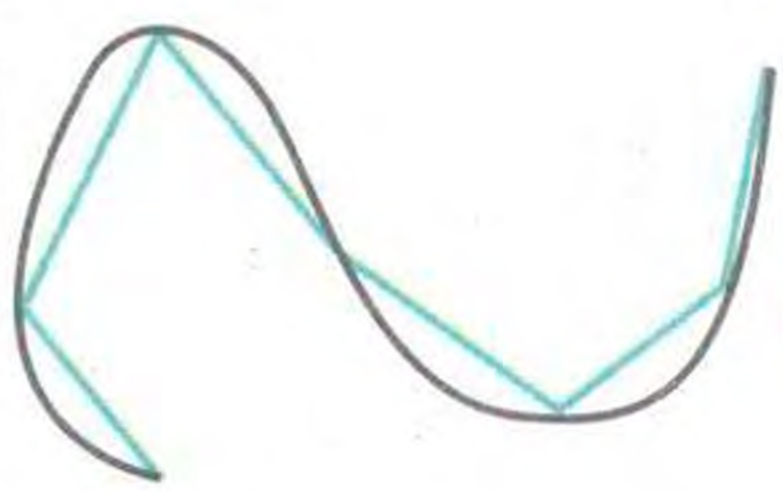


Рис. 8.2

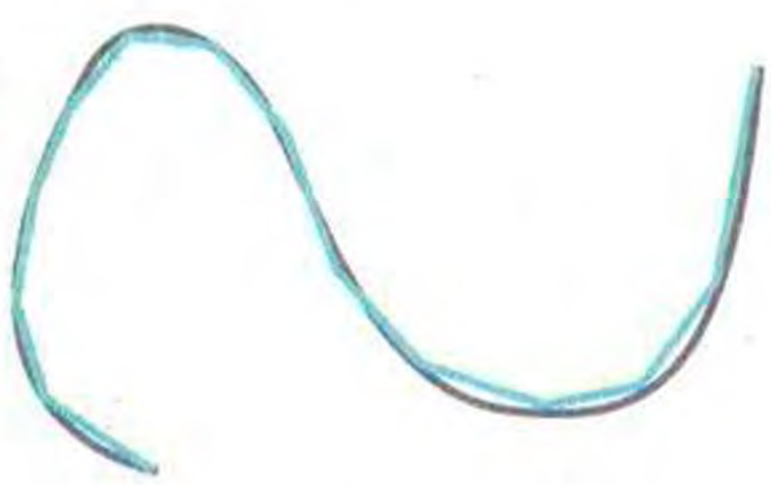


Рис. 8.3

Говорять, що довжину лінії, зображеної на рисунку 8.3, наближено виміряно за допомогою довжини **ламаної, вписаної в дану лінію**.

Для вимірювання довжини кола як вписану ламану зручно використати ламану, що складається зі сторін правильного n-кутника, вписаного в це коло.

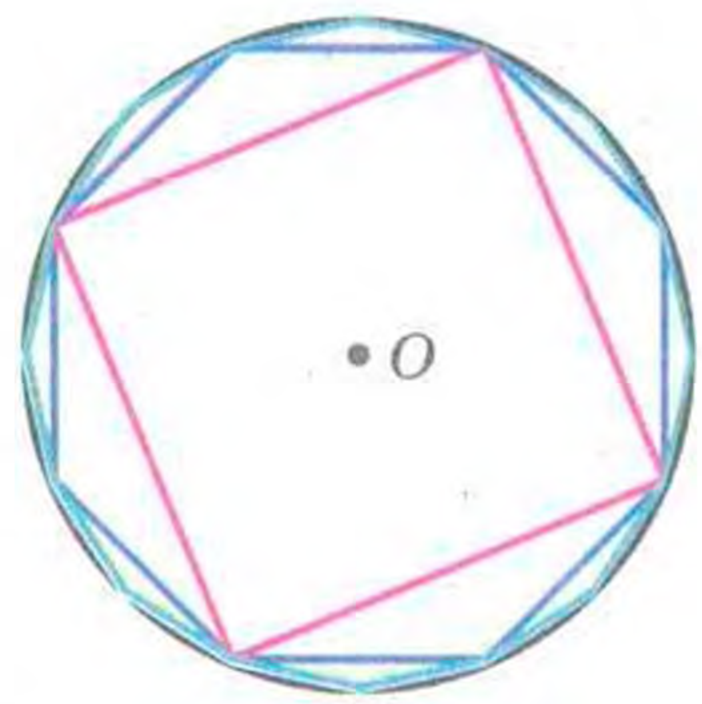


Рис 8.4

На рисунку 8.4 зображено правильні 4-кутник, 8-кутник і 16-кутник, вписані в коло.

Ми бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його периметр P_n усе менше і менше відрізняється від довжини C описаного кола.

Так, для нашого прикладу можна записати:

$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}$ і т. д.

При необмеженому збільшенні кількості сторін правильного многокутника його периметр як завгодно мало відрізняється від довжини кола. Це означає, що різницю $C - P_n$ можна зробити меншою від, наприклад, 10^{-6}, 10^{-9} і взагалі меншою від будь-якого додатного числа.

Розглянемо два правильні n-кутники зі сторонами a_n і a'_n та радіусами описаних кіл R і R' відповідно (рис. 8.5). Тоді їх периметри P_n і P'_n обчислюють за формулами:

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Звідси

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

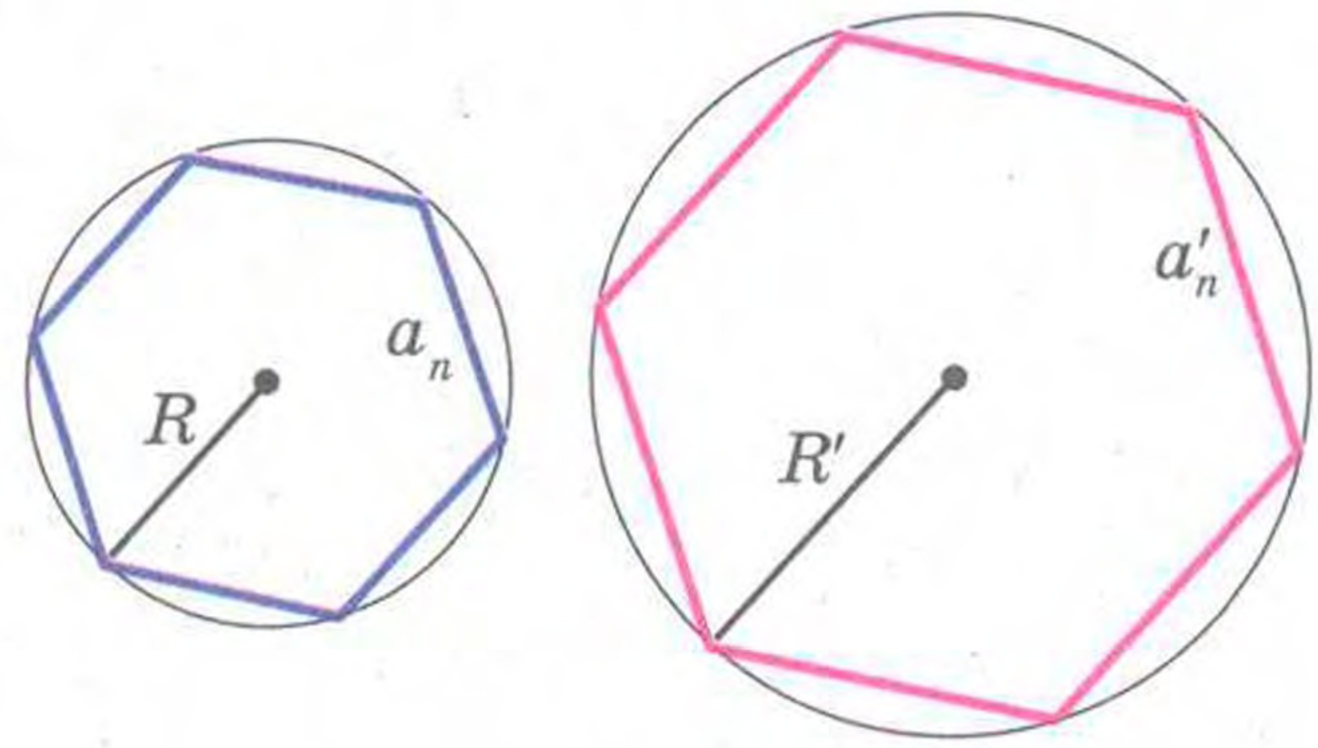


Рис. 8.5

Ця рівність справедлива при будь-якому значенні n (n — натуральне, $n \geqslant 3$). При необмеженому збільшенні значення n периметри P_n и P'_n відповідно як завгодно мало відрізняються від довжин C і C' описаних кіл. Тоді при необмеженому збільшенні n відношення $\frac{P_n}{P'_n}$ як завгодно мало відрізнятиметься від відношення $\frac{C}{C'}$. З урахуванням рівності (*) доходимо висновку, що число

$\frac{2R}{2R'}$ як завгодно мало відрізняється від числа $\frac{C}{C'}$. А це можливо лише тоді, коли $\frac{C}{C'}=\frac{2R}{2R'}$ або $\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$.

Остання рівність означає, що ***для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є одним і тим самим числом.***

Ви знаєте, що це число прийнято позначати грецькою буквою π (читають: «пі»).

З рівності $\frac{C}{2R}=\pi$ отримуємо формулу для обчислення довжини кола:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Число π є ірраціональним, отже, його можна лише наближено подати у вигляді скінченного десяткового дробу. Зазвичай при розв'язуванні задач як наближене значення π приймають число 3,14.

Великий давньогрецький учений Архімед (III ст. до н. е.), виразивши через діаметр описаного кола периметр правильного 96-кутника, установив, що $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$. Звідси й випливає, що $\pi \approx 3{,}14$.

За допомогою сучасних комп'ютерів і спеціальних програм можна обчислити число π з величезною точністю. Наведемо запис числа π з 47 цифрами після коми:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937 \ldots$.

У 1992 р. число π обчислили з точністю до 1 011 196 691 цифри після коми. Цей факт було занесено до Книги рекордів Гіннеса. Саме число у книзі не наведено, оскільки для цього було б потрібно понад тисячу сторінок.

Знайдемо формулу для обчислення довжини дуги кола з градусною мірою $n°$. Оскільки градусна міра всього кола дорівнює $360°$, то довжина дуги в $1°$ дорівнює $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$. Тоді довжина l дуги в $n°$ обчислюється за формулою

$$\boxed{l=\frac{\pi R n}{180}}$$

Досі вам доводилося обчислювати площі многокутників або фігур, які можна розбити на кілька многокутників.

Розглянемо, як на практиці можна виміряти площу фігури, зображеної на рисунку 8.6. У цю фігуру вписують многокутник (рис. 8.7). Його площа є наближеним значенням площі даної фігури. Якщо зменшувати довжини всіх сторін многокутника, при цьому збільшуючи їх кількість (рис. 8.8), то результат вимірювання площі даної фігури стає точнішим.

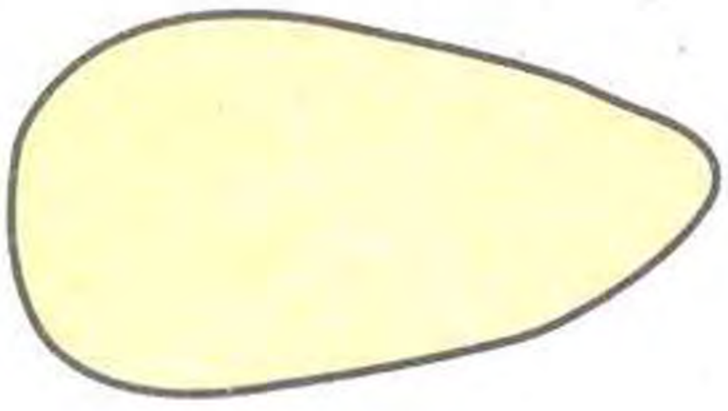


Рис. 8.6

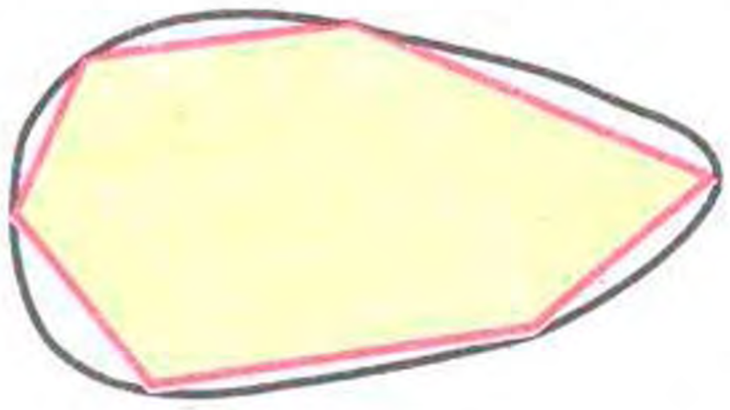


Рис. 8.7

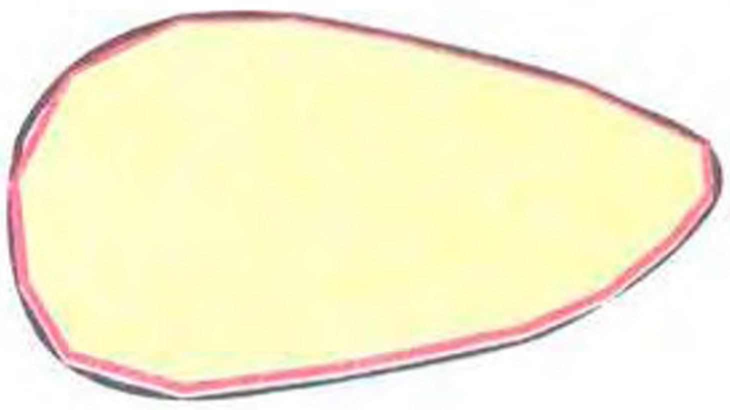


Рис. 8.8

Скористаємося цією ідеєю для знаходження площі круга.

Звернемося знову до рисунка 8.4. Бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його площа S_n усе менше і менше відрізняється від площі S круга. При необмеженому збільшенні кількості сторін його площа наближається до площі круга.

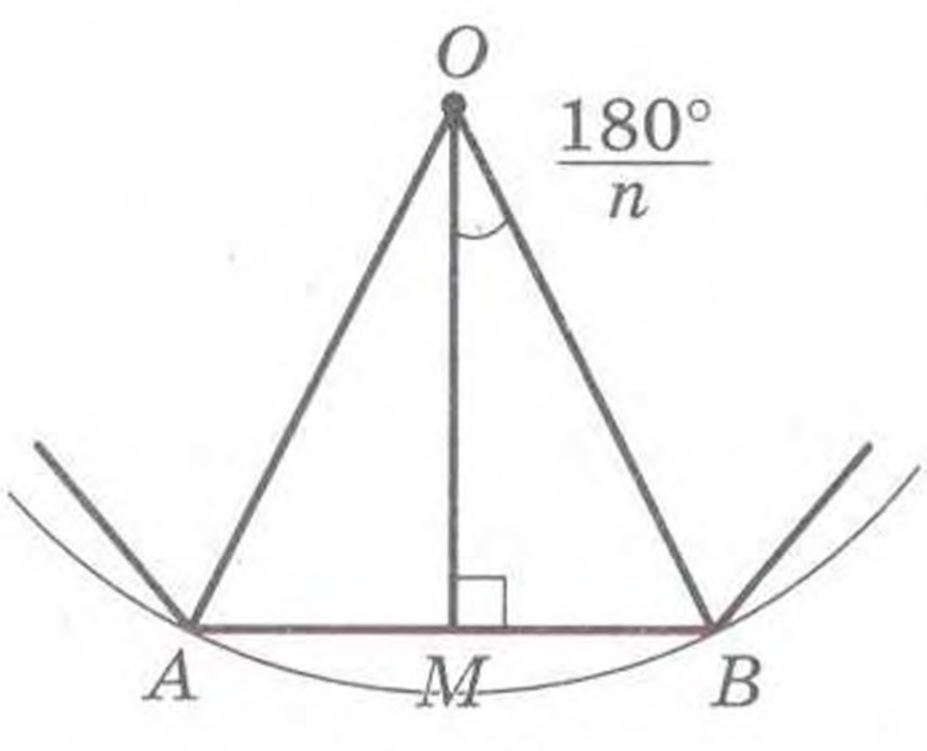


Рис. 8.9

На рисунку 8.9 зображено фрагмент правильного n-кутника з центром у точці O, зі стороною $AB = a_n$ і радіусом описаного кола, який дорівнює R. Опустимо перпендикуляр OM на сторону AB. Маємо:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n R \cos \frac{180°}{n}.$$

Оскільки радіуси, проведені у вершини правильного n-кутника, розбивають його на n рівних трикутників, то площа n-кутника S_n у n разів більша за площу трикутника AOB.

Тоді $S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n a_n R \cos \frac{180°}{n}$. Звідси

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}, \qquad (**)$$

де P_n — периметр даного правильного n-кутника.

При необмеженому збільшенні значення n величина $\frac{180^\circ}{n}$ буде як завгодно мало відрізнятися від 0°, а отже, $\cos\frac{180^\circ}{n}$ наближатиметься до 1. Периметр P_n наближатиметься до довжини C кола, а площа S_n — до площі S круга. Тоді з урахуванням рівності (**) можна записати $S=\frac{1}{2}C\cdot R$.

З цієї рівності отримуємо формулу для знаходження площі круга:

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

На рисунку 8.10 радіуси OA і OB поділяють круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну з цих частин разом з радіусами OA і OB називають **круговим сектором** або просто **сектором.**

Зрозуміло, що круг радіуса R можна поділити на 360 рівних секторів, кожен з яких міститиме дугу в 1°. Площа такого сектора дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$. Тоді площа S сектора, який містить дугу кола в n°, обчислюється за формулою:

$$\boxed{S=\frac{\pi R^2 n}{360}}$$

На рисунку 8.11 хорда AB поділяє круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну з цих частин разом з хордою AB називають **круговим сегментом** або просто **сегментом.** Хорду AB при цьому називають **основою сегмента.**

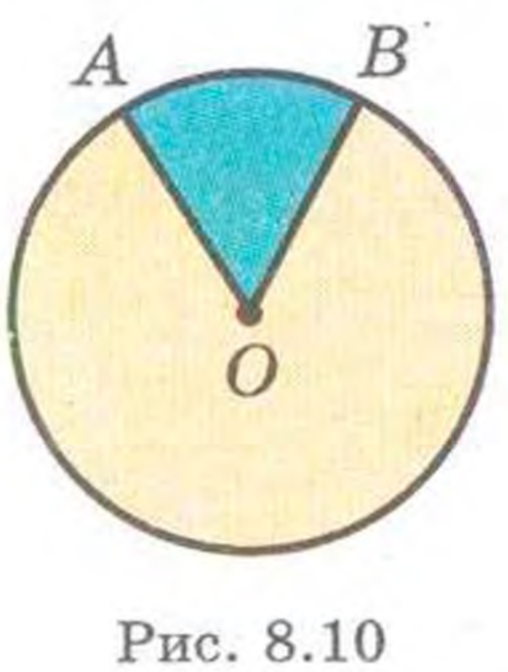


Рис. 8.10

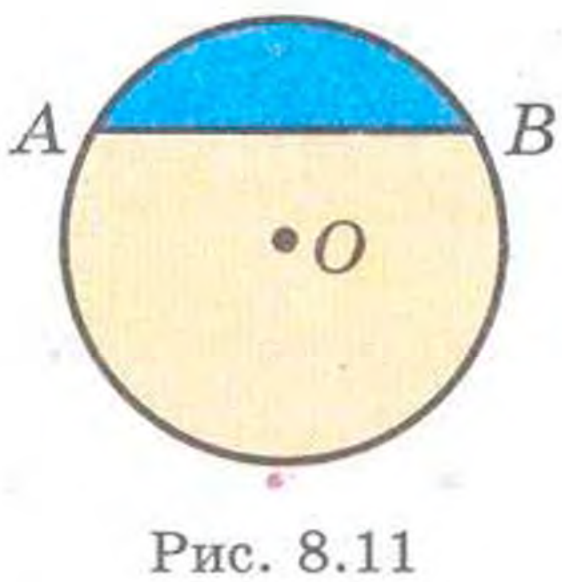


Рис. 8.11

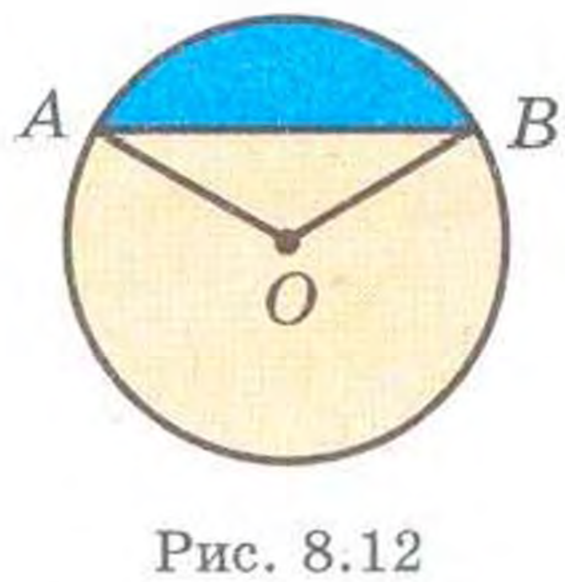


Рис. 8.12

Щоб знайти площу сегмента, який зафарбовано в синій колір (рис. 8.12), треба від площі сектора, який містить хорду AB, відняти площу трикутника AOB (точка O — центр круга). Щоб знайти площу сегмента, який зафарбовано в жовтий колір, треба до площі сектора, який не містить хорду AB, додати площу трикутника AOB.

Якщо хорда AB є діаметром круга, то вона поділяє круг на два сегменти, які називають **півкругами**. Площу S півкруга обчислюють за формулою $S = \frac{\pi R^2}{2}$, де R — радіус круга.

З пошуком формули для знаходження площі круга пов'язана одна із знаменитих задач давнини — **задача про квадратуру круга:** побудувати за допомогою циркуля і лінійки квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

Починаючи зі вчених Стародавньої Греції, цю задачу намагалися розв'язати математики багатьох поколінь. Натхнення для своїх пошуків вони багато в чому черпали з результатів, отриманих Гіппократом Хіоським: ще в V ст. до н. е. Гіппократ знайшов низку криволінійних фігур, рівновеликих деяким многокутникам.

Розглянемо одну з його конструкцій.

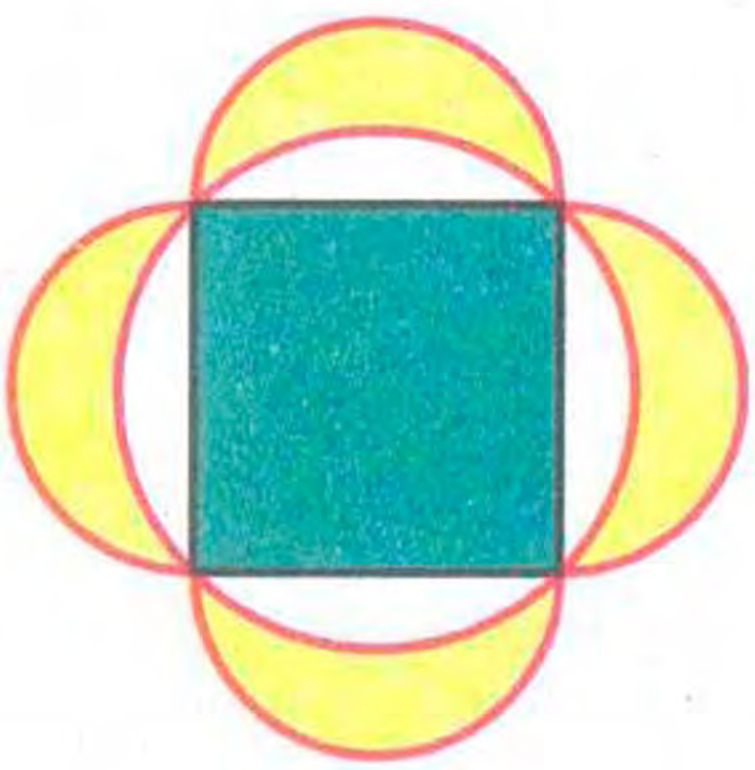


Рис. 8.13

Опишемо навколо квадрата коло, а на кожній його стороні побудуємо півколо в зовнішній бік (рис. 8.13). Фігури, виділені на рисунку 8.13 жовтим кольором, називають **серпиками Гіппократа**. Легко показати (зробіть це самостійно), що сума площ цих серпиків дорівнює площі даного квадрата.

Спроби розв'язати задачу про квадратуру круга припинилися лише в кінці XIX ст., коли було доведено неможливість її розв'язання.

Приклад 1. Довжина дуги кола, радіус якого 25 см, дорівнює π см. Знайдіть градусну міру дуги.

Розв'язання. З формули $l = \frac{\pi R n}{180}$ отримуємо $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Отже, шукана градусна міра $n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^\circ = 7{,}2^\circ$.

Відповідь: $7{,}2^\circ$.

Приклад 2. У коло з центром O, радіус якого дорівнює 8 см, вписано правильний восьмикутник $ABCDEFMK$ (рис. 8.14). Знайдіть площі сектора і сегмента, які містять дугу AB.

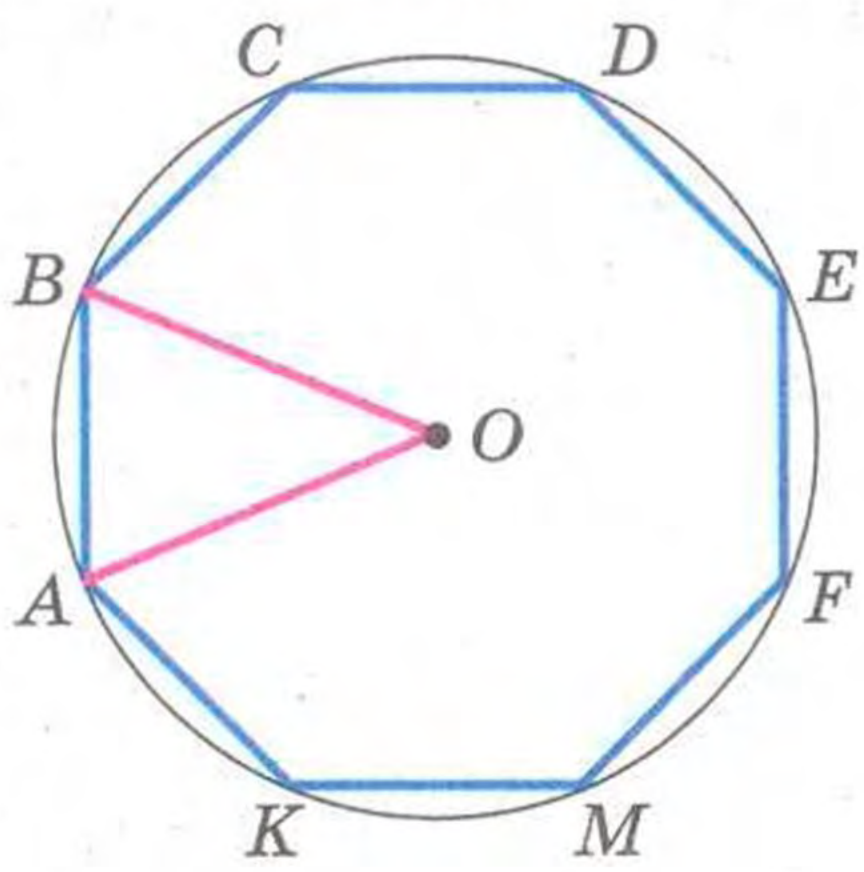


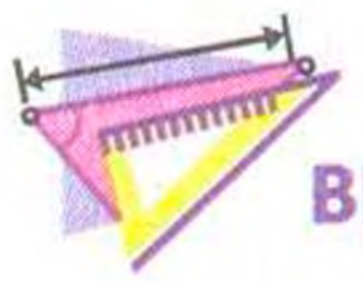
Рис. 8.14

Розв'язання. $\angle AOB$ — центральний кут правильного восьмикутника, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Тоді площа сектора, яку потрібно знайти, $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (см^2), площа сегмента

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\Delta AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = 8\pi - 16\sqrt{2} \quad (\text{см}^2).$$

Відповідь: 8π см^2, $(8\pi - 16\sqrt{2})$ см^2.



ВПРАВИ

8.1.° Обчисліть довжину червоної лінії, зображеної на рисунку 8.15.

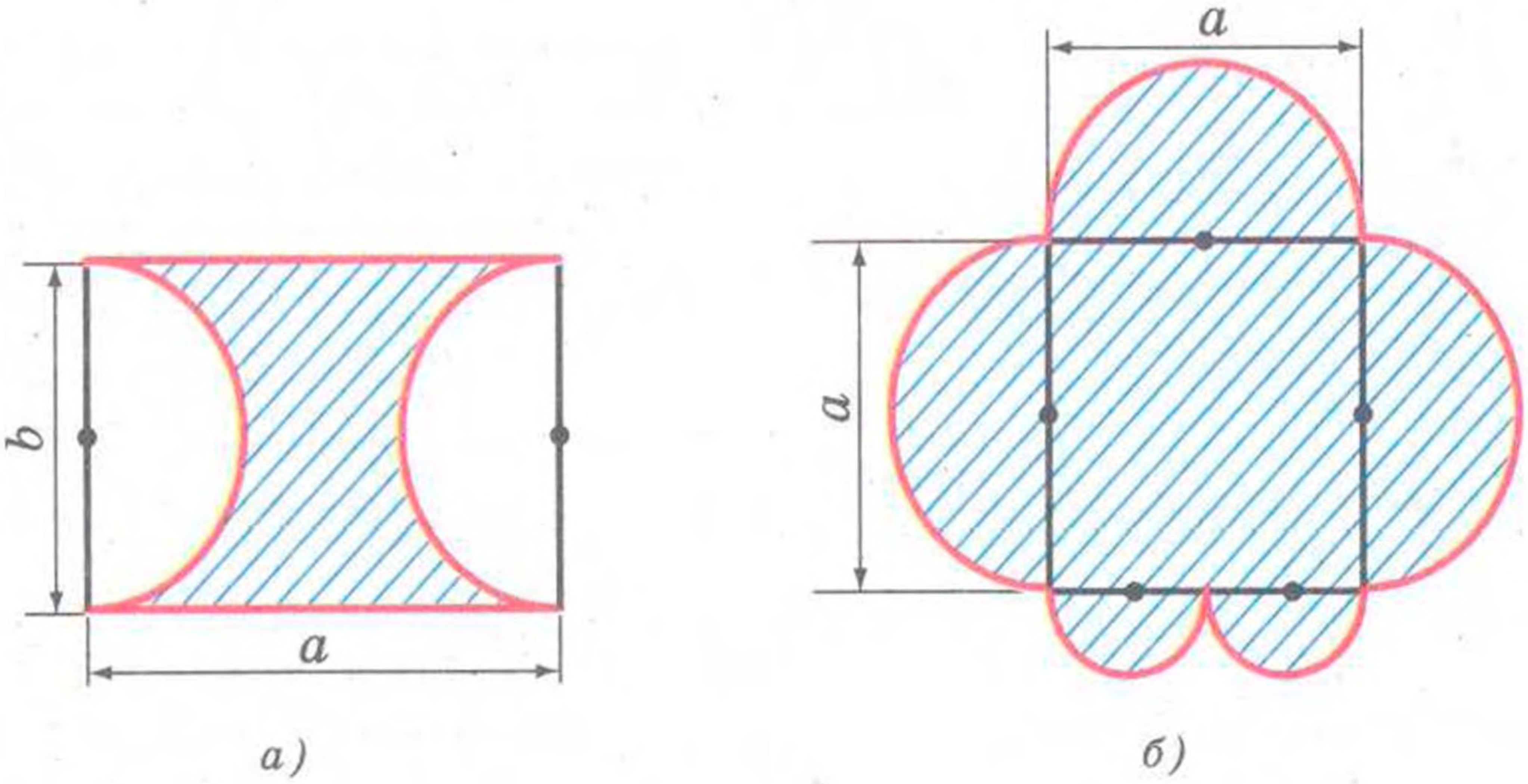


Рис. 8.15

8.2.° Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 8.16.

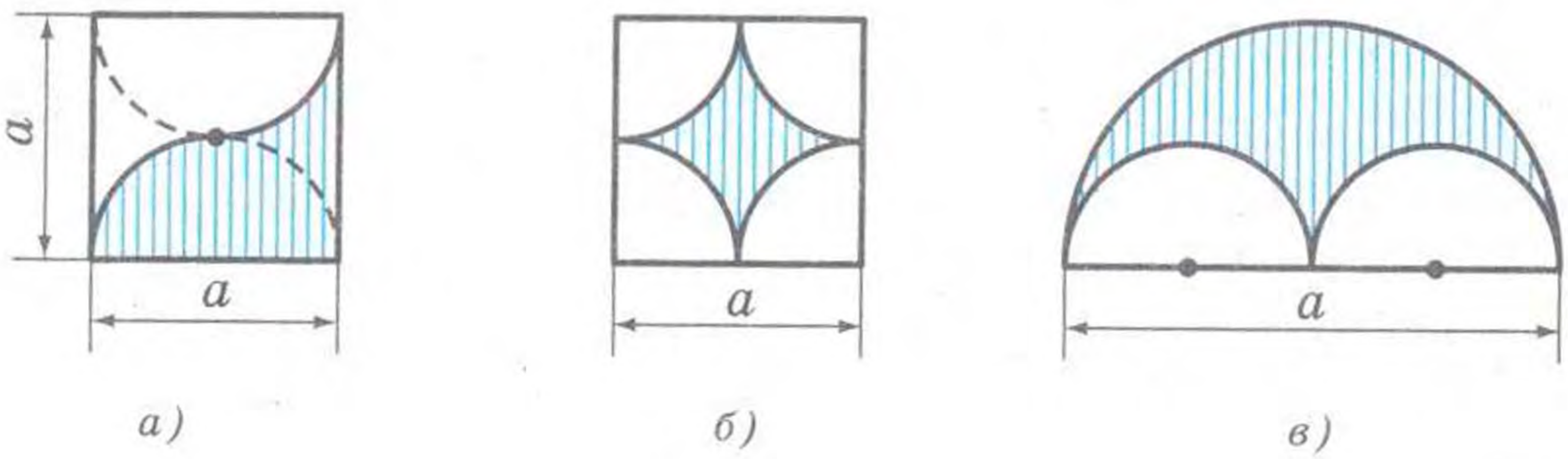


Рис. 8.16

8.3.° Знайдіть площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною b і кутом α при основі.

8.4.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника зі стороною a і кутом α між даною стороною і діагоналлю прямокутника.

8.5.° Радіус кола дорівнює 8 см. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює: 1) $4°$; 2) $18°$; 3) $160°$; 4) $320°$.

8.6.° Довжина дуги кола дорівнює 12π см, а її градусна міра — $27°$. Знайдіть радіус кола.

8.7.° Довжина дуги кола радіусом 24 см дорівнює 3π см. Знайдіть градусну міру дуги.

8.8.° Обчисліть довжину дуги екватора Землі, градусна міра якої дорівнює $1°$, якщо радіус екватора наближено дорівнює 6400 км.

8.9.° Радіус круга дорівнює 6 см. Знайдіть площу сектора, якщо градусна міра його дуги дорівнює: 1) $15°$; 2) $144°$; 3) $280°$.

8.10.° Площа сектора становить $\frac{5}{8}$ площі круга. Знайдіть градусну міру його дуги.

8.11.° Площа сектора дорівнює 6π дм^2. Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 12 дм.

8.12.° Площа сектора дорівнює $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусна міра дуги цього сектора становить $75°$. Знайдіть радіус круга, частиною якого є даний сектор.

8.13.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 5 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює: 1) $45°$; 2) $150°$; 3) $330°$.

8.14.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 2 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює: 1) $60°$; 2) $300°$.

8.15.° Радіус кола збільшено на a. Доведіть, що довжина кола збільшиться на величину, яка не залежить від радіуса даного кола.

8.16.° Сторона трикутника дорівнює 6 см, а прилеглі до неї кути дорівнюють $50°$ і $100°$. Знайдіть довжини дуг, на які поділяють описане коло трикутника його вершини.

8.17.° Сторона трикутника дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а прилеглі до неї кути дорівнюють $35°$ і $25°$. Знайдіть довжини дуг, на які поділяють описане коло трикутника його вершини.

8.18.° На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику, якщо $\angle A = 24°$, $AC = 20$ см.

8.19.° Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $70°$. На висоті трикутника, яка проведена до основи і дорівнює 27 см, як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги кола, яка належить трикутнику.

8.20.° Доведіть, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника як на діаметрі (рис. 8.17), дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на його катетах як на діаметрах.

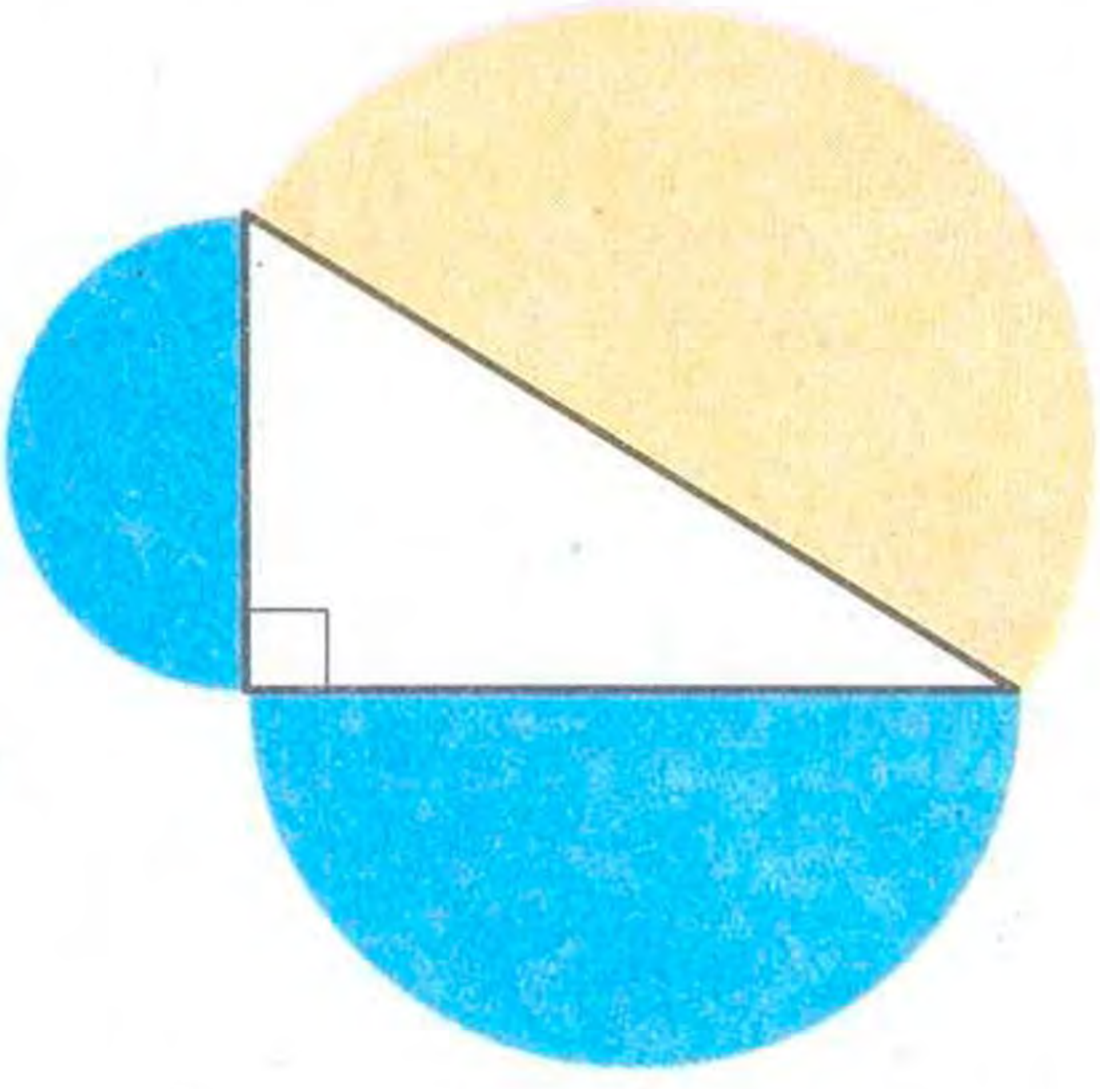


Рис. 8.17

8.21.° У круг вписано квадрат зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона квадрата.

8.22.° У круг вписано правильний трикутник зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона трикутника.

8.23.• Відрізок AB розбили на n відрізків. На кожному з них як на діаметрі побудували півколо. Цю дію повторили, розбивши даний відрізок на m відрізків. Знайдіть відношення сум довжин півкіл, отриманих у першому і другому випадках.

8.24.° У круговий сектор, радіус якого дорівнює R, а центральний кут становить $60°$, вписано круг. Знайдіть площу цього круга.

8.25.° Знайдіть площу розетки (заштрихованої фігури), яка зображена на рисунку 8.18, якщо сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a.

8.26.° При побудові чотирьох дуг з центрами у вершинах квадрата $ABCD$ і радіусами, які дорівнюють стороні a квадрата, утворилася фігура, обмежена червоною лінією (рис. 8.19). Знайдіть довжину цієї лінії.

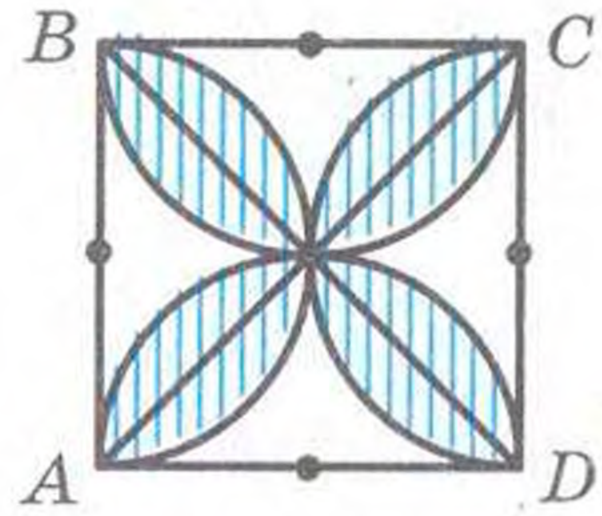


Рис. 8.18

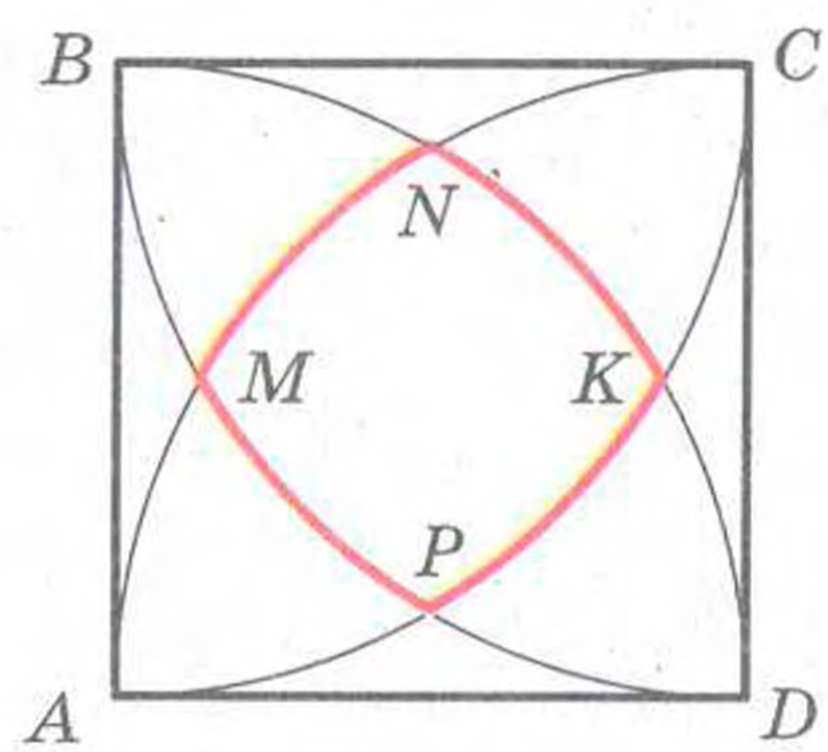


Рис. 8.19

8.27.° Знайдіть довжину червоної лінії (рис. 8.20), де O_1, O_2, O_3, ... — центри рівних кіл радіуса R.

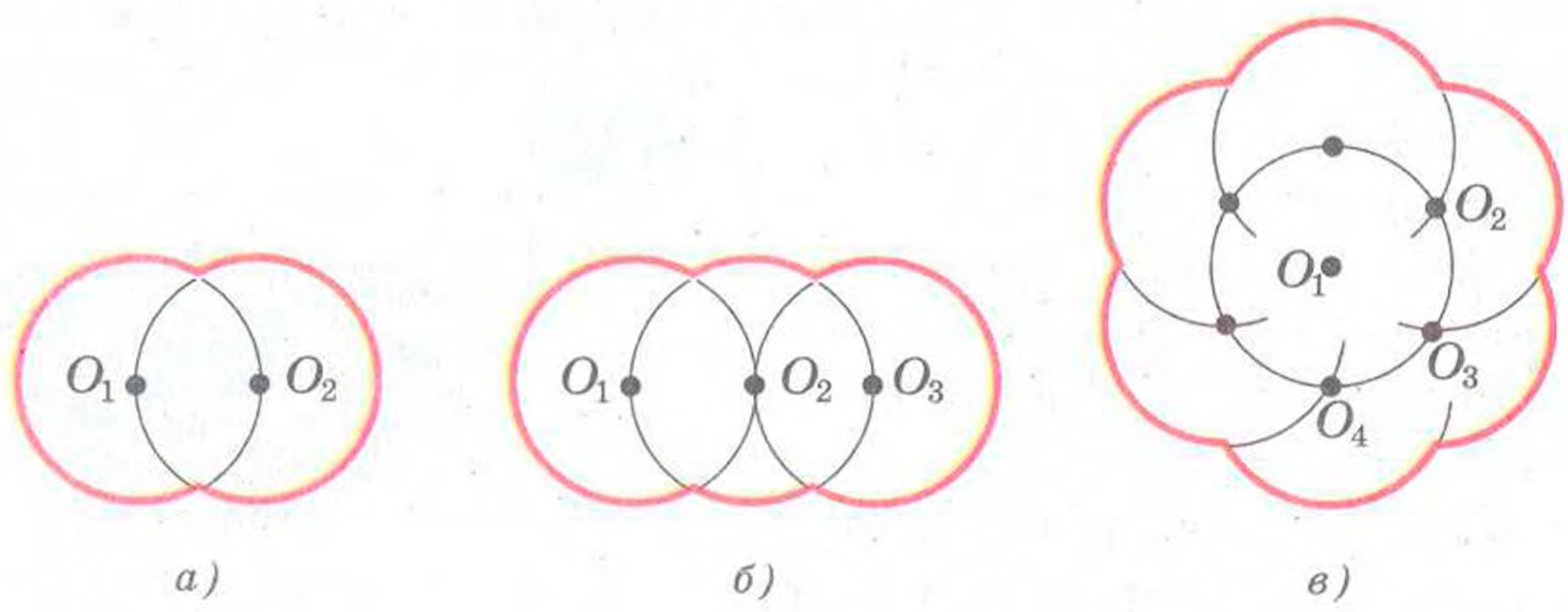


Рис. 8.20

8.28.° Дано два кола, радіуси яких дорівнюють R і r ($R > r$). Центр меншого кола лежить на більшому колі. Довжина дуги меншого кола, розміщеної всередині більшого кола, дорівнює l. Знайдіть довжину дуги більшого кола, розміщеної всередині меншого кола.

8.29.$^{\bullet}$ На гіпотенузі і катетах як на діаметрах побудовано півкруги (рис. 8.21). Доведіть, що площа зафарбованої фігури дорівнює площі трикутника.

8.30.$^{\bullet}$ Знайдіть площу спільної частини двох кругів з радіусами 1 см і $\sqrt{3}$ см, якщо відстань між їх центрами дорівнює 2 см.

8.31.$^{\bullet}$ Три кола, радіус кожного з яких дорівнює R, попарно дотикаються. Обчисліть площу криволінійного трикутника, обмеженого дугами цих кіл (рис. 8.22).

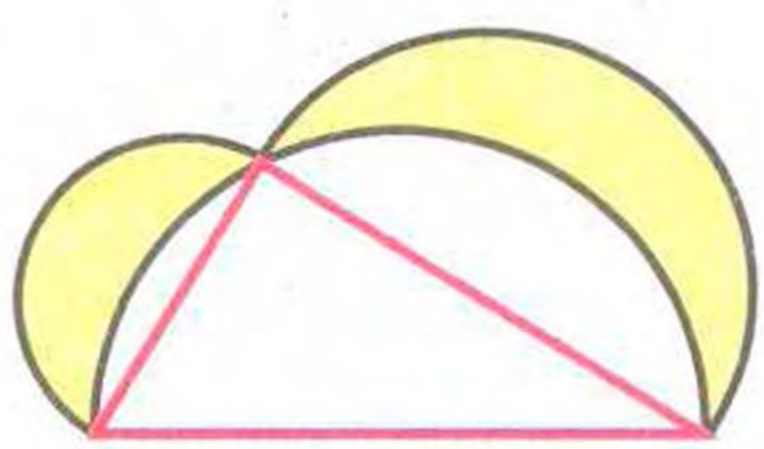


Рис. 8.21

Рис. 8.22

8.32.$^{\bullet}$ На відрізках AB, BC і AC як на діаметрах побудовано півкруги (рис. 8.23). Відрізки MB і AC перпендикулярні. Доведіть, що площа зафарбованої фігури (її називають арбелос Архімеда) дорівнює $\frac{1}{4}\pi MB^2$.

8.33.$^{\bullet}$ Хорда AB більшого з двох концентричних кіл дотикається до меншого кола (рис. 8.24). Знайдіть площу зафарбованого кільця, якщо $AB = a$.

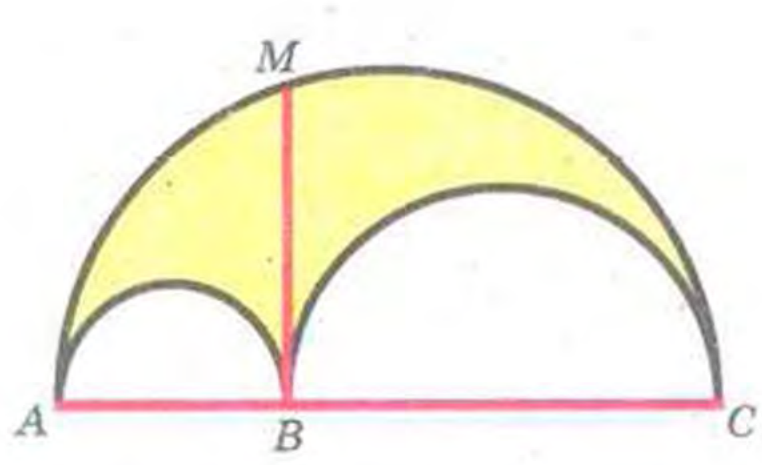


Рис. 8.23

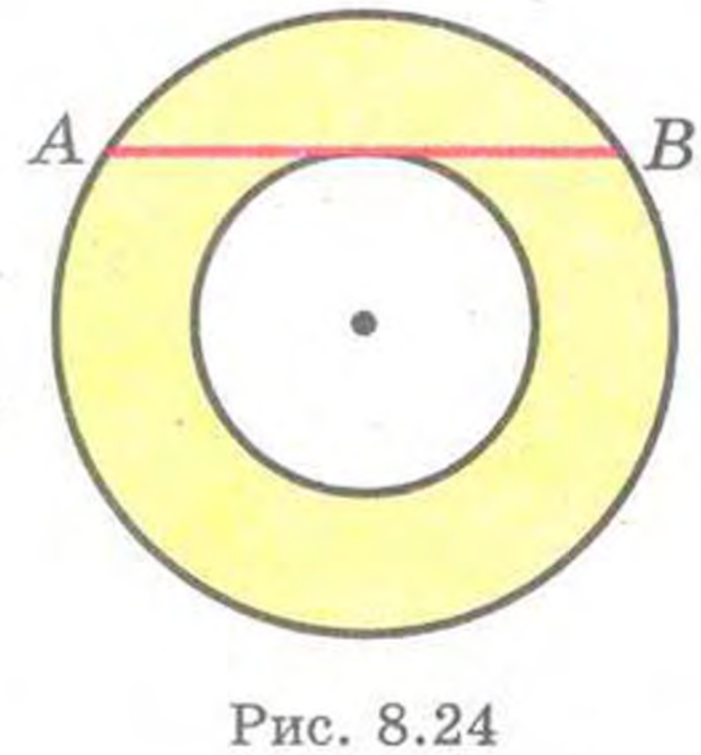


Рис. 8.24

8.34.$^{\bullet}$ Побудуйте круг, площа якого дорівнює сумі площ двох даних кругів.

8.35.•• Два кола, радіуси яких дорівнюють 4 см і 12 см, дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть площу фігури, обмеженої цими колами та їх спільною дотичною (рис. 8.25).

8.36.•• Два квадрати зі сторонами 1 см мають спільний центр (рис. 8.26). Доведіть, що площа їх спільної частини більша за $\frac{3}{4}$.

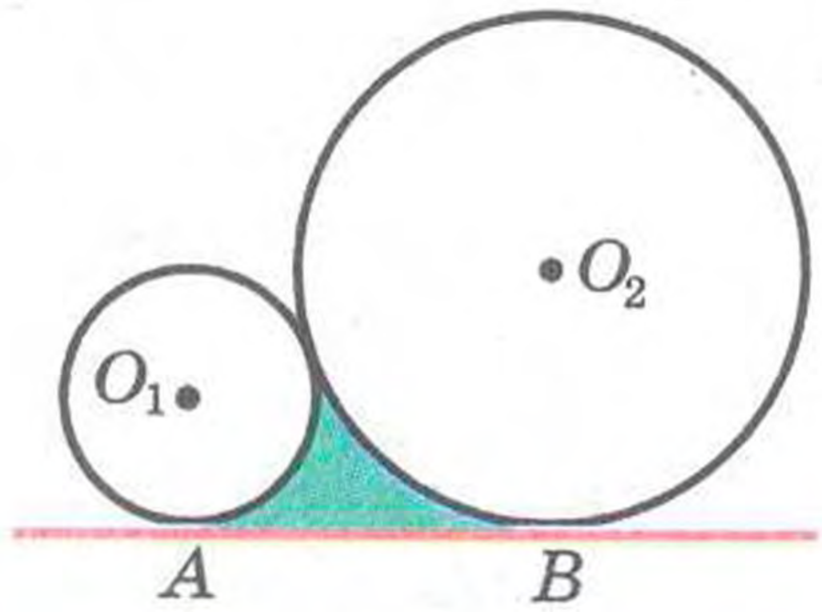


Рис. 8.25

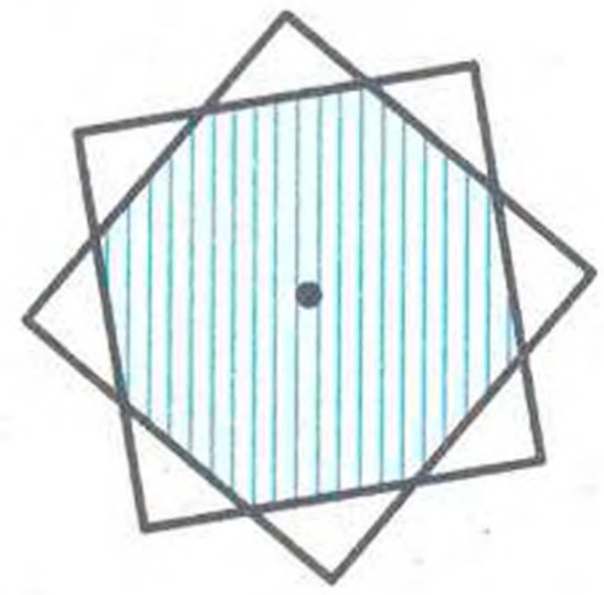


Рис. 8.26

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ §4

9. Відстань між двома точками із заданими координатами. Поділ відрізка в заданому відношенні

У 6 класі ви ознайомилися з координатною площиною, тобто з площиною, на якій зображено дві перпендикулярні координатні прямі (вісь абсцис і вісь ординат) зі спільним початком відліку (рис. 9.1). Домовимося координатну площину з віссю x (віссю абсцис) і віссю y (віссю ординат) називати **площиною xy**. Ви вмієте позначати на ній точки за їх координатами і навпаки, знаходити координати точки, позначеної на координатній площині.

Координати точки на площині xy називають **декартовими координатами** на честь французького математика Рене Декарта (див. оповідання на с. 111).

Ви знаєте, як знаходити відстань між двома точками, заданими своїми координатами на координатній прямій: для точок A (x_1) і B (x_2) (рис. 9.2) маємо:

$$AB = | x_2 - x_1 |.$$

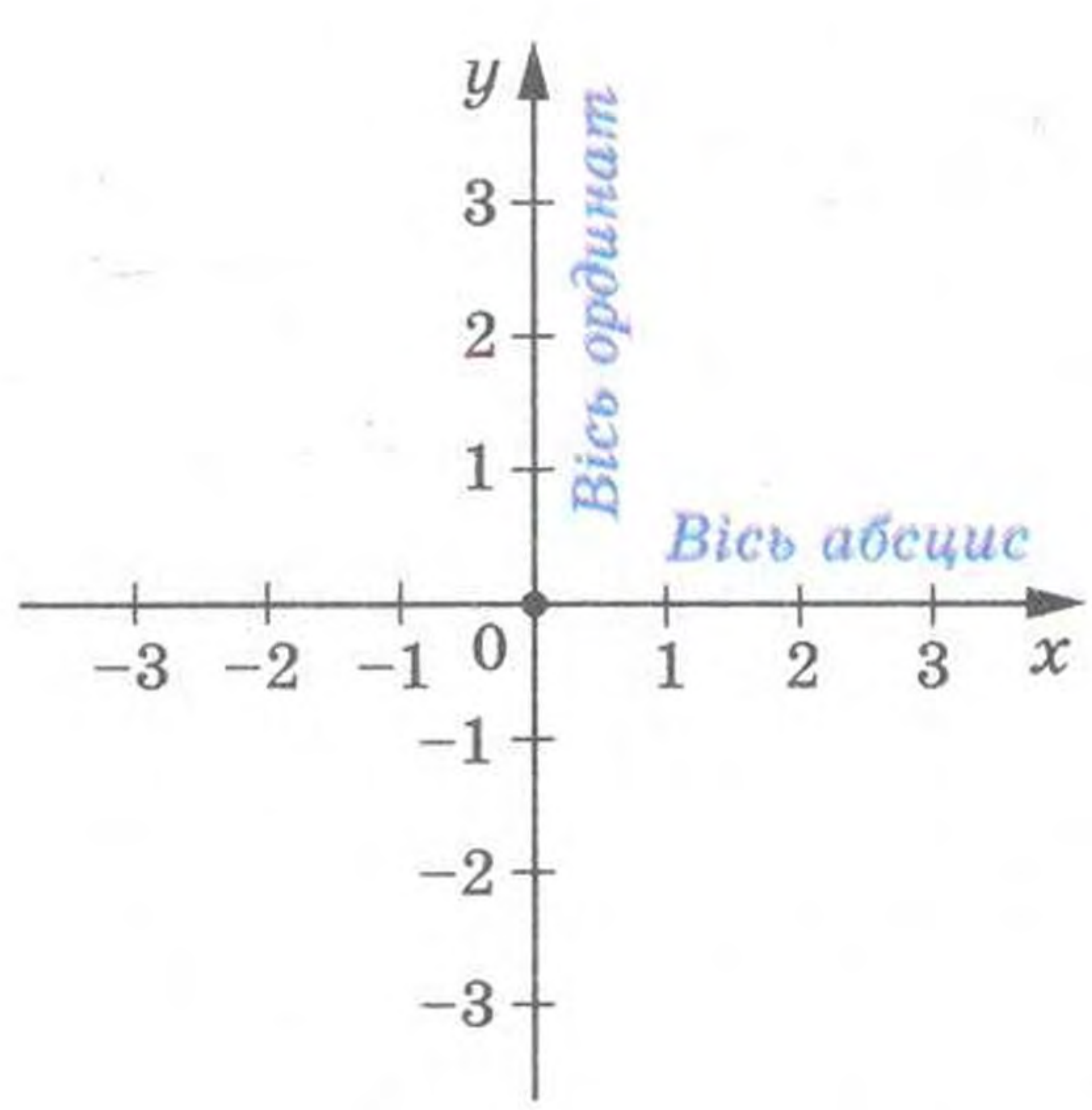


Рис. 9.1

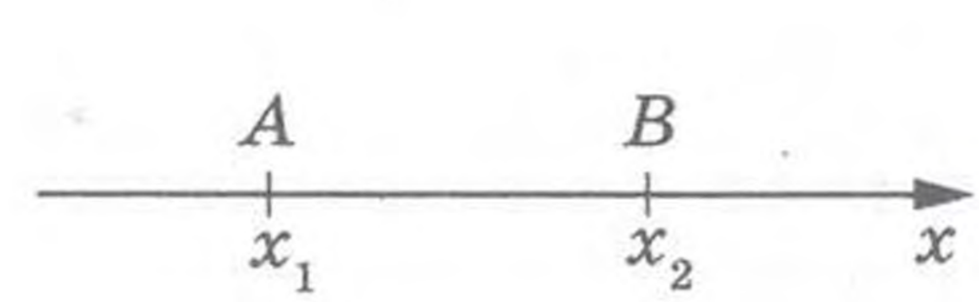


Рис. 9.2

Навчимося знаходити відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, заданими на площині xy.

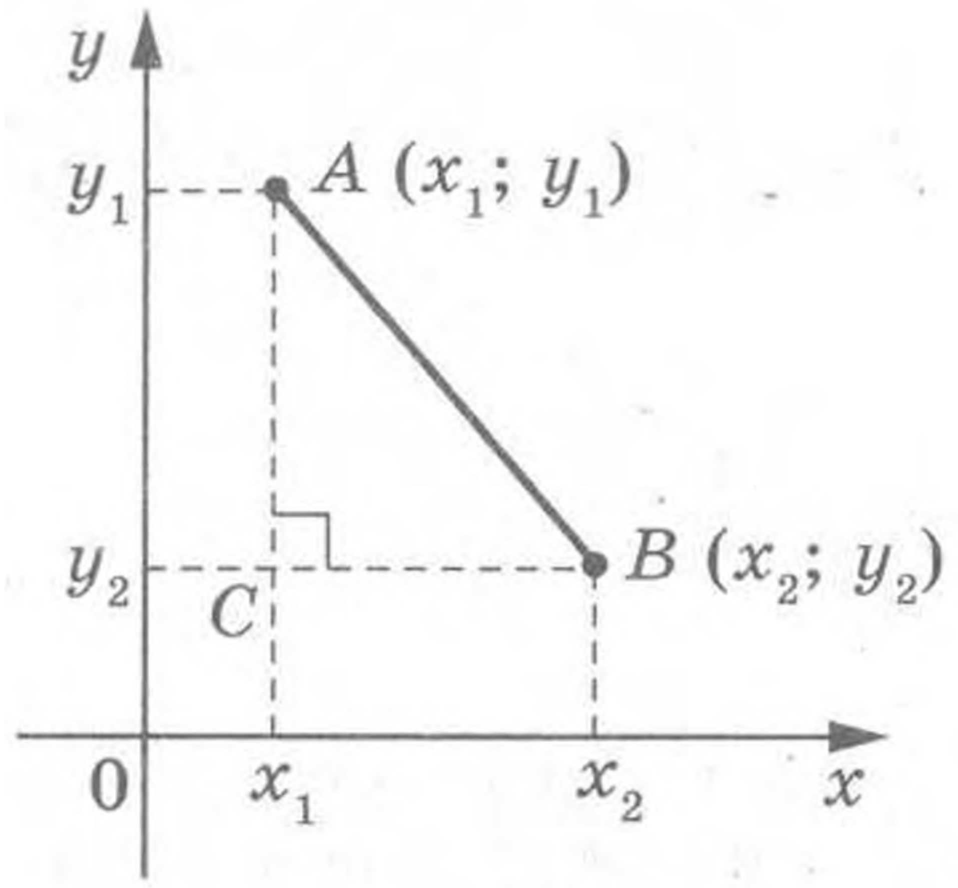


Рис. 9.3

Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 9.3).

Через точки A і B проведемо прямі, перпендикулярні до координатних осей. Отримаємо прямокутний трикутник ACB. Очевидно, що $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Звідси $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Тоді формулу відстані між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ можна записати так:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Доведіть самостійно, що ця формула залишається правильною і для випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат.

Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то природно вважати, що $AB = 0$. Цей самий результат дає і отримана формула.

Теорема 9.1. ***Якщо точка $M(x_0; y_0)$ поділяє відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координати цієї точки можна обчислити за формулами***

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},} \qquad (*)$$

де $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ — координати відповідно точок A і B.

Доведення. Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 9.4). Вважатимемо, що $x_2 > x_1$ (випадок, коли $x_2 < x_1$, розглядається аналогічно). Через точки A, M і B проведемо прямі, перпендикулярні до осі абсцис, які перетнуть цю вісь відповідно в точках A_1, M_1 і B_1. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \lambda$, тобто $|x_0 - x_1| = \lambda |x_2 - x_0|$. Оскільки $x_2 > x_0 > x_1$, то можемо записати: $x_0 - x_1 =$

$= \lambda (x_2 - x_0)$. Звідси $x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$.

Аналогічно можна показати, що $y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Формули для знаходження координат точки M правильні і у випадку, коли відрізок AB є перпендикулярним до однієї з осей координат (доведіть це самостійно). ▲

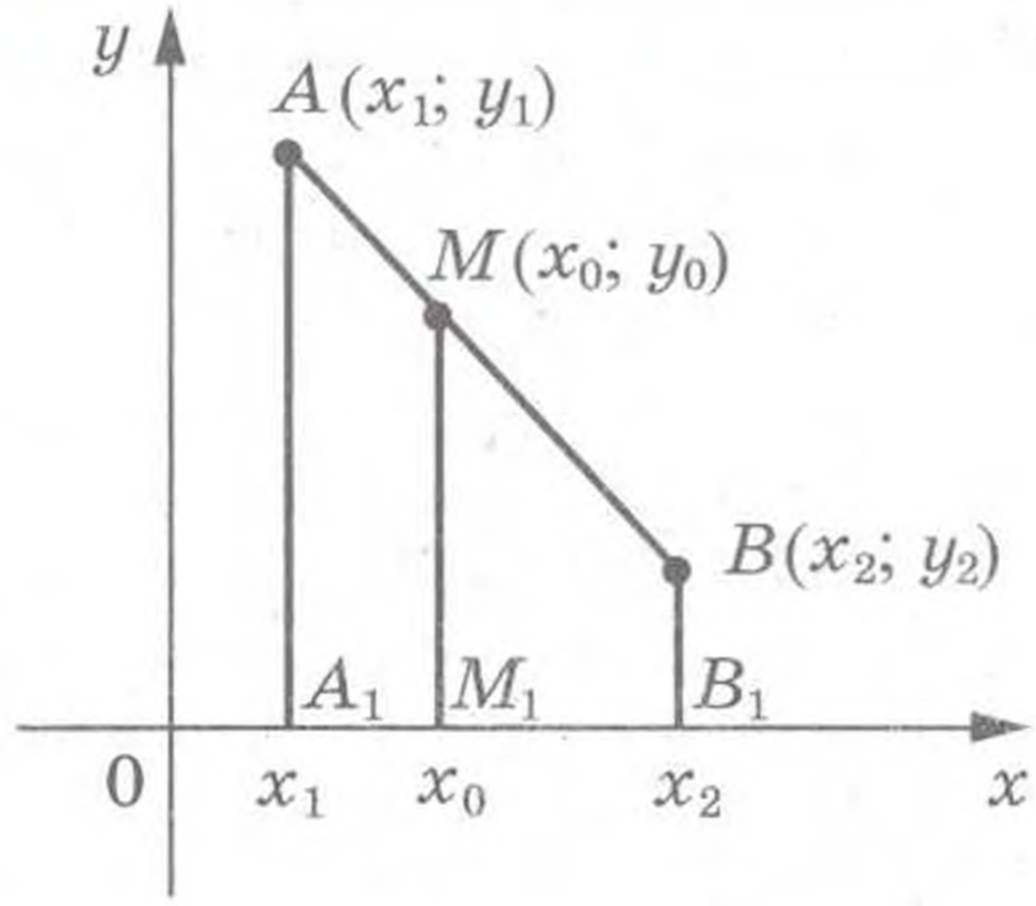


Рис. 9.4

Якщо точка M є серединою відрізка AB, то $\lambda = \dfrac{AM}{MB} = 1$. Для цього випадку формули (*) можна записати так:

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

За цими формулами знаходять координати середини відрізка.

Приклад 1. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (2; −1), B (1; 3), C (−3; 2) і D (−2; −2) є прямокутником.

Розв'язання. Нехай точка M — середина діагоналі AC. Тоді абсциса точки M дорівнює $\dfrac{2-3}{2} = -0{,}5$, а ордината — $\dfrac{-1+2}{2} = 0{,}5$. Отже, M (−0,5; 0,5).

Нехай точка K — середина діагоналі BD. Тоді абсциса точки K дорівнює $\dfrac{1-2}{2} = -0{,}5$, а ордината — $\dfrac{3-2}{2} = 0{,}5$. Отже, K (−0,5; 0,5).

Тепер можна зробити висновок, що точки M і K збігаються. Тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ мають спільну середину. Звідси випливає, що $ABCD$ — паралелограм. Далі,

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}, \quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Отже, діагоналі паралелограма $ABCD$ рівні. Звідси випливає, що цей паралелограм є прямокутником.

Приклад 2. Дано прямокутник $ABCD$. Знайдіть усі точки X, для яких виконується рівність $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

Розв'язання. Введемо на площині систему координат так, щоб початок координат збігався з точкою A, а точки B і D належали осям координат (рис. 9.5).

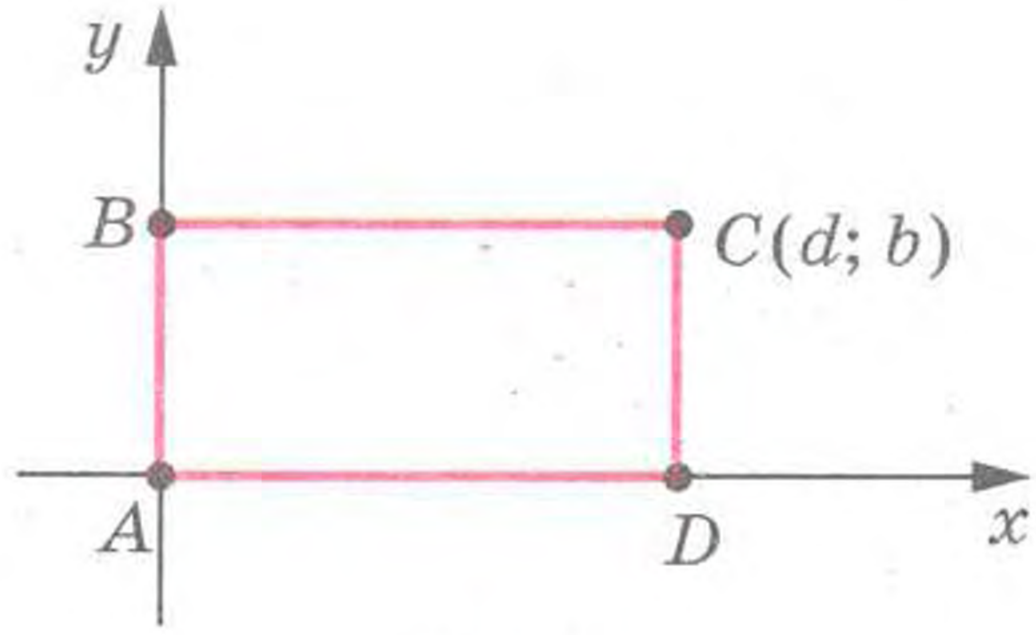


Рис. 9.5

Нехай координати точки B дорівнюють $(0; b)$, а координати точки D — $(d; 0)$. Тоді точка C має координати $(d; b)$.

Нехай $X(x; y)$ — довільна точка координатної площини. Маємо: $XA^2 + XC^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (x - d)^2 + (y - b)^2$; $XB^2 + XD^2 = (x - 0)^2 + (y - b)^2 + (x - d)^2 + (y - 0)^2$. Звідси $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$. Тобто ця рівність виконується для будь-якої точки X.

Приклад 3. Доведіть нерівність

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \geqslant \sqrt{2}.$$

Розв'язання. На площині xy розглянемо точки $A\ (0;\ 1)$, $B\ (1;\ 0)$. Нехай $M\ (x;\ y)$ — довільна точка площини. Маємо: $MA=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$, $MB=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$, $AB=\sqrt{2}$. З нерівності трикутника випливає, що $MA + MB \geqslant AB$.

Приклад 4. На папері в клітинку зображено опуклий n-кутник так, що всі його вершини розміщено у вузлах сітки і жодний інший вузол сітки не належить цьому n-кутнику. Доведіть, що $n = 3$ або $n = 4$.

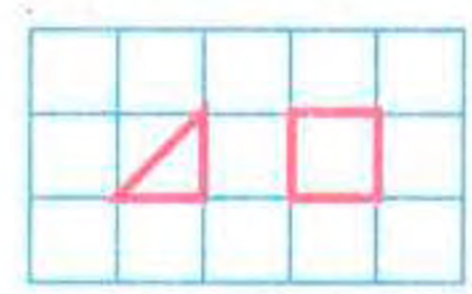


Рис. 9.6

Розв'язання. На рисунку 9.6 зображено трикутник і чотирикутник, які мають потрібну властивість. Отже, ми показали, що для $n = 3$ і $n = 4$ такі n-кутники існують.

Для будь-якої точки $A\ (x;\ y)$, де $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, має місце один з 4 випадків: 1) x — парне, y — парне; 2) x — непарне, y — парне; 3) x — парне, y — непарне; 4) x — непарне, y — непарне.

Введемо систему координат так, щоб усі вузли сітки мали цілі координати.

Припустимо, що $n \geqslant 5$. Тоді серед вершин n-кутника знайдуться такі дві, що їх відповідні координати мають однакову парність. Середина відрізка з кінцями в цих вершинах належить n-кутнику і має цілі координати. Отримали суперечність.

ВПРАВИ

9.1.° Вершинами трикутника є точки A (–1; 3), B (5; 9), C (6; 2). Доведіть, що Δ ABC — рівнобедрений.

9.2.° Доведіть, що точка M (0; –1) є центром кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо A (6; –9), B (–6; 7), C (8; 5).

9.3.° Доведіть, що кути B і C трикутника ABC рівні, якщо A (5; –7), B (–3; 8), C (–10; –15).

9.4.° Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо:

1) A (3; –4), C (2; 1); 2) A (–1; 1), C (0,5; –1).

9.5.° Точка K — середина відрізка AD. Заповніть таблицю:

Точка	Координати точки		
A	(–3; 1)	(–8; 2)	
D	(–1; –3)		(–9; 2)
K		(– 4; 6)	(1; 2)

9.6.° Відомо, що точка C належить відрізку AB, причому $AC : CB = 2 : 3$. Знайдіть координати точки C, якщо $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, B (2; 6).

9.7.° Точка M ділить відрізок AB у відношенні 2 : 1. Знайдіть координати точки M, якщо A (–3; 6), B (3; –9).

9.8.° Знайдіть довжину медіани BM трикутника, вершинами якого є точки A (3; –2), B (2; 3) і C (7; 4).

9.9.° Дано точки A (–2; 4) і B (2; –8). Знайдіть відстань від початку координат до середини відрізка AB.

9.10.° Доведіть, що трикутник з вершинами в точках A (2; 7), B (–1; 4), C (1; 2) є прямокутним.

9.11.° Точки A (–1; 2) і B (7; 4) є вершинами прямокутного трикутника. Чи може третя вершина трикутника мати координати: 1) (7; 2); 2) (2; –3)?

9.12.° Чи лежать на одній прямій точки:

1) A (–2; –7), B (–1; –4) і C (5; 14);

2) D (–1; 3), E (2; 13) і F (5; 21)?

У разі позитивної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

9.13.° Доведіть, що точки M (−4; 5), N (−10; 7) і K (8; 1) лежать на одній прямій, та вкажіть, яка з них лежить між двома іншими.

9.14.° При якому значенні x відстань між точками C (3; 2) і D (x; −1) дорівнює 5?

9.15.° На осі абсцис знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок A (−1; −1) і B (2; 4).

9.16.° Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок D (−2; −3) і E (4; 1).

9.17.° Точка C (3; −0,5) поділяє відрізок AB у відношенні 1 : 3, рахуючи від точки A (5; −3). Знайдіть координати точки B.

9.18.° Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, A (−5; 1), B (−4; 4), C (−1; 5). Знайдіть координати вершини D.

9.19.° Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, A (−2; −2), C (4; 1), D (−1; 1). Знайдіть координати вершини B.

9.20.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 8), B (3; −3), C (6; 2) і D (1; 13) є паралелограмом.

9.21.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−3; −2), B (−1; 2), C (1; −2) і D (−1; −6) є ромбом.

9.22.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 6), B (−8; −2), C (0; −8) і D (6; 0) є квадратом.

9.23.° Точки D (1; 4) і E (2; 2) — середини сторін AC і BC трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин A і C, якщо B (−3; −1).

9.24.° Знайдіть довжину відрізка, кінці якого належать осям координат, а серединою є точка M(−3; 8).

9.25.° Точки A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$, C $(x_3; y_3)$, D $(x_4; y_4)$ є вершинами чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом тоді і тільки тоді, коли $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ і $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

9.26.• Знайдіть координати вершини C рівностороннього трикутника ABC, якщо A (2; −3) і B (−2; 3).

9.27.• Знайдіть координати вершини E рівностороннього трикутника DEF, якщо D (−6; 0) і F (2; 0).

9.28.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, A (5; 9), C (1; −3), модулі координат точки B рівні. Знайдіть координати точки B.

9.29.• Знайдіть координати всіх точок C осі абсцис таких, що $\Delta\, ABC$ — рівнобедрений, якщо A (1; 1), B (2; 3).

9.30.• Знайдіть координати всіх точок B осі ординат таких, що $\Delta\, ABC$ — прямокутний, якщо A (1; 3), C (3; 7).

9.31.° Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки A (3; 6).

9.32.° Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки B (−4; 2).

9.33.° Точки A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), C (x_3; y_3) є вершинами трикутника ABC. Доведіть, що точка перетину медіан цього трикутника має координати $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

9.34.° Точки A (1; 2), B (2; 5), C (7; 0) є вершинами трикутника ABC. Знайдіть довжину бісектриси AA_1 цього трикутника.

9.35.° Бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині B перетинає пряму AC у точці D. Знайдіть довжину відрізка BD, якщо A (1; −5), B (0; −2), C (3; 7).

9.36.° Опишіть, як, знаючи координати вершин трикутника, знайти координати центра його вписаного кола.

9.37.° Точки A (1; 1), B (3; 4), C (6; 4), D (7; 1) є вершинами трапеції $ABCD$. Знайдіть координати точки перетину діагоналей трапеції.

9.38.°° На папері в клітинку зображено 10-кутник так, що всі його вершини розміщено у вузлах сітки. Доведіть, що в цьому многокутнику існує щонайменше дві діагоналі, кожна з яких містить вузол сітки, відмінний від вершини.

9.39.* На папері в клітинку виділено квадрат сітки, у якому позначено три вершини (рис. 9.7). Дозволяється позначати нові точки за таким правилом: якщо A і B — вже позначені точки, то нову точку X можна позначити так, щоб точка B була серединою відрізка AX або точка A була серединою відрізка BX (рис. 9.8). Чи можна за допомогою цього правила позначити і четверту вершину виділеного квадрата?

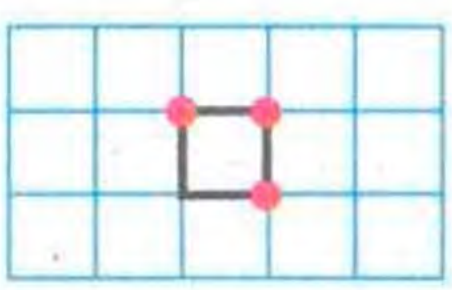


Рис. 9.7

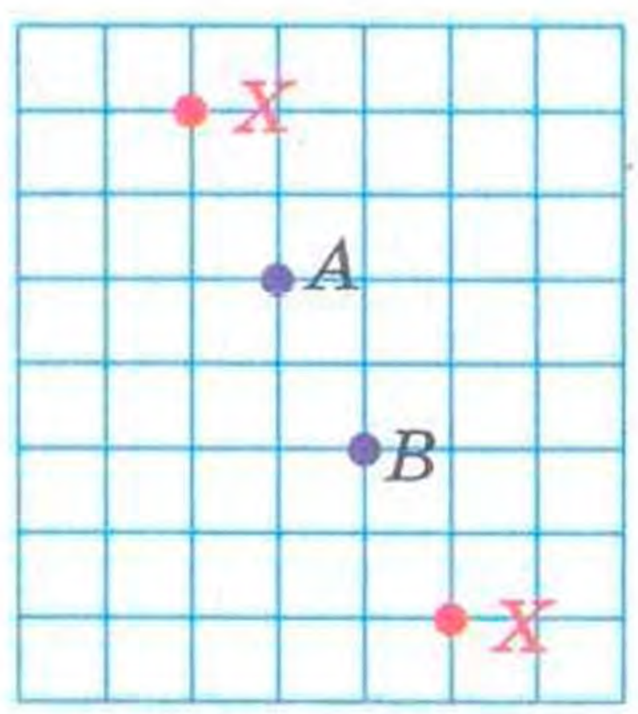


Рис. 9.8

10. Рівняння фігури

Координати $(x; y)$ кожної точки параболи, зображеної на рисунку 10.1, є розв'язком рівняння $y = x^2$. І навпаки, кожний розв'язок рівняння з двома змінними $y = x^2$ є координатами точки, яка лежить на цій параболі. У цьому разі говорять, що рівняння параболи, зображеної на рисунку 10.1, має вигляд $y = x^2$.

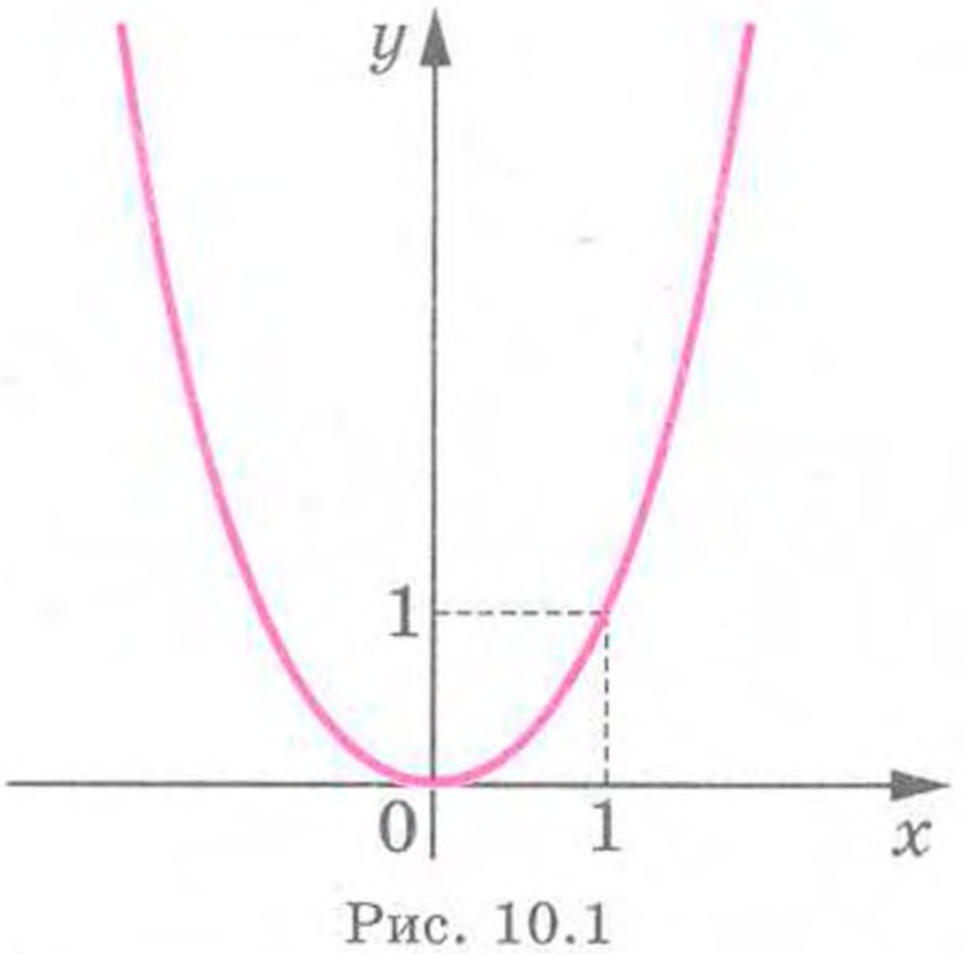


Рис. 10.1

Узагалі, **рівнянням фігури F, заданої на площині xy, називають рівняння з двома змінними x і y, яке має дві властивості:**

1) якщо точка належить фігурі F, то її координати є розв'язком даного рівняння;

2) будь-який розв'язок $(x; y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.

Наприклад, рівняння прямої, зображеної на рисунку 10.2, має вигляд $y = 2x - 1$, а рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 10.3, — $y = \frac{1}{x}$. Також прийнято говорити, що, наприклад, рівняння $y = 2x - 1$ і $y = \frac{1}{x}$ **задають** пряму і гіперболу відповідно.

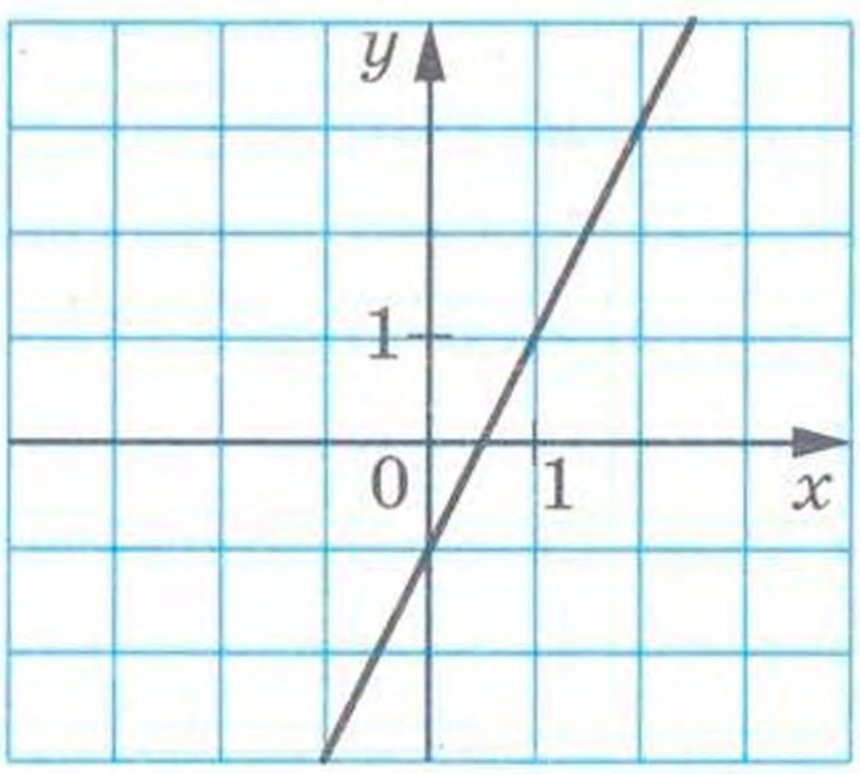


Рис. 10.2

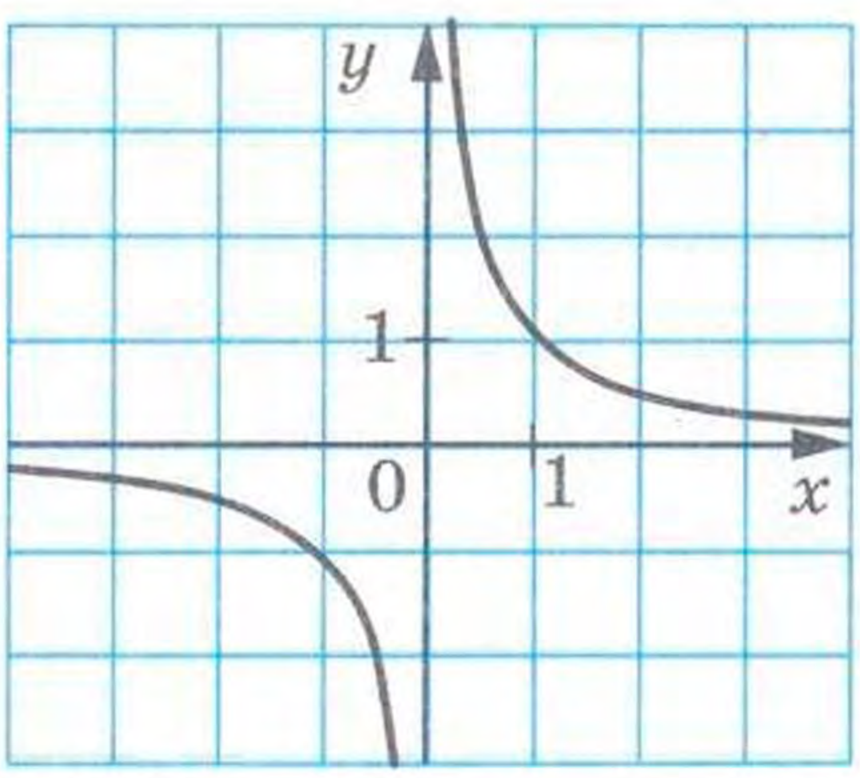


Рис. 10.3

Якщо дане рівняння є рівнянням фігури F, то цю фігуру можна розглядати як геометричне місце точок (ГМТ), координати яких задовольняють дане рівняння.

Користуючись цими міркуваннями, виведемо рівняння кола з центром у точці $A\ (a; b)$ і радіусом R.

Нехай M $(x; y)$ — довільна точка даного кола (рис. 10.4). Тоді $AM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$. Звідси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (*)$$

Ми показали, що координати $(x; y)$ довільної точки M кола є розв'язком рівняння (*). Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R > 0$, є координатами точки, яка належить даному колу.

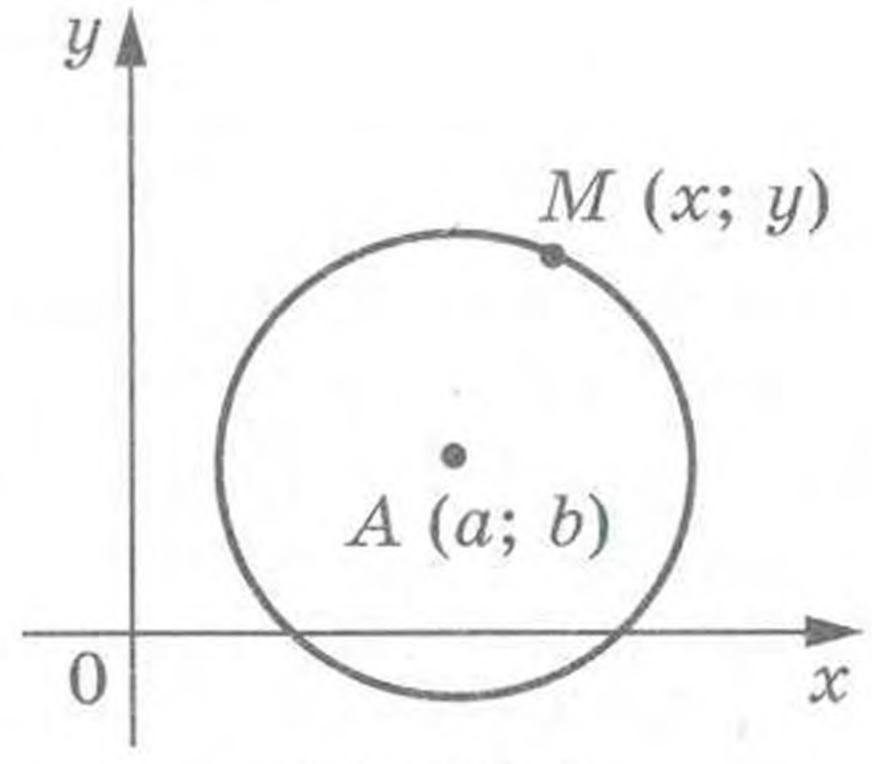


Рис. 10.4

Нехай пара $(x_1; y_1)$ — довільний розв'язок указаного рівняння. Маємо: $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$. Звідси

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2} = R.$$

Ця рівність показує, що точка N $(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола A $(a; b)$ на відстань, що дорівнює радіусу кола, а отже, точка N $(x_1; y_1)$ належить даному колу.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 10.1. ***Рівняння***

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,}$$

де $R > 0$, є рівнянням кола з центром у точці $A(a; b)$ і радіусом R.

Якщо центром кола є початок координат, то $a = b = 0$. Рівняння такого кола має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

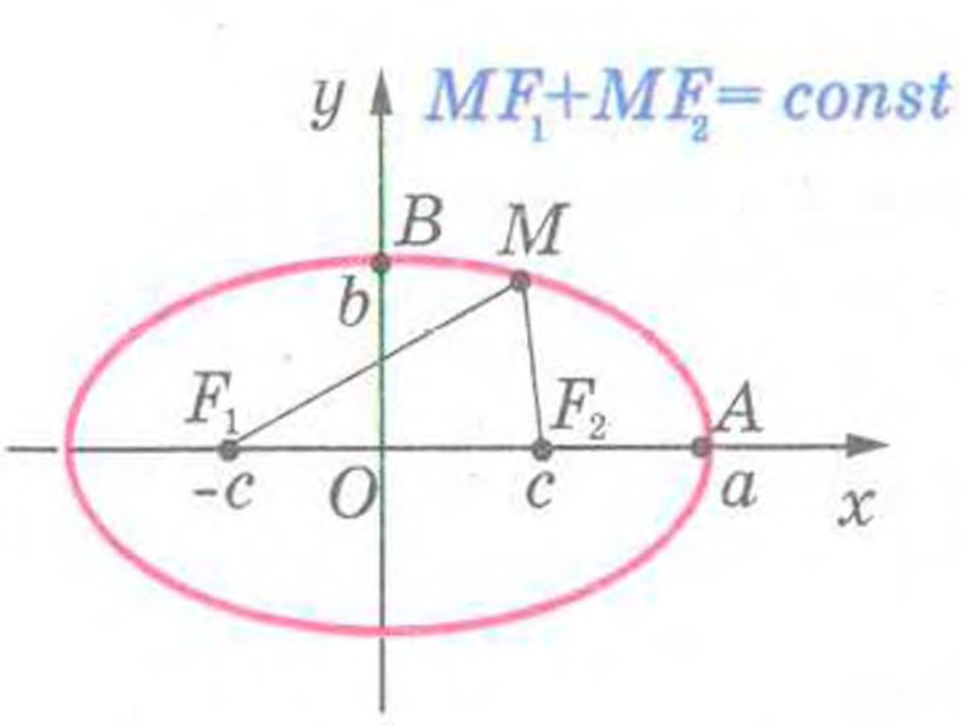


Рис. 10.5

Означення. Еліпсом називають ГМТ, сума відстаней від яких до двох заданих точок F_1 і F_2 є сталою величиною, більшою ніж F_1F_2. Точки F_1 і F_2 називають фокусами еліпса.

На рисунку 10.5 зображено еліпс, фокуси F_1 і F_2 якого мають відповідно координати $(-c; 0)$ і $(c; 0)$. Відрізки $OA = a$ і $OB = b$ називають відповідно **великою і малою півосями** еліпса.

На заняттях математичного гуртка ви можете переконатися в тому, що рівняння еліпса, зображеного на рисунку 10.5, має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,} \qquad (**)$$

де $a > b$ і $a^2 - b^2 = c^2$.

Якщо $a = b$, то рівняння (**) можна записати так: $x^2 + y^2 = a^2$. Отримали рівняння кола. У цьому разі $c = 0$ і точки F_1 і F_2 збігаються. Тому коло можна розглядати як окремий випадок еліпса, у якого фокуси збігаються.

Означення. Гіперболою називають ГМТ, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок F_1 і F_2 є сталою величиною, меншою ніж F_1F_2. Точки F_1 і F_2 називають фокусами гіперболи.

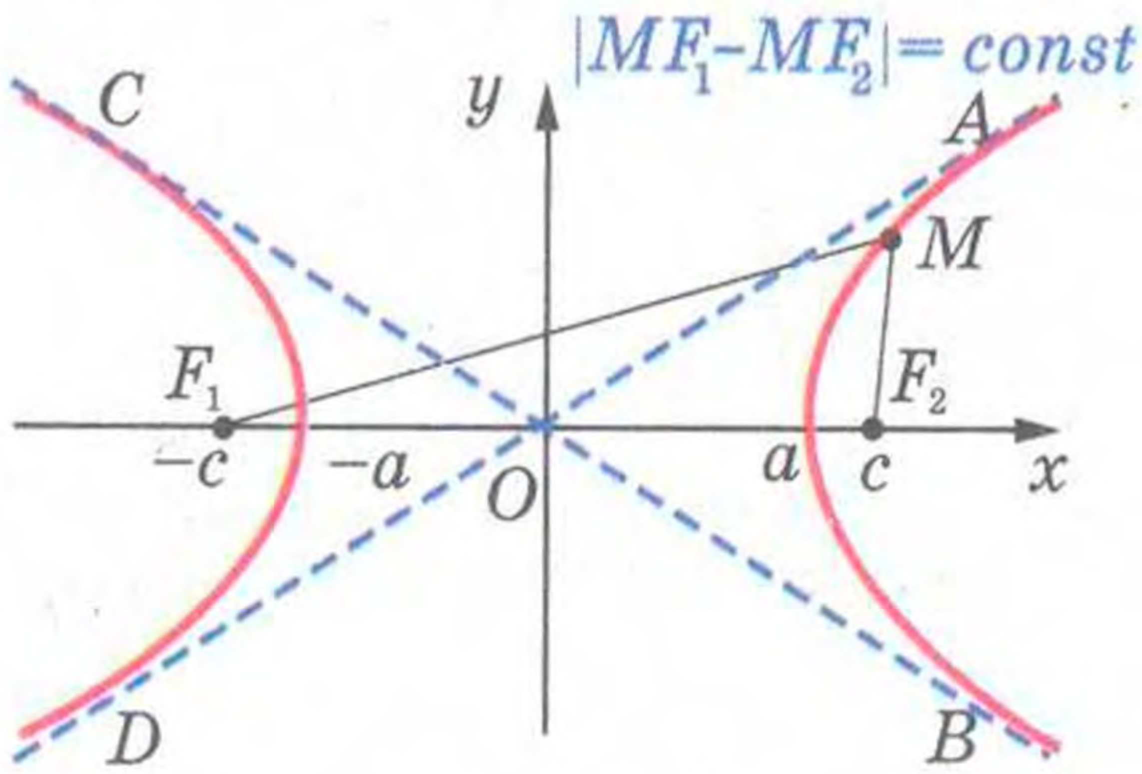


Рис. 10.6

На рисунку 10.6 зображено гіперболу, фокуси F_1 і F_2 якої мають відповідно координати $(-c; 0)$ і $(c; 0)$. Ця фігура складається з двох **віток**, які належать кутам AOB і COD.

Прямі AD і BC мають таку властивість: чим далі точка M, що належить гіперболі, розміщена від початку координат, тим меншою є відстань від неї до однієї з цих прямих, причому ця відстань може як завгодно мало відрізнятися від 0.

Прямі AD і BC називають **асимптотами** гіперболи.

Вітки гіперболи перетинають вісь абсцис у точках, рівновіддалених від початку координат. Нехай ці точки мають координати $(-a; 0)$ і $(a; 0)$.

На заняттях математичного гуртка ви можете переконатися в тому, що рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 10.6, має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Зрозуміло, що, змінивши положення фігури на координатній площині, ми тим самим змінимо її рівняння.

Розглянемо гіперболу з перпендикулярними асимптотами. Розмістимо її так, щоб осі координат збігалися з асимптотами (рис. 10.7). Можна показати, що в цьому разі рівняння гіперболи має вигляд $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Це рівняння добре вам знайоме з курсу алгебри.

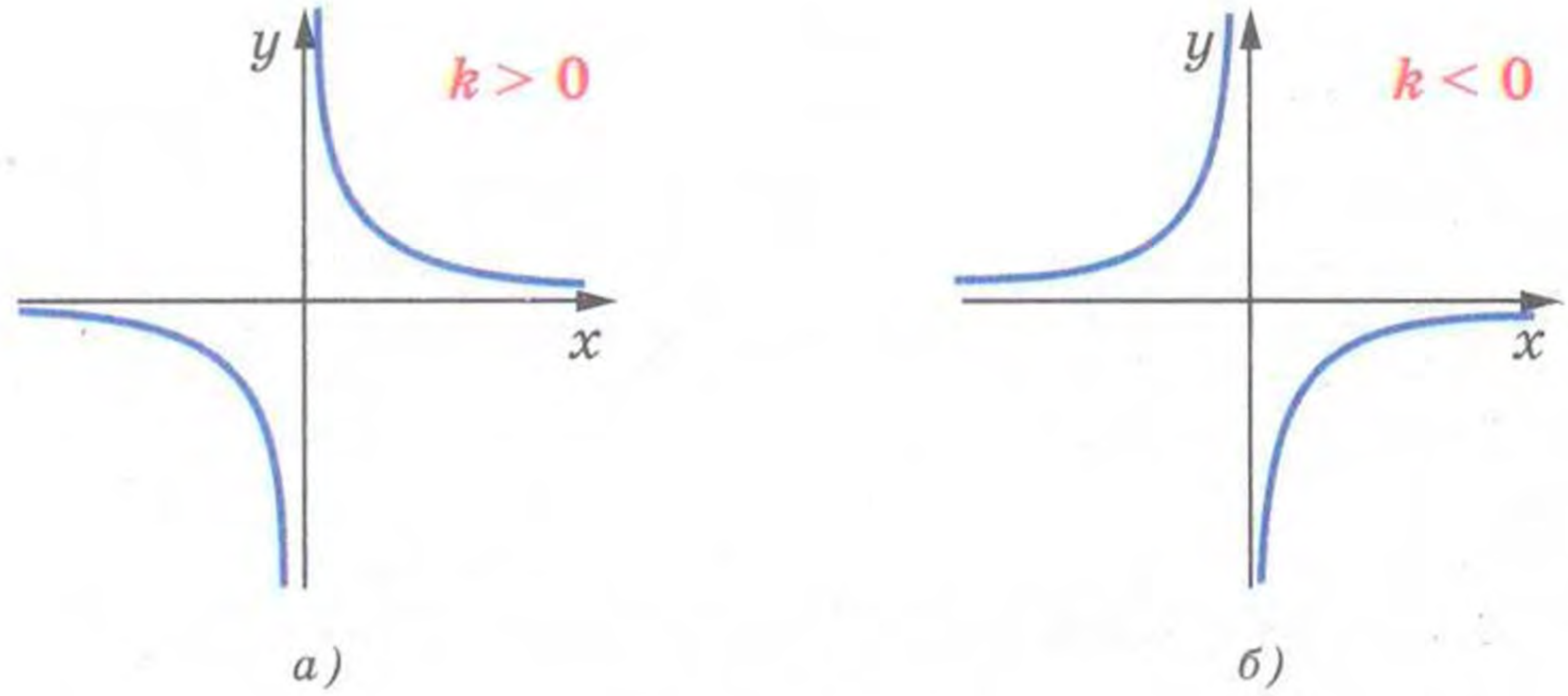


Рис. 10.7

Приклад 1. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо A (–5; 9), B (7; –3).

Розв'язання. Оскільки центр кола є серединою діаметра, то можемо знайти координати $(a; b)$ центра C кола:

$$a=\frac{-5+7}{2}=1, \quad b=\frac{9-3}{2}=3.$$

Отже, C (1; 3).

Радіус кола $R = AC$. Тоді $R^2 = (1 + 5)^2 + (3 - 9)^2 = 72$.

Отже, рівняння, яке потрібно було знайти, є таким:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72.$$

Приклад 2. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задає коло. Знайдіть координати центра і радіус цього кола.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$

$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8.$

Отже, дане рівняння є рівнянням кола з центром у точці (–3; 7) і радіусом $\sqrt{8}$.

Приклад 3. Доведіть, що існує коло, яке проходить через початок координат і на якому немає інших точок, обидві координати яких раціональні числа.

Розв'язання. Покажемо, що, наприклад, коло, задане рівнянням $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=4$, є шуканим.

Маємо: $x^2-2x\sqrt{2}+2+y^2-2y\sqrt{2}+2=4$;

$$x^2+y^2=2\sqrt{2}(x+y). \qquad (***)$$

Пара (0; 0) є розв'язком цього рівняння.

Якщо $x \in Q$ і $y \in Q$, то числа x^2+y^2 і $x+y$ — також раціональні. Разом з цим, ураховуючи, що число $\sqrt{2}$ — ірраціональне, отримуємо, що рівність (***) можлива лише при $x = y = 0$. Отже, рівняння (***) має тільки один розв'язок $(x; y)$ такий, що $x \in Q$ і $y \in Q$.

ВПРАВИ

10.1.° Визначте за рівнянням кола координати його центра і радіус:

1) $(x-8)^2+(y-3)^2=25$;
2) $(x+5)^2+y^2=9$;
3) $x^2+y^2=7$;
4) $x^2+(y+1)^2=3$.

10.2.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра A і радіус R:

1) $A\ (3;\ 4)$, $R=4$;
2) $A\ (-2;\ 0)$, $R=1$;
3) $A\ (7;\ -6)$, $R=\sqrt{2}$;
4) $A\ (0;\ 5)$, $R=\sqrt{7}$.

10.3.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра B і радіус R:

1) $B\ (-1;\ 9)$, $R=9$;
2) $B\ (-8;\ -8)$, $R=\sqrt{3}$.

10.4.° Визначте координати центра і радіус кола, зображеного на рисунку 10.8, і запишіть рівняння цього кола.

10.5.° Радіус кола з центром у точці A дорівнює 4 (рис. 10.9). Складіть рівняння цього кола.

10.6.° Складіть рівняння кола з центром у точці $M\ (-3;\ 1)$, яке проходить через точку $K\ (-1;\ 5)$.

10.7.° Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо $A\ (2;\ -7)$, $B\ (-2;\ 3)$.

10.8.° Доведіть, що відрізок AB є діаметром кола $(x-5)^2+(y+4)^2=17$, якщо $A\ (1;\ -5)$, $B\ (9;\ -3)$.

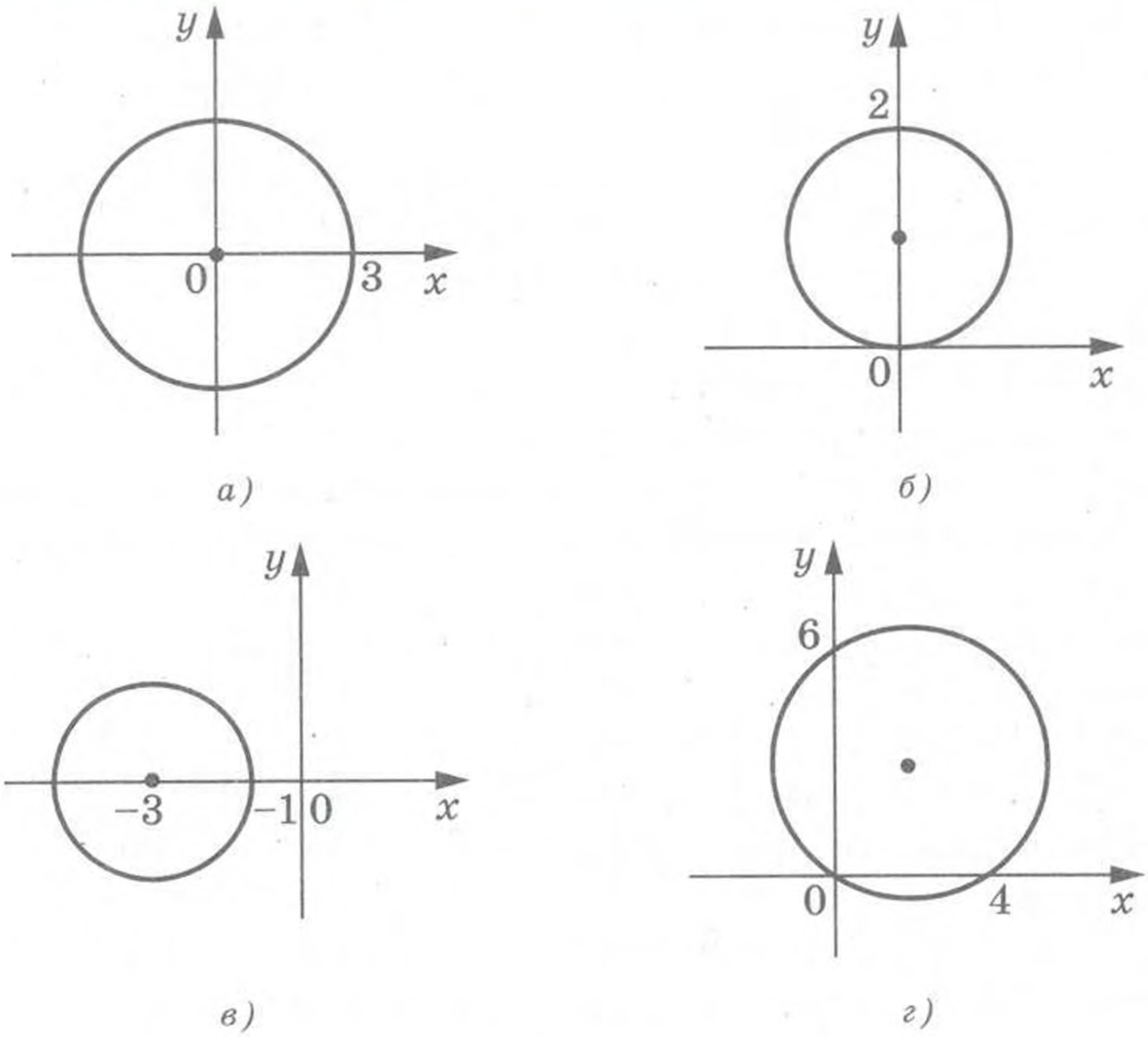


Рис. 10.8

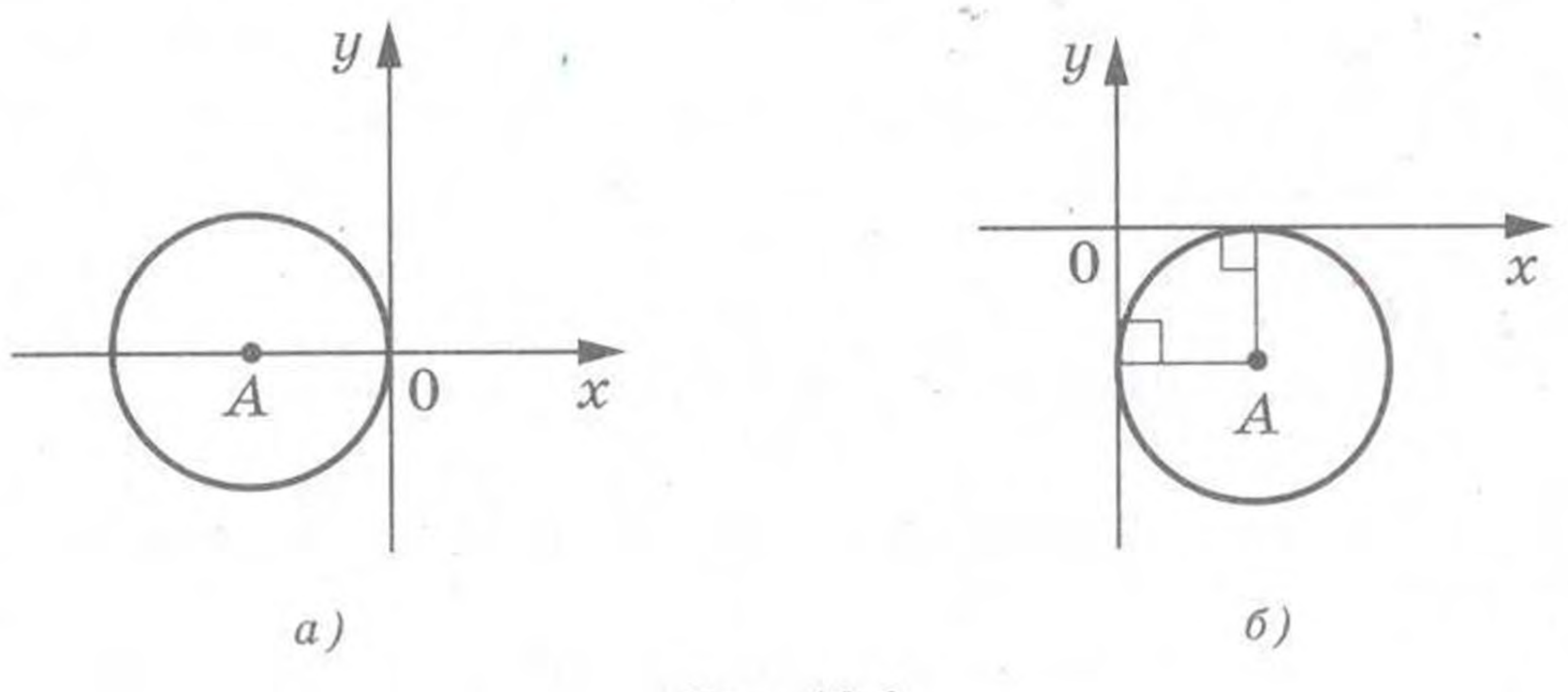


Рис. 10.9

10.9.° Доведіть, що відрізок CD є хордою кола $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, якщо $C\ (5; -3)$, $D\ (-12; 4)$.

10.10.° Складіть рівняння кола, центром якого є точка $P\ (-6; 7)$ і яке дотикається до осі ординат.

10.11.° Складіть рівняння кола, центр якого знаходиться на прямій $y = -5$ і яке дотикається до осі абсцис у точці $S\ (2; 0)$.

10.12.° Скільки існує кіл, радіуси яких дорівнюють $3\sqrt{5}$, центри належать осі ординат і які проходять через точку (3; 5)? Запишіть рівняння кожного такого кола.

10.13.° Складіть рівняння кола, центр якого належить осі абсцис і яке проходить через точки A (−4; 1) і B (8; 5).

10.14.° Доведіть, що коло $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:

1) дотикається до осі ординат;

2) перетинає вісь абсцис;

3) не має спільних точок з прямою $y = 10$.

10.15.° Установіть, чи є дане рівняння рівнянням кола. У разі позитивної відповіді вкажіть координати центра і радіус R цього кола:

1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;

2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

10.16.° Доведіть, що дане рівняння є рівнянням кола, і вкажіть координати центра та радіус R цього кола:

1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

10.17.° Знайдіть велику і малу півосі і координати фокусів еліпса $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

10.18.° Знайдіть координати фокусів гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{11} = 1$.

10.19.° Яку фігуру задає рівняння:

1) $2x - 3y = 5$; 2) $x^2 + 2y^2 = 2$; 3) $x^2 - y^2 = 1$?

10.20.° Яку фігуру задає рівняння:

1) $y = 2x^2 - x + 2$; 2) $x^2 + y^2 = 5$; 3) $x^2 - y^2 = 2$?

10.21.° Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 9$ і $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 21$.

10.22.° Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 20x - 4y = -68$ і $x^2 + y^2 + 4x + 6y = -9$.

10.23.• Доведіть, що трикутник з вершинами в точках A (−1; −2), B (−1; 2), C (5; 2) є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо цього трикутника.

10.24.• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює 5 і яке проходить через точки C (−1; 5) і D (6; 4).

10.25.• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює $\sqrt{10}$ і яке проходить через точки M (−2; 1) і K (−4; −1).

10.26.$^{\bullet}$ Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $y = -4$.

10.27.$^{\bullet}$ Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $x = 2$.

10.28.$^{\bullet}$ Складіть рівняння кола, яке проходить через точки:

1) A (–3; 7), B (–8, 2), C (–6, –2);

2) M (–1; 10), N (12; –3), K (4; 9).

10.29.$^{\bullet}$ Дослідіть взаємне розміщення двох кіл:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ і $x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ і $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 52 = 0$;

3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 28 = 0$;

4) $x^2 + y^2 = 81$ і $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$.

10.30.$^{\bullet\bullet}$ Дано коло $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Знайдіть рівняння кола з центром O_1 (4; –3), яке дотикається до даного кола.

10.31.$^{\bullet\bullet}$ Дано коло $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$. Знайдіть рівняння кола з центром O_1 (3; –1), яке дотикається до даного кола.

10.32.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть рівняння геометричного місця центрів кіл радіуса 1, які дотикаються до кола $x^2 + y^2 = 9$.

10.33.$^{\bullet\bullet}$ Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A (1; 0) і O (0; 0) і дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$.

10.34.$^{\bullet\bullet}$ На колі $x^2 + y^2 = 25$ позначено точку A (3; 4). Знайдіть координати вершин квадрата $ABCD$, вписаного в це коло.

10.35.$^{\bullet\bullet}$ На колі $x^2 + y^2 = 12$ позначено точку $A\left(0; 2\sqrt{3}\right)$. Знайдіть координати вершин рівностороннього трикутника ABC, вписаного в це коло.

10.36.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $XA^2 + XB^2 = a$, де A (1; –1), B (3; –5), a — деяке число.

10.37.* Параболи $y = x^2 - 11$ і $x = y^2 - 12$ перетинаються в чотирьох точках. Доведіть, що ці точки лежать на одному колі.

11. Загальне рівняння прямої

У попередньому пункті, розглядаючи коло як ГМТ, рівновіддалених від даної точки, ми вивели його рівняння. Для того, щоб вивести рівняння прямої, розглянемо її як ГМТ, рівновіддалених від двох точок.

Нехай a — задана пряма. Оберемо дві точки $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ такі, щоб пряма a була серединним перпендикуляром відрізка AB (рис. 11.1).

Точка $M\ (x;\ y)$ координатної площини належить прямій a тоді і тільки тоді, коли $MA = MB$, тобто

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Отже, рівняння (*) є рівнянням даної прямої a.

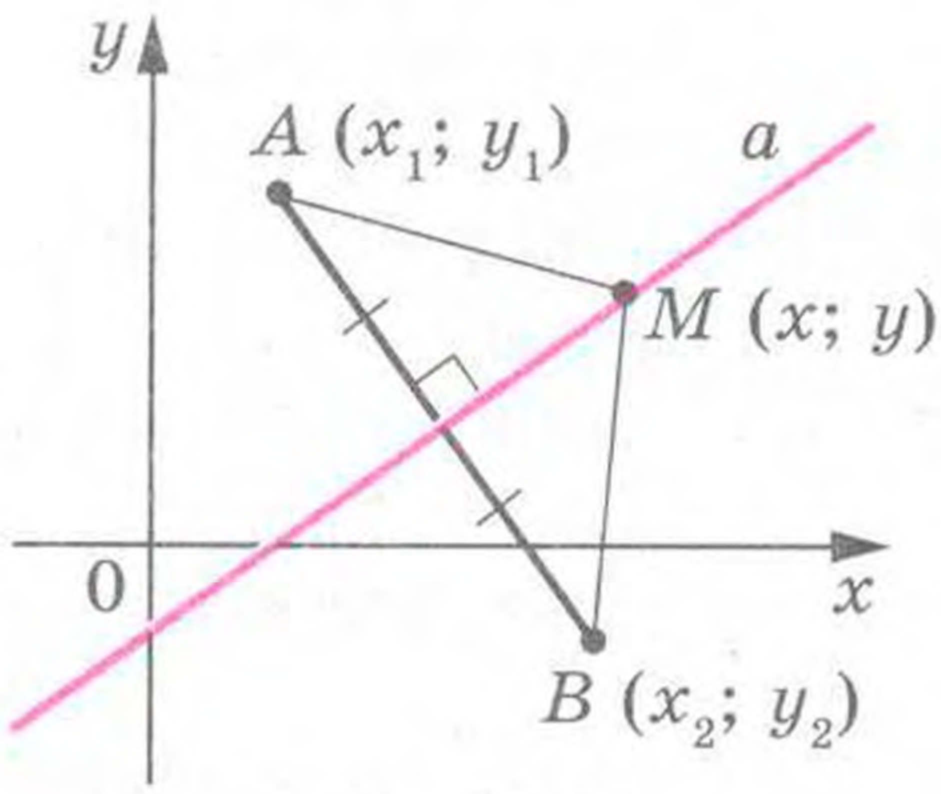


Рис. 11.1

Проте з курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння прямої має набагато простіший вигляд, а саме: $ax + by = c$, де a, b, c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно. Покажемо, що рівняння (*) можна звести до такого вигляду.

Маємо: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. Піднесемо всі двочлени до квадрата і зведемо подібні доданки. Отримаємо:

$$2\ (x_2 - x_1)\ x + 2\ (y_2 - y_1)\ y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Позначивши $2\ (x_2 - x_1) = a$, $2\ (y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, отримаємо рівняння $ax + by = c$.

Оскільки точки $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ є різними, то хоча б одна з різниць $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ не дорівнює нулю. Отже, числа a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 11.1. ***Рівняння прямої має вигляд***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Справедливим є і таке твердження: *будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.*

Зауваження. Якщо $a = b = c = 0$, то графіком рівняння $ax + by = c$ є вся площина xy. Якщо $a = b = 0$ і $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків.

З курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння виду $ax + by = c$ називають лінійним рівнянням з двома змінними. Схема, зображена на рисунку 11.2, ілюструє вищезазначене.

Рис. 11.2

Також на уроках алгебри в 7 класі ми прийняли без доведення той факт, що графіком лінійної функції $y = kx + p$ є пряма. Зараз ми це можемо довести.

Справді, перепишемо рівняння $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Ми отримали рівняння виду $ax + by = c$ для випадку, коли $a = -k$, $b = 1$, $c = p$.

А чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$? Відповідь на це запитання заперечна.

Річ у тім, що пряма, перпендикулярна до осі абсцис, не може бути графіком функції. Отже, ця пряма не може мати рівняння виду $y = kx + p$.

Разом з тим, якщо в рівнянні прямої $ax + by = c$ покласти $b = 0$, то його можна переписати так: $x = \frac{c}{a}$. Ми отримали окремий вид рівняння прямої, усі точки якої мають однакові абсциси. Отже, ця пряма перпендикулярна до осі абсцис. Її називають вертикальною.

Якщо $b \neq 0$, то рівняння $ax + by = c$ задає невертикальну пряму, і це рівняння можна переписати так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{a} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$.

Отже, будь-яку невертикальну пряму можна задати рівнянням виду $y = kx + p$.

Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає невертикальну пряму.

Тому рівняння $ax + by = c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, називають **загальним рівнянням прямої.**

Дана таблиця підсумовує матеріал, розглянутий у цьому пункті.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	порожня множина

Приклад 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки: 1) A (–3; 5) і B (–3; –6); 2) C (6; 1) і D (–18; –7).

Розв'язання

1) Оскільки дані точки мають рівні абсциси, то пряма AB є вертикальною, і її рівняння має вигляд $x = -3$.

Відповідь: $x = -3$.

2) Оскільки дані точки мають різні абсциси, то пряма CD є невертикальною, і можна скористатися рівнянням прямої у вигляді $y = kx + p$. Підставивши координати точок C і D у рівняння $y = kx + p$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Відповідь: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Приклад 2. Знайдіть периметр і площу трикутника, обмеженого прямою $5x + 12y = -60$ і осями координат.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даної прямої з осями координат.

З віссю абсцис: $5x = -60$; $x = -12$.

З віссю ординат: $12y = -60$; $y = -5$.

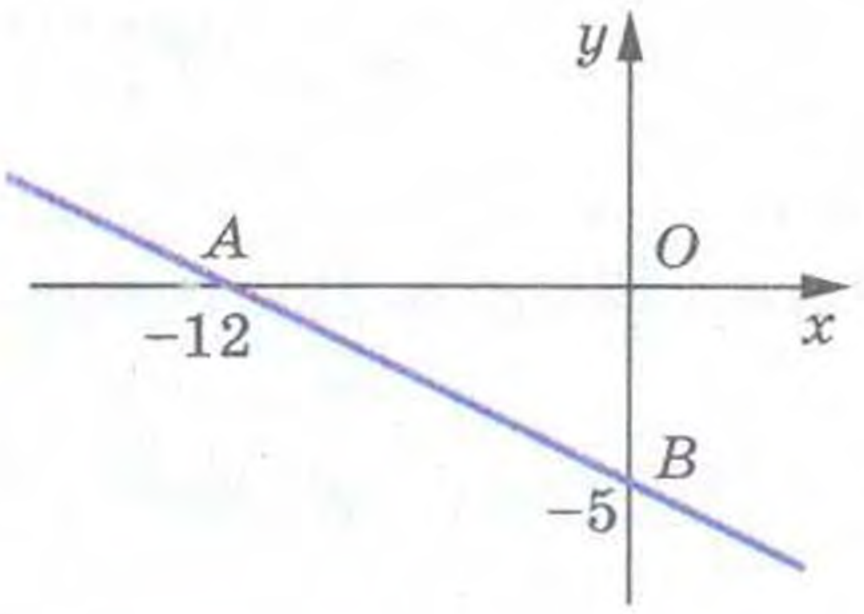


Рис. 11.3

Отже, дана пряма та осі координат обмежують прямокутний трикутник AOB (рис. 11.3) такий, що A (–12; 0), B (0; –5), O (0; 0). Тоді $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$. Шуканий периметр $P = OA + OB + AB = 30$, площа $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30$.

Відповідь: $P = 30$, $S = 30$.

ВПРАВИ

11.1.° Знайдіть координати точок перетину прямої $4x - 5y = 20$ з осями координат. Чи належить цій прямій точка: 1) A (10; 4); 2) B (6; 1); 3) C (−1,5; 5,2); 4) D (−1; 5)?

11.2.° Знайдіть координати точок перетину прямої $3x + 4y = 12$ з осями координат. Яка з точок, M (−2; 4) чи K (8; −3), належить цій прямій?

11.3.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A (6; −3) і перпендикулярна до осі x. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю x?

11.4.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B (5; −8) і перпендикулярна до осі y. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю y?

11.5.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку C (−4; 9) паралельно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.

11.6.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:
1) A (1; −3) і B (−2; −9);
2) C (3; 5) і D (3; −10);
3) E (−4; −1) і F (9; −1);
4) M (3; −3) і K (−6; 12).

11.7.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:
1) A (2; −5) і B (−3; 10);
2) C (6; −1) і D (24; 2).

11.8.° Точки A (−6; −1), B (1; 2) і C (−5; −8) — вершини трикутника ABC. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AK трикутника.

11.9.° Точки A (−3; −4), B (−2; 2), C (1; 3) і D (3; −2) — вершини трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Складіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трапеції.

11.10.° Абсциси середин бічних сторін трапеції рівні. Чи є правильним твердження, що основи трапеції перпендикулярні до осі абсцис?

11.11.° Знайдіть периметр трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x - 3y = 12$.

11.12.° Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $7y - 2x = 28$.

11.13.° Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $3x + 2y = 6$ і $y = -\frac{9}{4}x$ та віссю ординат.

11.14.° Доведіть, що коло $(x-5)^2+(y-5)^2=9$ і пряма $x+y=7$ перетинаються, та знайдіть координати їх точок перетину.

11.15.° Доведіть, що пряма $x+y=5$ є дотичною до кола $(x-3)^2+(y+2)^2=8$, і знайдіть координати точки дотику.

11.16.° Доведіть, що коло $(x-4)^2+(y-2)^2=1$ і пряма $3x+y=3$ не мають спільних точок.

11.17.• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $5x-2y=10$.

11.18.• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $x+y=-8$.

11.19.• Знайдіть довжину хорди кола $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, яка лежить на прямій $y=3x$.

11.20.• Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки A (1; −7) і B (−3; 5).

11.21.• Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки C (2; 3) і D (−5; −2).

11.22.• Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A (2; 0) та B(4; 0) і центр якого належить прямій $2x+3y=18$.

11.23.• Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, радіус яких дорівнює 5 і які відтинають на осі абсцис хорду завдовжки 6.

12. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

Розглянемо рівняння $y=kx$. Воно задає невертикальну пряму, яка проходить через початок координат.

Покажемо, що прямі $y=kx$ та $y=kx+b$, де $b\neq 0$, паралельні. Точки O (0; 0) і C (1; k) належать прямій $y=kx$, а точки A (0; b) і B (1; $k+b$) належать прямій $y=kx+b$ (рис. 12.1). Легко переконатися (зробіть це самостійно), що середини діагоналей AC і OB чотирикутника $OABC$ збігаються. Отже, $OABC$ — паралелограм. Звідси $AB \parallel OC$.

Тепер ми можемо зробити такий висновок:

якщо $k_1=k_2$ ***і*** $b_1\neq b_2$, ***то прямі*** $y=k_1x+b_1$ ***і*** $y=k_2x+b_2$ ***паралельні*** (1).

Нехай пряма $y=kx$ перетинає одиничне півколо у точці M (x_0; y_0) (рис. 12.2). Кут AOM називають **кутом між даною прямою і додатним напрямом осі абсцис**.

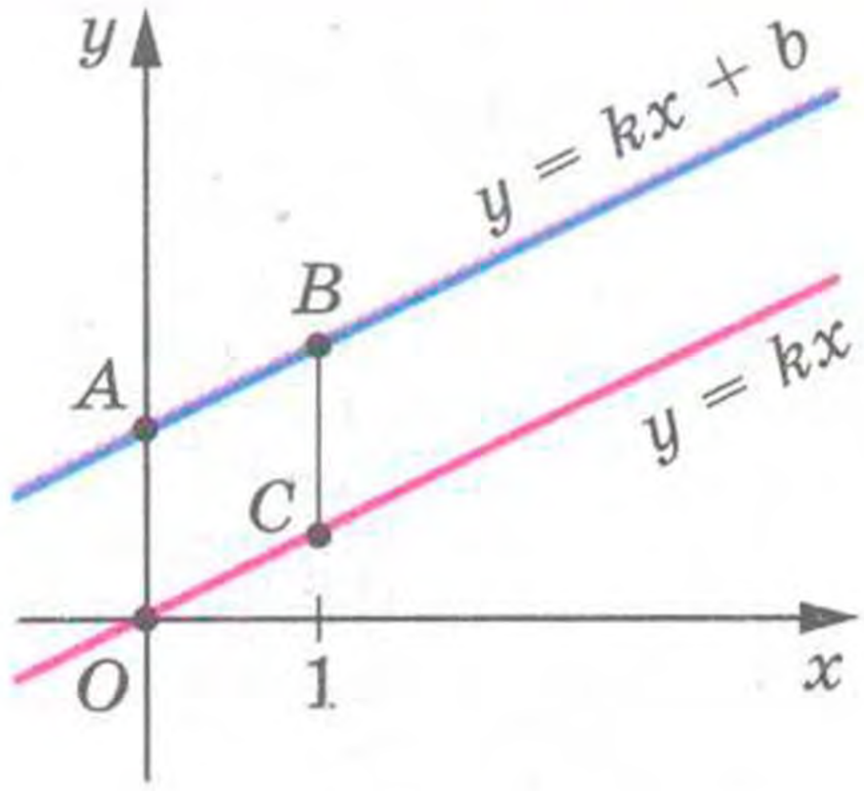


Рис. 12.1

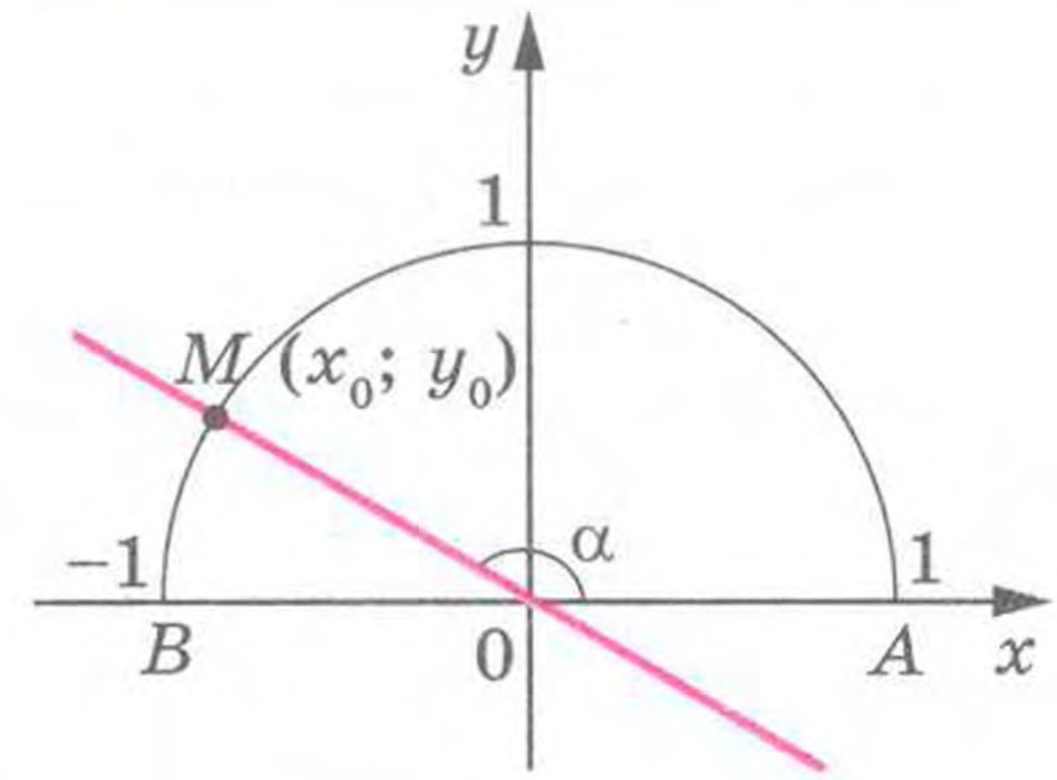


Рис. 12.2

Якщо пряма $y = kx$ збігається з віссю абсцис, то кут між цією прямою і додатним напрямом осі абсцис вважають рівним $0°$.

Якщо пряма $y = kx$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, то природно вважати, що й пряма $y = kx + b$, яка паралельна прямій $y = kx$, також утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис. 12.3).

Розглянемо пряму MO, рівняння якої має вигляд $y = kx$ (рис. 12.2). Якщо $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y_0}{x_0}$. Оскільки точка $M\ (x_0;\ y_0)$ належить прямій $y = kx$, то $\dfrac{y_0}{x_0} = k$. Звідси $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким чином, для прямої $y = kx + b$ отримуємо, що

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha,}$$

де α — кут, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис. Тому коефіцієнт k називають **кутовим коефіцієнтом** цієї прямої, а саме рівняння $y = kx + b$ називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

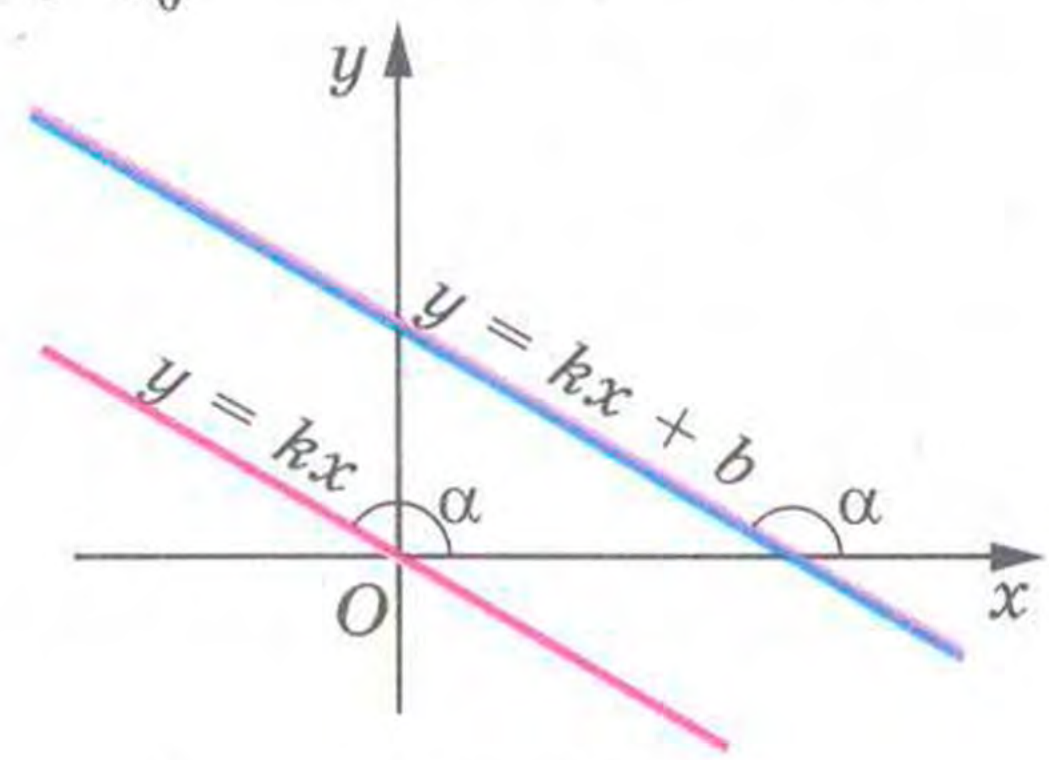


Рис. 12.3

Із вищезазначеного випливає, що коли невертикальні прямі паралельні, то вони утворюють рівні кути з додатним напрямом осі абсцис. Тоді тангенси цих кутів рівні, а отже, рівні їх кутові коефіцієнти.

Таким чином,

якщо прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні, то $k_1 = k_2$ (2).

Висновки (1) і (2) об'єднаємо в одну теорему.

Теорема 12.1. ***Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.***

У ряді випадків виникає потреба скласти рівняння прямої, знаючи координати однієї її точки і кутовий коефіцієнт прямої.

Нехай пряма $y = kx + b$ проходить через точку $M (x_0; y_0)$. Тоді $y_0 = kx_0 + b$. Звідси $b = y_0 - kx_0$. Тепер рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом можна записати так: $y = kx + y_0 - kx_0$. Звідси

$$\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$$

Отримане рівняння називають **рівнянням прямої з даним кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку** $M (x_0; y_0)$.

Пряму можна задати будь-якими двома її точками. Тому, знаючи координати двох точок прямої, можна вивести її рівняння. У попередньому пункті ви розв'язували таку задачу для деяких окремих випадків (див. № 11.6, 11.7). Розв'яжемо цю задачу у загальному вигляді.

Розглянемо дві точки $A (x_1; y_1)$ і $B (x_2; y_2)$.

Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 \neq y_2$, то пряма AB є вертикальною і її рівняння має вигляд $x = x_1$.

Якщо $y_1 = y_2$ і $x_1 \neq x_2$, то пряма AB є горизонтальною і її рівняння має вигляд $y = y_1$.

Нехай $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Запишемо рівняння прямої AB так: $y = k(x - x_1) + y_1$, де k — кутовий коефіцієнт прямої AB. Оскільки точка $B(x_2; y_2)$ належить прямій AB, то можна записати: $y_2 = k(x_2 - x_1) + y_1$. Звідси $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Підставивши знайдене значення k в рівняння $y = k(x - x_1) + y_1$, отримаємо: $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$. Звідси

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Отримане рівняння називають **рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки** $A (x_1; y_1)$, $B (x_2; y_2)$.

Теорема 12.2. ***Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $k_1k_2 = -1$.***

Доведення.

• Нехай прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні. Доведемо, що $k_1k_2 = -1$.

Нехай $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ і прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в точці C, а вісь абсцис перетинають відповідно у точках A і B (рис. 12.4).

У трикутнику ABC $\angle A + \angle B = 90°$. Тоді $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1$. Звідси $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} (180° - \alpha_2) = 1$; $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$; $k_1k_2 = -1$.

Випадок, коли прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в точці, яка належить осі абсцис, розгляньте самостійно.

• Нехай $k_1k_2 = -1$. Доведемо, що прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні.

Маємо: $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 < 0$. Тоді один з кутів α_1 або α_2 гострий, а інший тупий. Нехай, наприклад, α_1 — гострий кут, α_2 — тупий (рис. 12.4). Запишемо:

$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$;

$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} (180° - \alpha_2) = 1$;

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}(180° - \alpha_2)};$$

$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} (180° - \alpha_2)$;

$\operatorname{ctg} (90° - \alpha_1) = \operatorname{ctg} (180° - \alpha_2)$.

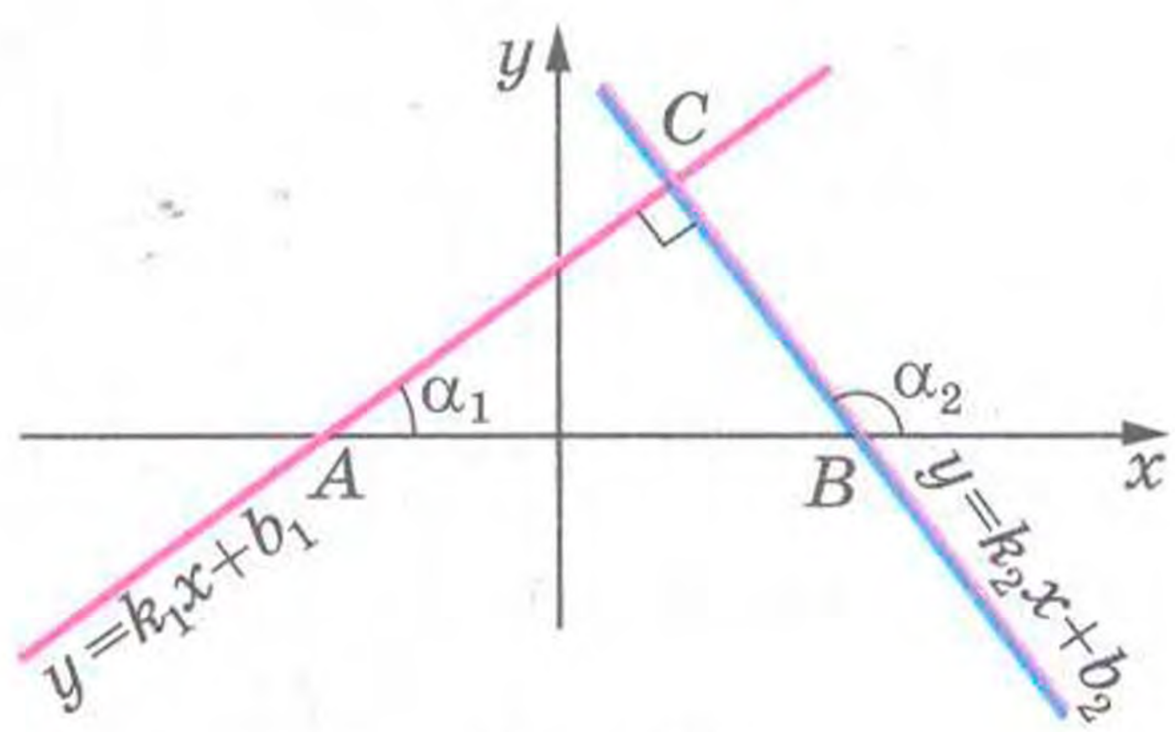


Рис. 12.4

Оскільки кути $90° - \alpha_1$ і $180° - \alpha_2$ — гострі та їх котангенси рівні, то рівні й самі кути. Отримуємо:

$90° - \alpha_1 = 180° - \alpha_2$;

$\alpha_1 + (180° - \alpha_2) = 90°$.

А це означає, що дані прямі перпендикулярні. ▲

Доведемо, що відстань ρ від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої, заданої рівнянням $ax + by + c = 0$, обчислюється за формулою

$$\boxed{\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Нехай $b \neq 0$. Тоді кутовий коефіцієнт даної прямої дорівнює $-\frac{a}{b}$.

З точки M опустимо перпендикуляр MP на дану пряму (рис. 12.5). Тоді кутовий коефіцієнт прямої MP дорівнює $\frac{b}{a}$ і її рівняння має вигляд $y=\frac{b}{a}(x-x_0)+y_0$.

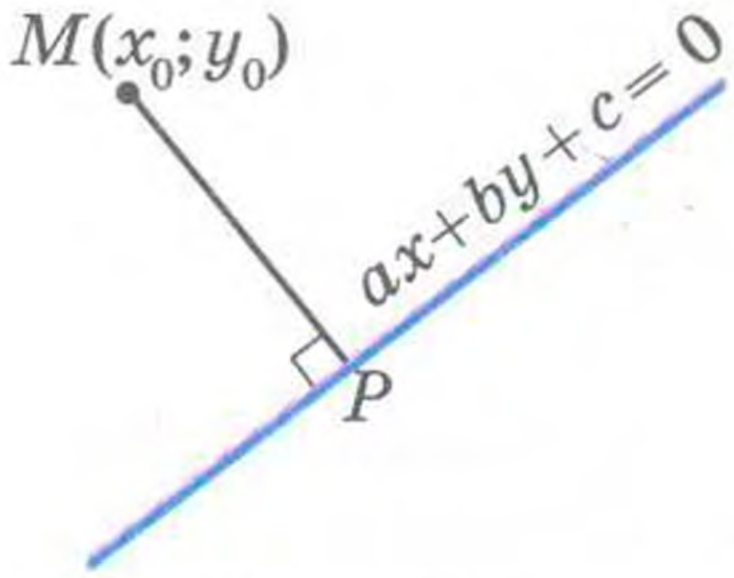


Рис. 12.5

Для того щоб знайти координати точки P, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ y=\frac{b}{a}(x-x_0)+y_0. \end{cases}$$

Перепишемо цю систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} a(x-x_0)+b(y-y_0)+ax_0+by_0+c=0, \\ y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0). \end{cases}$$

Звідси легко отримати, що

$$\begin{cases} x-x_0=-\frac{a}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c), \\ y-y_0=-\frac{b}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c). \end{cases}$$

Маємо: $MP^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$. Звідси

$$MP=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Зазначимо, що ця формула залишається справедливою при $b=0$, тобто у випадку, коли дана пряма є вертикальною.

Приклад 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-4;\ 3)$ і паралельна прямій $y=0{,}5x-4$.

Розв'язання. З теореми 12.1 випливає, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 0,5. Ця пряма проходить через точку $A\ (-4;\ 3)$. Тому, скориставшись рівнянням прямої з даним кутовим коефіцієнтом, запишемо: $y=0{,}5(x+4)+3$.

Відповідь: $y=0{,}5x+5$.

Приклад 2. Точки A (1; 1), B (4; 2), C (0; 7) є вершинами трикутника ABC. Знайдіть рівняння прямої, яка містить висоту трикутника, проведену до сторони AB.

Розв'язання. Скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, знайдемо рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-1}{2-1};\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}.$$

Звідси отримуємо, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює −3.

Скориставшись рівнянням прямої з даним кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку C, запишемо:

$y = -3(x - 0) + 7;$

$y = -3x + 7.$

Приклад 3. Знайдіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 5$, якщо відомо, що дотична паралельна прямій $y = 2x + 9$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = 2x + b$.

I спосіб. Для того щоб пряма $y = 2x + b$ була дотичною до кола $x^2 + y^2 = 5$, система

$$\begin{cases} y=2x+b, \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

повинна мати єдиний розв'язок.

Маємо: $\begin{cases} y=2x+b, \\ x^2+(2x+b)^2=5. \end{cases}$

Залишилося з'ясувати, при яких значеннях параметра b рівняння $x^2 + (2x + b)^2 = 5$ має єдиний розв'язок.

Запишемо: $5x^2 + 4bx + b^2 - 5 = 0$; $D = 16b^2 - 20b^2 + 100$; $D = 0$ при $b = 5$ або $b = -5$.

Шукані рівняння дотичних мають вигляд $y = 2x + 5$ і $y = 2x - 5$.

II спосіб. Пряма $y = 2x + b$ є дотичною до кола $x^2 + y^2 = 5$, якщо відстань від центра кола до цієї прямої дорівнює радіусу кола, тобто відстань від точки O (0; 0) до прямої $2x - y + b = 0$ дорівнює $\sqrt{5}$.

Запишемо: $\sqrt{5}=\dfrac{|2\cdot 0-0+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$. Звідси $b = 5$ або $b = -5$.

Відповідь: $y = 2x + 5$, $y = 2x - 5$.

ВПРАВИ

12.1.° Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої:

1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

12.2.° Які з прямих $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ і $y = 600 + 0{,}6x$ паралельні?

12.3.° Які з прямих $y = 3x + 2$, $y = -3x - 4$, $y = 5 - \frac{1}{3}x$, $y = \frac{2}{5}x$, $y = \frac{1}{3}x + 1$, $y = -2{,}5x + 3$ перпендикулярні?

12.4.° Яке число треба підставити замість зірочки, щоб були паралельними прямі:

1) $y = 8x - 14$ і $y = *x + 2$;
2) $y = *x - 1$ і $y = 3 - 4x$?

12.5.° Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій:

1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1{,}15x + 2$.

12.6.° Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій:

1) $y = 0{,}1x - 3$; 2) $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 1$.

12.7.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-3;\ 7)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює: 1) 4; 2) −3; 3) 0.

12.8.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B\ (2;\ -5)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює −0,5.

12.9.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M\ (-1;\ 9)$ і паралельна прямій: 1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

12.10.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $K\left(-\frac{1}{3};10\right)$ і паралельна прямій: 1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

12.11.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M\ (2;\ -1)$ і перпендикулярна до прямої: 1) $y = -0{,}2x - 3$; 2) $3x - 6y = 2$.

12.12.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-3;\ -1)$ і перпендикулярна до прямої: 1) $y = -x + \frac{1}{2}$; 2) $2x + y = -3$.

12.13.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A (2; 6) і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: 1) 60°; 2) 120°.

12.14.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B (3; −2) і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: 1) 45°; 2) 135°.

12.15.° Складіть рівняння прямої, зображеної на рисунку 12.6.

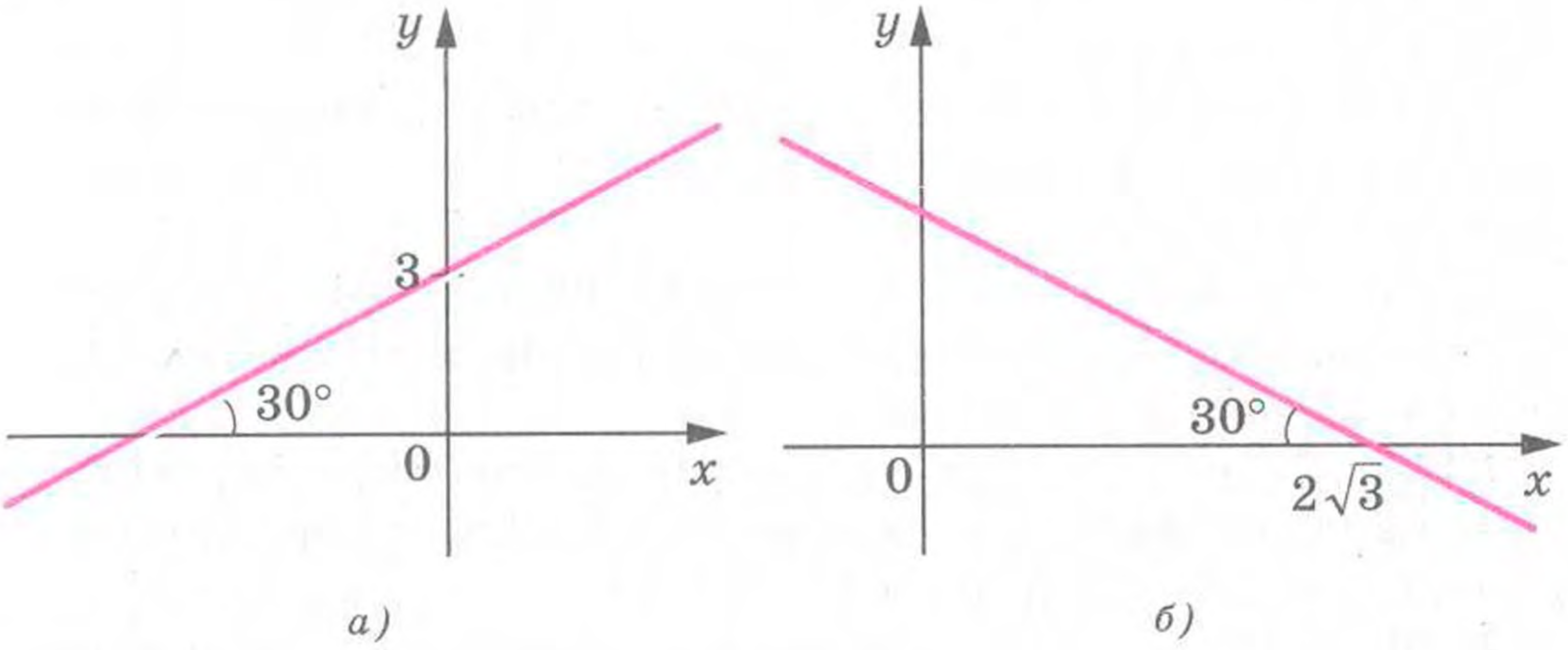


Рис. 12.6

12.16.° Складіть рівняння прямих, зображених на рисунку 12.7.

12.17.° Визначте, чи паралельні прямі:

1) $2x - 5y = 9$ і $5y - 2x = 1$;
2) $8x + 12y = 15$ і $4x + 6y = 9$;
3) $7x - 2y = 12$ і $7x - 3y = 12$;
4) $3x + 2y = 3$ і $6x + 4y = 6$.

12.18.° Доведіть, що прямі $7x - 6y = 3$ і $6y - 7x = 6$ паралельні.

12.19.° Знайдіть координати точок перетину прямої AB з осями координат, якщо:

1) A (1; 1), B (2; 3);
2) A (3; −1), B (−2; 2).

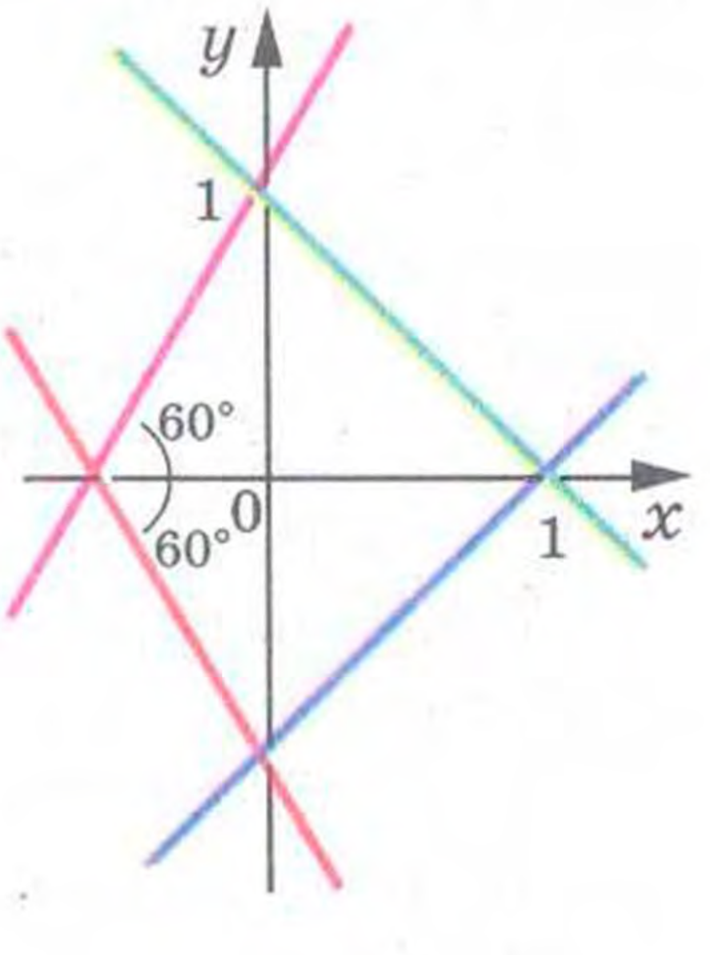


Рис. 12.7

12.20.° Знайдіть відстань від точки M (−1; 2) до прямої:

1) $3x - 4y = 2$; 2) $-5x + 12y = 1$.

12.21.° Знайдіть відстань від точки перетину прямих AB і CD до прямої $6x - 8y = -1$, якщо A (1; −1), B (2; 1), C (3; 1), D (−4; 2).

12.22.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох заданих кіл:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ і $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$;

2) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ і $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3$.

12.23.• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 2$ і перетинає пряму $y = -8x + 9$ у точці, що належить осі ординат.

12.24.• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 3x + 4$ і перетинає пряму $y = -4x + 16$ у точці, що належить осі абсцис.

12.25.• Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $y = 2x + 3$ і перетинає пряму $-x + 3y = -6$ у точці, що належить осі абсцис.

12.26.• Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $2x + y = 1$ і перетинає пряму $x - 4y = -1$ у точці, що належить осі ординат.

12.27.• Дано точки $A(-1; 5)$ і $B(8; 2)$. Знайдіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої AB і перетинає відрізок AB у точці M такій, що $AM : MB = 2 : 1$.

12.28.• Запишіть рівняння прямих, які містять висоти трикутника ABC, якщо $A(1; 3)$, $B(5; -7)$, $C(-1; 9)$.

12.29.• Точки $A(1; 2)$, $B(2; 5)$, $C(7; 0)$ є вершинами трикутника ABC. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через вершину B і перпендикулярна до бісектриси, проведеної з вершини A.

12.30.• Дано трикутник ABC, де $A(1; -2)$, $B(3; 4)$, $C(-1; 2)$. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через вершину B і перпендикулярна до медіани, проведеної з вершини A.

12.31.• Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $A(1; -2)$, $B(1; 1)$, $C(-3; -5)$.

12.32.• Знайдіть рівняння кола з центром у точці $M(-2; 1)$, яке дотикається до прямої $8x - 15y = -2$.

12.33.• Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих $5x - 12y = 1$ і $-5x + 12y = -3$.

12.34.• Знайдіть рівняння дотичної до кола $x^2 + (y - 2)^2 = 25$, яка проходить через точку $M(3; -2)$.

12.35.•• Запишіть рівняння кола, центр якого належить прямій $2x + 3y = 5$ і яке проходить через точки $A(5; -3)$, $B(-3; 5)$.

12.36.•• Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від прямих $3x - 4y = -7$ і $4x - 3y = 8$.

12.37.[••] Знайдіть відстань між двома прямими:

1) $3x + 4y = 8$ і $3x + 4y = -12$; 2) $4x + 3y = 5$ і $8x + 6y = 3$.

12.38.[••] Запишіть рівняння кіл радіуса 1, які дотикаються до прямих $3x - 4y = 1$ і $4x - 3y = -1$.

12.39.[••] Знайдіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 2y = 9$, які проходять через точку $M(7; 2)$.

12.40.[••] Знайдіть рівняння спільних дотичних до кіл $x^2 + y^2 = 6x$ і $x^2 + y^2 = 6y$.

12.41.[••] Точка A лежить на прямій $3x - 4y = -34$, а точка B — на колі $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8$. Знайдіть найменшу можливу відстань між точками A і B.

13. Метод координат

Ми часто говоримо: пряма $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, коло $x^2 + y^2 = 1$, тим самим ототожнюючи фігуру з її рівнянням. Такий підхід дозволяє зводити задачу про пошук властивостей фігури до задачі про дослідження її рівняння. У цьому й полягає суть методу координат.

Проілюструємо сказане на такому прикладі.

З наочних міркувань цілком очевидно, що пряма й коло мають не більше двох спільних точок. Проте таке твердження не є аксіомою і його потрібно доводити.

Ця задача зводиться до дослідження кількості розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2, \end{cases}$$

де параметри a і b одночасно не дорівнюють нулю і $R > 0$.

Розв'язуючи цю систему методом підстановки, отримаємо квадратне рівняння, яке може мати два розв'язки, один розв'язок або взагалі не мати розв'язків. Отже, для даної системи є три можливі випадки:

1) система має два розв'язки — пряма і коло перетинаються в двох точках;

2) система має один розв'язок — пряма дотикається до кола;

3) система не має розв'язків — пряма і коло не мають спільних точок.

З кожним із цих випадків ви зустрічалися, розв'язуючи задачі 11.14–11.16 відповідно.

«Агітує» за метод координат і така задача: чи можна вписати в еліпс правильний шестикутник?

Припустимо, що в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a \neq b)$ вдалося вписати правильний шестикутник. Опишемо навколо шестикутника коло. Тоді еліпс і коло мають не менше ніж шість спільних точок. Це означає, що коли $(x-m)^2+(y-n)^2=R^2$ — рівняння описаного кола, то система

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ (x-m)^2+(y-n)^2=R^2 \end{cases}$$

має не менше шести розв'язків.

Можна показати, що ця система має не більше чотирьох розв'язків. Тому відповідь на поставлене запитання заперечна.

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ.

Зафіксуємо на площині дві точки A і B. Ви знаєте, якою фігурою є геометричне місце точок M таких, що $\frac{MB}{MA}=k$, де $k \neq 1$. Це коло (коло Аполлонія). З досить непростим способом розв'язування цієї задачі ви ознайомились у 8 класі[1]. Метод координат дозволяє розв'язати цю задачу набагато простіше.

Площину, на якій зафіксовано точки A і B, «перетворимо» на координатну. Зробимо це так: за початок координат оберемо точку A, вісь абсцис проведемо так, щоб точка B мала координати (1; 0) (рис. 13.1).

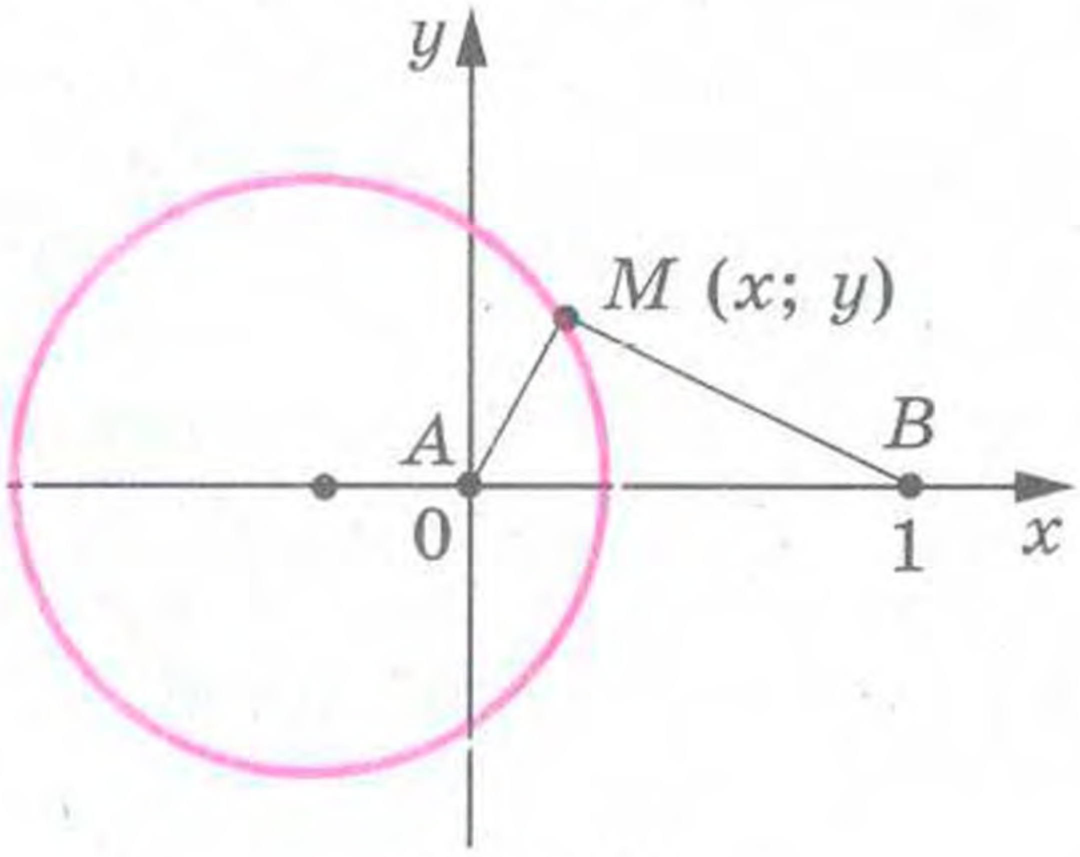


Рис. 13.1

Точка M $(x; y)$ координатної площини належить шуканій фігурі F тоді й тільки тоді, коли $kMA = MB$, або $k^2MA^2 = MB^2$. Звідси

$$k^2(x^2+y^2)=(x-1)^2+y^2;$$
$$(k^2-1)x^2+2x+$$
$$+(k^2-1)y^2=1.$$

Оскільки $k \neq 1$, то можна записати:

[1] Див. «Геометрія-8», п. 16, с. 108, п. 18, с. 119

$$x^2+\frac{2}{k^2-1}x+y^2=\frac{1}{k^2-1};$$

$$x^2+\frac{2}{k^2-1}x+\frac{1}{(k^2-1)^2}+y^2=\frac{1}{k^2-1}+\frac{1}{(k^2-1)^2};$$

$$\left(x+\frac{1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{k^2}{(k^2-1)^2}. \qquad (*)$$

Таким чином, рівнянням фігури F є рівняння (*), тобто фігура F — це коло з центром у точці $O\left(\frac{1}{1-k^2};\ 0\right)$ і радіусом $\frac{k}{|k^2-1|}$.

Зазначимо, що застосування методу координат передбачає виконання певної технічної роботи, пов'язаної з перетвореннями виразів, розв'язуванням рівнянь або систем рівнянь. Вигідний вибір системи координат може значно полегшити викладки.

Перетворюючи площину на координатну, ми деяким точкам приписуємо координати, які в рівняннях, що складаються, відіграють роль параметрів. Природно, слід прагнути до такого вибору системи координат, щоб параметрів було якомога менше.

Наприклад, може здаватися, що для задання чотирьох вершин прямокутника необхідно 8 параметрів. Проте якщо ввести систему координат так, як показано на рисунку 13.2, то досить двох параметрів.

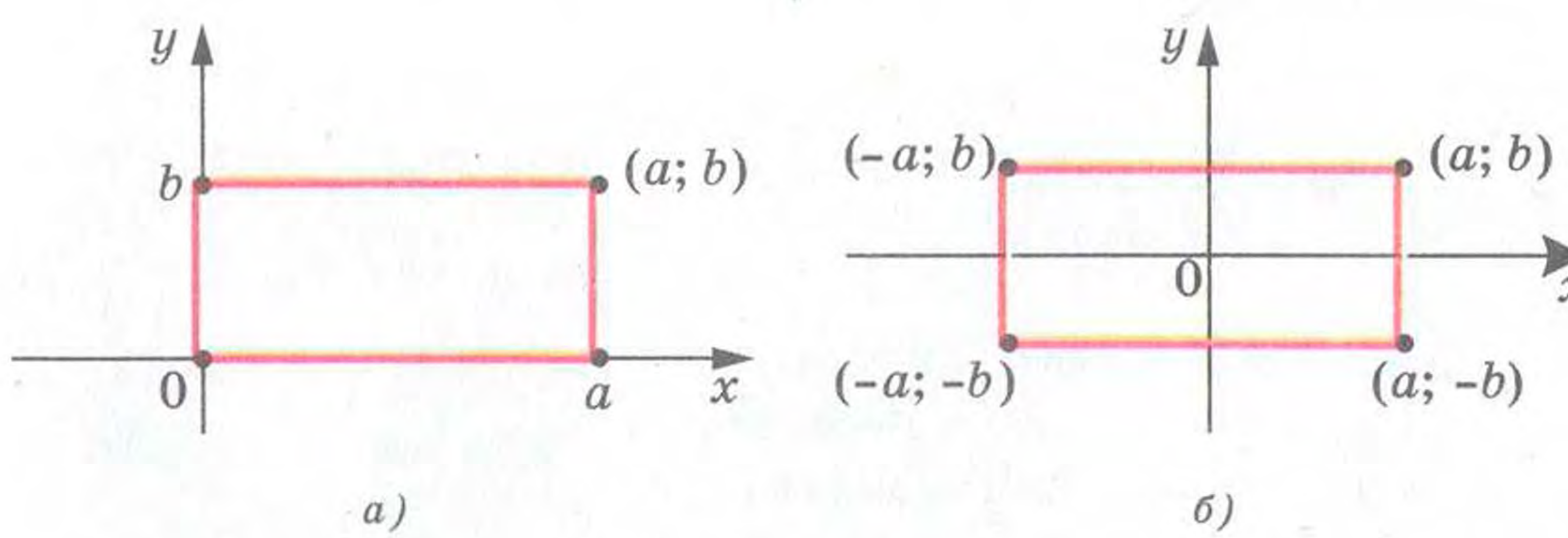


Рис. 13.2

Задача (формула Лейбніца). Нехай медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведіть, що для будь-якої точки X виконується рівність

$$XA^2+XB^2+XC^2=MA^2+MB^2+MC^2+3XM^2. \qquad (*)$$

Розв'язання. Щоб задати координати вершин трикутника, здавалося б, потрібно 6 параметрів. Проте якщо обрати систему

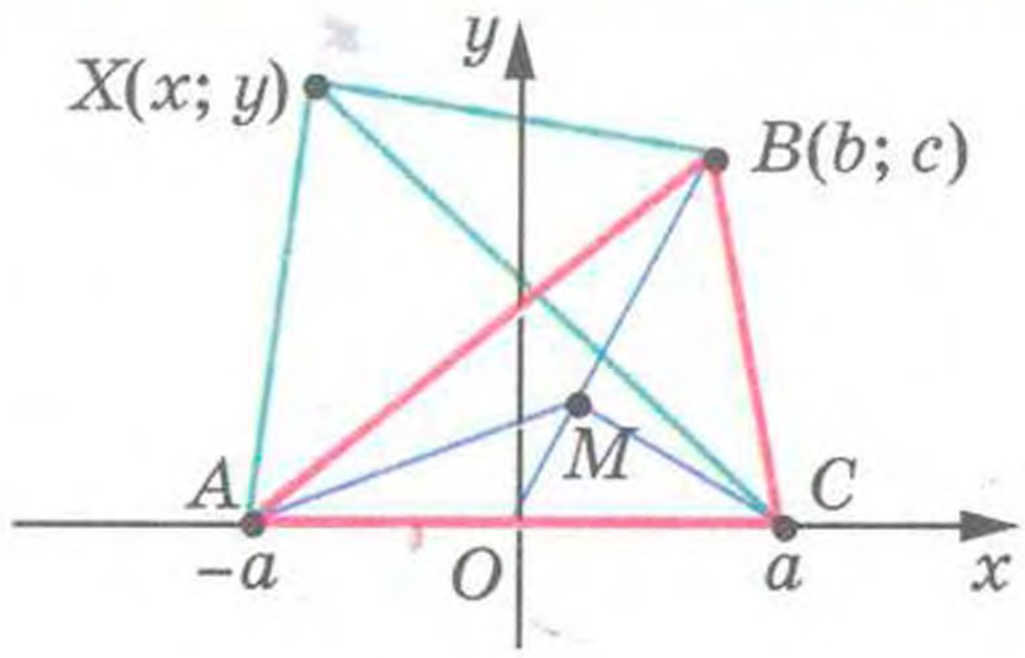


Рис 13.3

координат так, як показано на рисунку 13.3, то можна обійтися трьома параметрами.

Оскільки $BM : MO = 2 : 1$, то точка M має координати $\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$.

Нехай $X(x; y)$ — довільна точка. Тоді

$$XA^2 = (x + a)^2 + y^2;$$

$$XB^2 = (x - b)^2 + (y - c)^2;$$

$$XC^2 = (x - a)^2 + y^2;$$

$$MA^2 = \left(\frac{b}{3} + a\right)^2 + \frac{c^2}{9};$$

$$MB^2 = \left(\frac{b}{3} - b\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - c\right)^2 = \frac{4b^2}{9} + \frac{4c^2}{9};$$

$$MC^2 = \left(\frac{b}{3} - a\right)^2 + \frac{c^2}{9};$$

$$XM^2 = \left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{3}\right)^2.$$

Тепер легко переконатися (зробіть це самостійно), що формула (*) є правильною.

Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

Німецький математик, фізик і філософ, перший президент Берлінської академії наук. Увів багато математичних термінів і понять (функція, алгоритм, координата тощо), заклав основи сучасної математичної логіки. Одночасно з І. Ньютоном, але незалежно від нього завершив створення диференційного і інтегрального числень.

ВПРАВИ

13.1.° Знайдіть ГМТ, різниця квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B є величиною сталою.

13.2.° Знайдіть ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B є величиною сталою.

13.3.° Знайдіть ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до вершин A і B трикутника ABC дорівнює квадрату відстані до третьої його вершини — точки C.

13.4.° Знайдіть ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до вершин трикутника ABC є величиною сталою.

13.5.° Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

13.6.° Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$.

13.7.° Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіана AD трикутника ABC має сталу довжину d.

13.8.° Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіана AD трикутника ABC дорівнює його стороні BC.

13.9.° Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що висота CD трикутника ABC дорівнює його медіані AM.

13.10.° Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

13.11.°° На відрізку AB довільним чином обирають точку C. В одній півплощині від прямої AB на відрізках AC і CB як на сторонах будують квадрати. Знайдіть геометричне місце середин відрізків, які з'єднують центри квадратів.

13.12.°° На відрізку AB довільним чином обирають точку C. В одній півплощині від прямої AB на відрізках AC і CB як на сторонах будують рівносторонні трикутники AMC і CNB. Доведіть, що середина відрізка MB, середина відрізка NA і точка C є вершинами рівностороннього трикутника.

13.13.°° Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює $2\sqrt{3}$. На стороні AB позначено точку D так, що $AD = 2DB$ і $CD = 2\sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $\angle ACB = 60°$.

13.14.** Хорда AB стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $120°$. Точка C лежить на цій дузі, а точка D — на хорді AB. Відомо, що $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.

13.15.** На діагоналях AC і BD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки P і Q так, що $AP : PC = 2 : 3$ і $BQ : QD = 1 : 4$. Знайдіть довжину відрізка PQ, якщо $AB = 5$, $AD = 3$, $\angle ADB = 90°$.

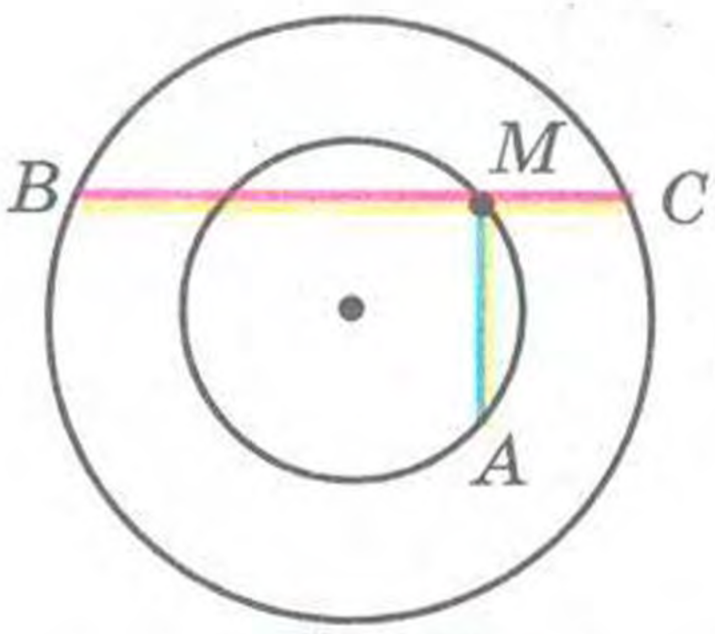


Рис. 13.4

13.16.** Через довільну точку M меншого з двох концентричних кіл, радіуси яких дорівнюють R і r, проведено хорду BC більшого кола і хорду MA меншого кола (рис. 13.4). Відомо, що $BC \perp MA$. Знайдіть суму $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

13.17.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $(a - c)^2 + (b - d)^2$, якщо $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$.

13.18.** У ромб $ABCD$ з гострим кутом $45°$ вписано коло. Доведіть, що для будь-якої точки X кола виконується рівність

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = \frac{5}{2}AB^2.$$

13.19.** У ромб $ABCD$ з гострим кутом $60°$ вписано коло. Доведіть, що для будь-якої точки X кола виконується рівність

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = \frac{11}{4}AB^2.$$

13.20.** У квадрат $ABCD$ вписано коло одиничного радіуса. Доведіть, що для будь-якої точки X кола виконується рівність $XA^2 \cdot XC^2 + XB^2 \cdot XD^2 = 10$.

13.21.** У правильному шестикутнику $ABCDEF$ сторони AB і CD продовжено до їх перетину в точці K. Доведіть, що для будь-якої точки X кола, описаного навколо шестикутника, виконується рівність $XK^2 = XB^2 + XC^2$.

13.22 (3.56).** На діаметрі кола з центром O радіуса R позначили точку M. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки M до кінців хорди, паралельної цьому діаметру, не залежить від вибору хорди.

13.23.** На діаметрі кола радіуса R позначено дві точки, рівновіддалені від центра. Через одну з них проведено хорду, кінці якої сполучено з другою точкою. Доведіть, що сума квадратів сторін утвореного трикутника не залежить від вибору хорди.

13.24.** У колі з центром O проведено два перпендикулярних діаметри AB і CD. На радіусі OB позначено точку K так, що $OK = \frac{1}{3}OB$, а на радіусі OD — точку M так, що $OM = \frac{1}{2}OD$. Доведіть, що точка перетину прямих CK і AM належить даному колу.

13.25.** Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін DC і BC. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій AC.[1]

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Як будували міст між геометрією та алгеброю

Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зірки, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

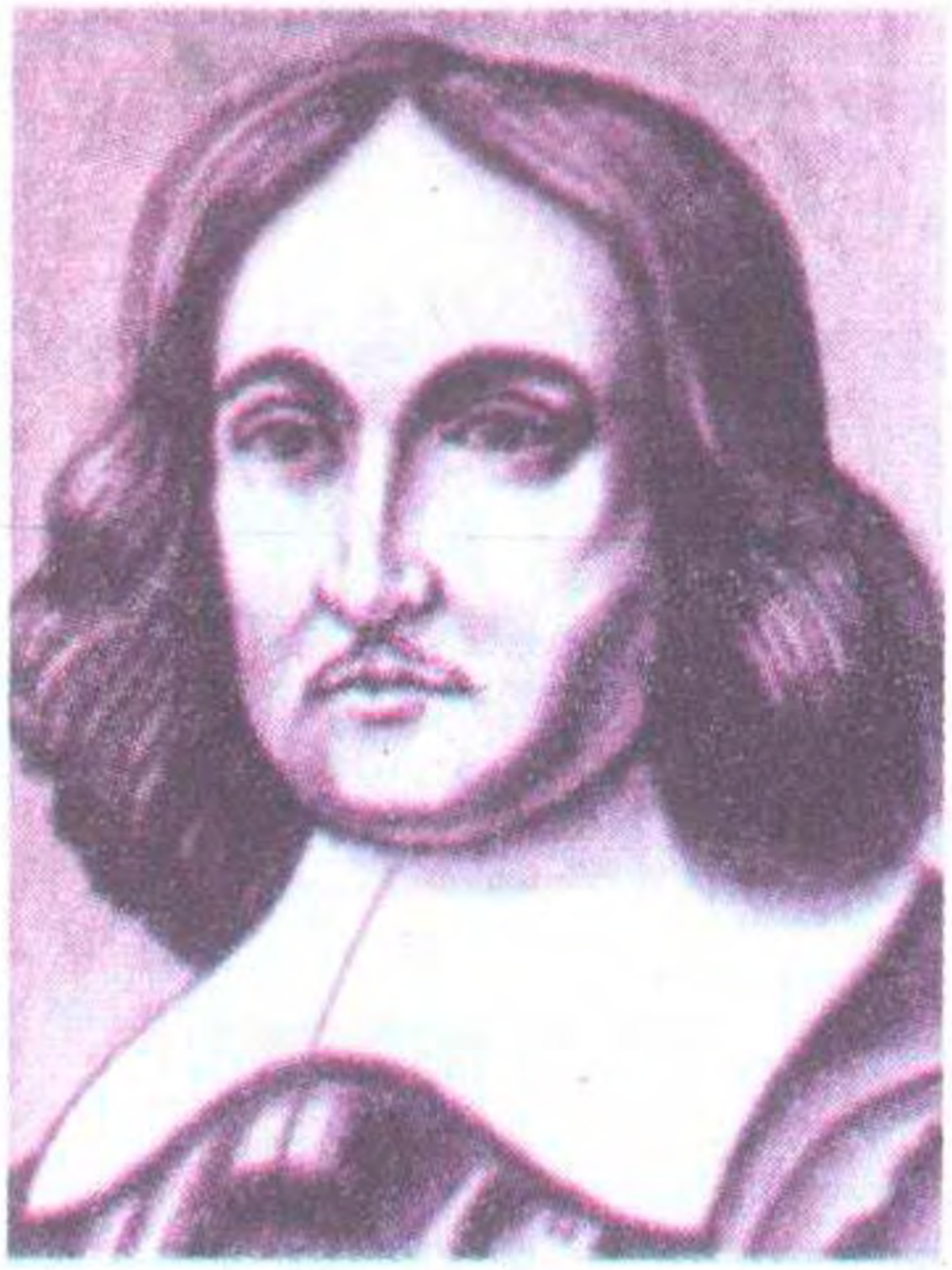
У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об'єктів на поверхні Землі.

Лише в XIV ст. французький учений Ніколя Орем (близько 1323–1392) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: він розбив площину на клітинки (як розбито аркуш вашого зошита) і став задавати положення точок широтою і довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї були розкриті лише у XVII ст. у роботах видатних французьких математиків П'єра Ферма (1601–1665) і Рене Декарта (1596–1650). У своїх роботах ці вчені показали, як завдяки системі координат можна переходити від точок до чисел, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри.

Попри те, що П. Ферма опублікував свою роботу на рік раніше за Р. Декарта, систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають **декартовою**. Р. Декарт у своїй роботі «Міркування про метод» винайшов нову зручну буквену символіку, якою з незначними змінами ми користуємося й сьогодні. Слідом за Декартом ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x, y, z, а коефіцієнти — першими: a, b, c, ... Звичні нам позначення степенів x^2, y^3, z^5 і т. д. також увів Р. Декарт.

[1] Цю задачу ви розв'язували у 8 класі (див. «Геометрія-8», задача 9.30).



П'єр Ферма

Рене Декарт

Радикальна вісь двох кіл

Розглянемо коло радіуса R з центром у точці O. Нехай M — довільна точка. Позначимо $MO = d$. Величину, яка дорівнює $d^2 - R^2$, називають **степенем точки M відносно даного кола.**

Якщо точка M лежить всередині кола (рис. 13.5, *а*), то її степінь є від'ємним; якщо точка M належить колу (рис. 13.5, *б*), то її степінь дорівнює нулю; якщо точка M лежить поза колом (рис. 13.5, *в*), то її степінь є додатним.

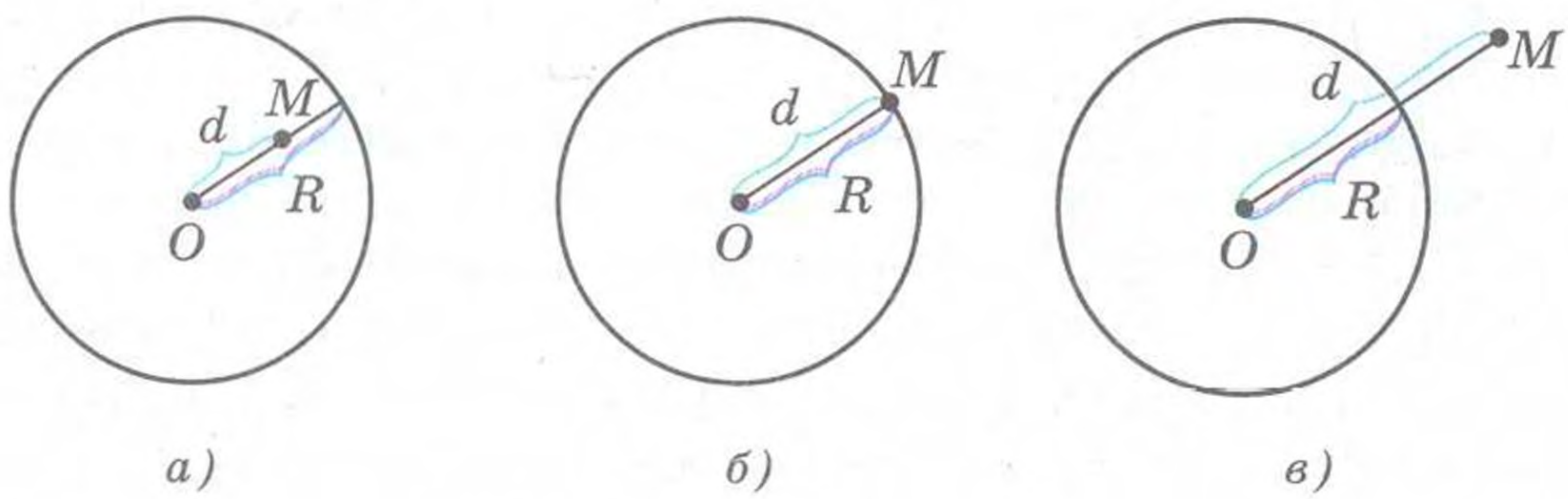


Рис. 13.5

Через точку M, яка лежить поза колом, проведемо дотичну MA (рис. 13.6). Оскільки $OA \perp MA$, то $MA^2 = MO^2 - OA^2 = d^2 - R^2$, тобто величина MA^2 дорівнює степеню точки M відносно даного кола.

Розглянемо два кола з центрами O_1 і O_2 і радіусами R_1 і R_2 відповідно. Знайдемо ГМТ, які мають однаковий степінь відносно даних кіл.

Точка X належить шуканому ГМТ тоді і тільки тоді, коли $XO_1^2 - R_1^2 = XO_2^2 - R_2^2$.

Звідси

$$XO_1^2 - XO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Оскільки різниця $R_1^2 - R_2^2$ для даних кіл є величиною сталою, то з ключової задачі 13.1 випливає, що шуканим ГМТ є пряма, перпендикулярна до прямої O_1O_2. Цю пряму називають **радикальною віссю** даних кіл.

Нехай кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B (рис. 13.7). Точки A і B відносно даних кіл мають степінь, який дорівнює 0. Отже, вони належать радикальній осі цих кіл. Це означає, що пряма AB — радикальна вісь.

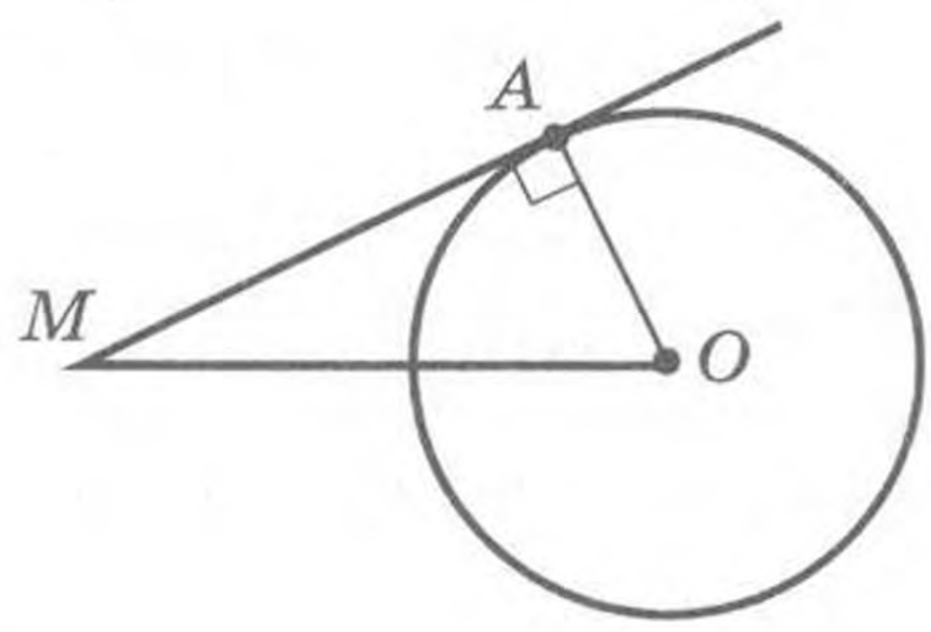


Рис 13.6

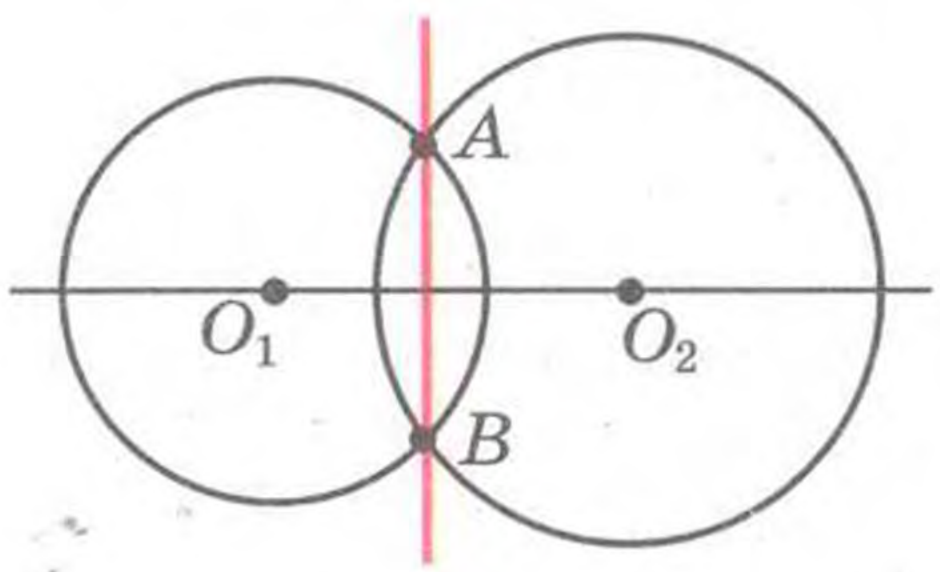
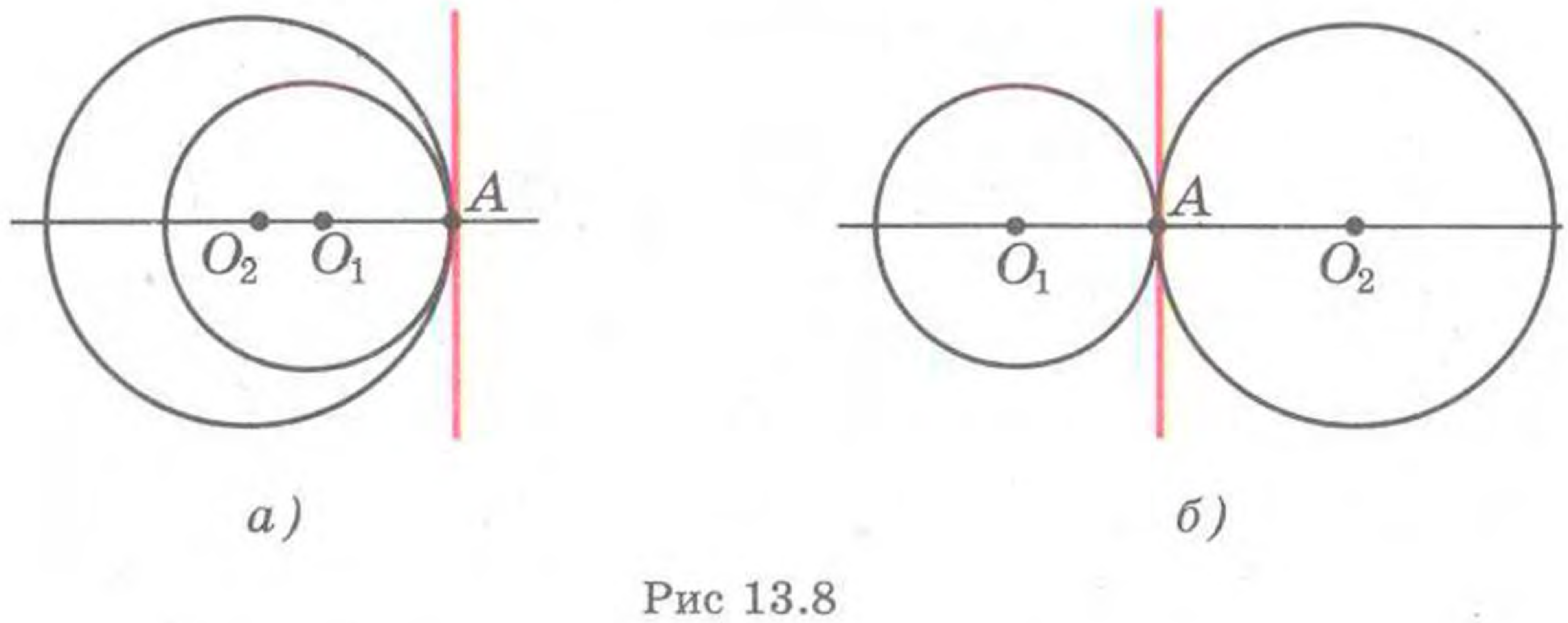


Рис 13.7

Якщо кола дотикаються в точці A (рис. 13.8), то їх радикальна вісь проходить через точку A і перпендикулярна прямій O_1O_2 (подумайте, чому).



а)

б)

Рис 13.8

Якщо через точку X, яка належить радикальній осі двох кіл, проведено до цих кіл дотичні XA і XB (A і B — точки дотику), то отримаємо, що $XA = XB$ (рис. 13.9). Ця властивість підказує, як побудувати радикальну вісь двох кіл.

Проведемо дві спільні зовнішні дотичні AB і CD (A, B, C і D — точки дотику). Нехай точки M і N — середини відповідно відрізків AB і CD (рис. 13.10). Тоді ці точки мають однаковий степінь відносно даних кіл. Отже, пряма MN — радикальна вісь.

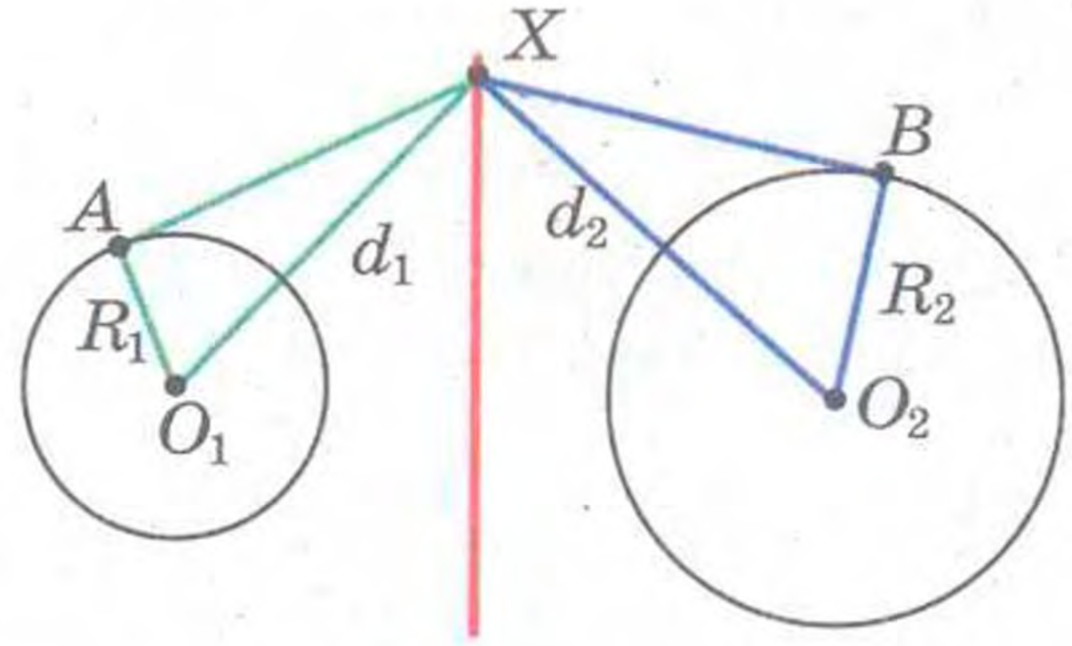


Рис 13.9

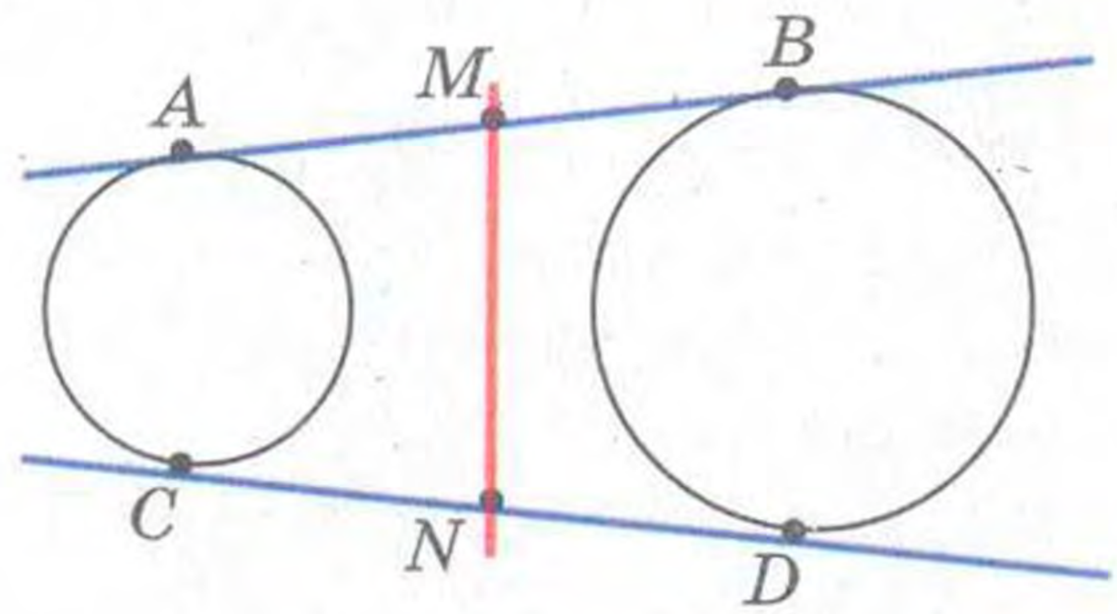


Рис 13.10

Зрозуміло, що побудову радикальної осі цих кіл можна здійснити, провівши їх спільні внутрішні дотичні EF і PQ (E, F, P і Q — точки дотику).

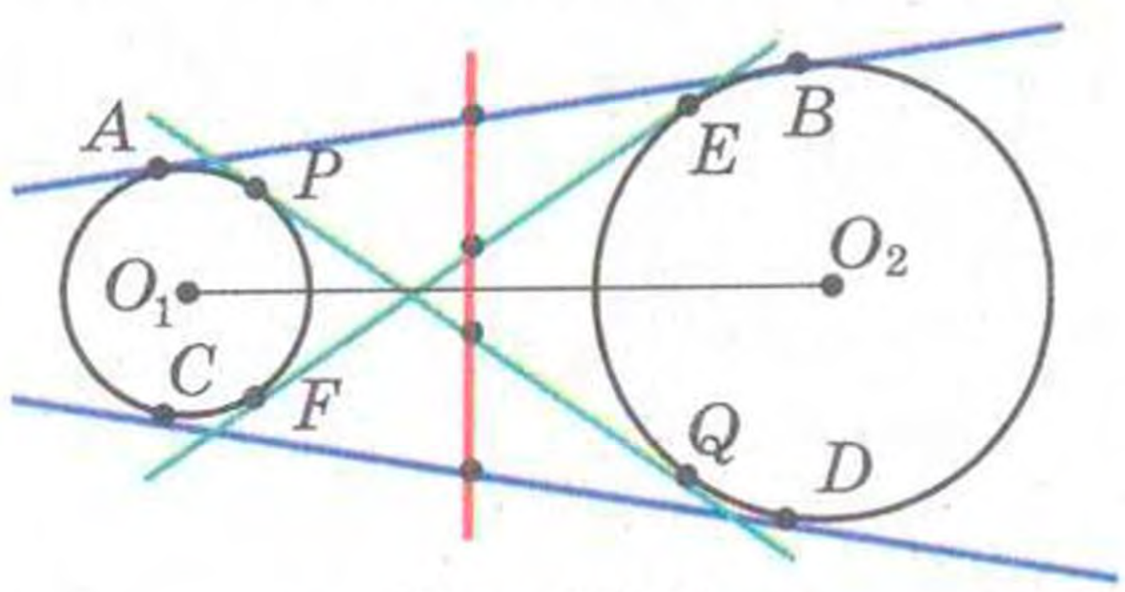


Рис. 13.11

Із сказаного випливає, що середини відрізків AB, CD, EF і PQ лежать на одній прямій, перпендикулярній до прямої O_1O_2 (рис. 13.11).

Доведіть самостійно, що кола, центри яких збігаються, не мають радикальної осі.

Теорема. ***Якщо центри трьох кіл не лежать на одній прямій і для кожної пари кіл проведено радикальну вісь, то всі ці три радикальні осі перетинаються в одній точці.***

Доведення. Позначимо центри кіл O_1, O_2, O_3. Нехай прямі l_1 і l_2 — радикальні осі кіл з центрами O_1, O_2 і O_2, O_3 відповідно. Оскільки точки O_1, O_2 і O_3 не лежать на одній прямій, то $l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$. Нехай $l_1 \cap l_2 = M$ (рис. 13.12). Тоді точка M має однаковий степінь відносно кіл з центрами O_1

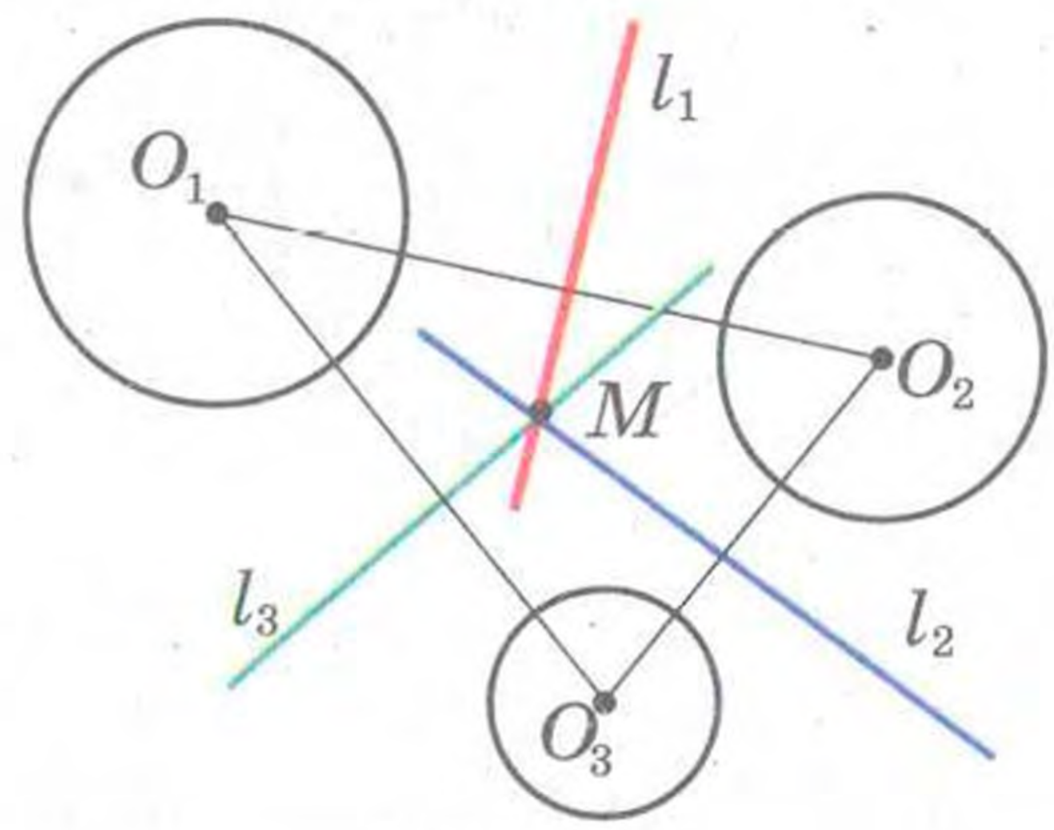


Рис. 13.12

і O_3, а отже, належить радикальній осі l_3 цих кіл. Таким чином, прямі l_1, l_2 і l_3 перетинаються в одній точці. Її називають **радикальним центром** трьох кіл. ▲

Покажемо, як за допомогою цієї теореми побудувати радикальну вісь кіл, розміщених так, як показано на рисунку 13.13.

Проведемо третє коло, центр якого не лежить на прямій O_1O_2 і яке перетинає кожне з даних кіл у двох точках. Точки перетину позначено на рисунку 13.14 буквами A, B, C і D. Тоді точка M перетину прямих AB і CD належить радикальній осі кіл з центрами O_1 і O_2. Залишилось провести через точку M пряму, перпендикулярну до прямої O_1O_2. Вона і буде шуканою радикальною віссю.

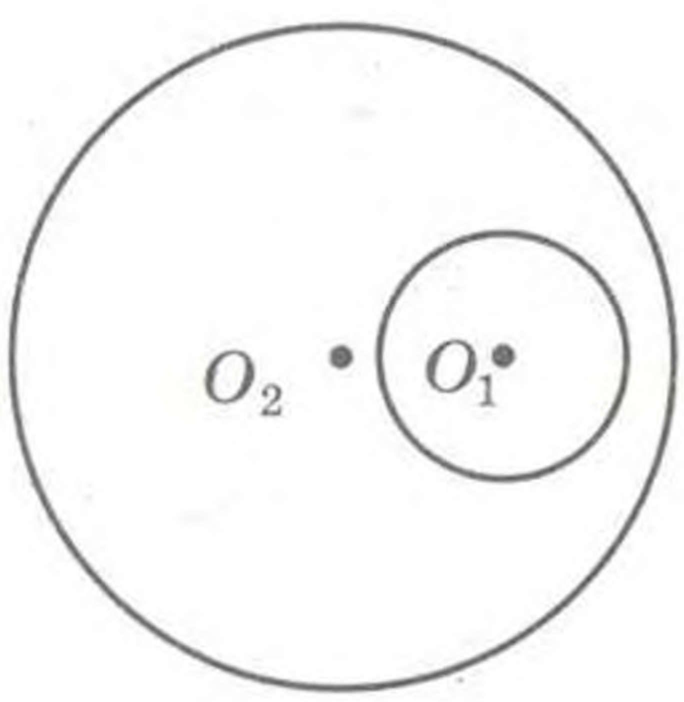


Рис 13.13

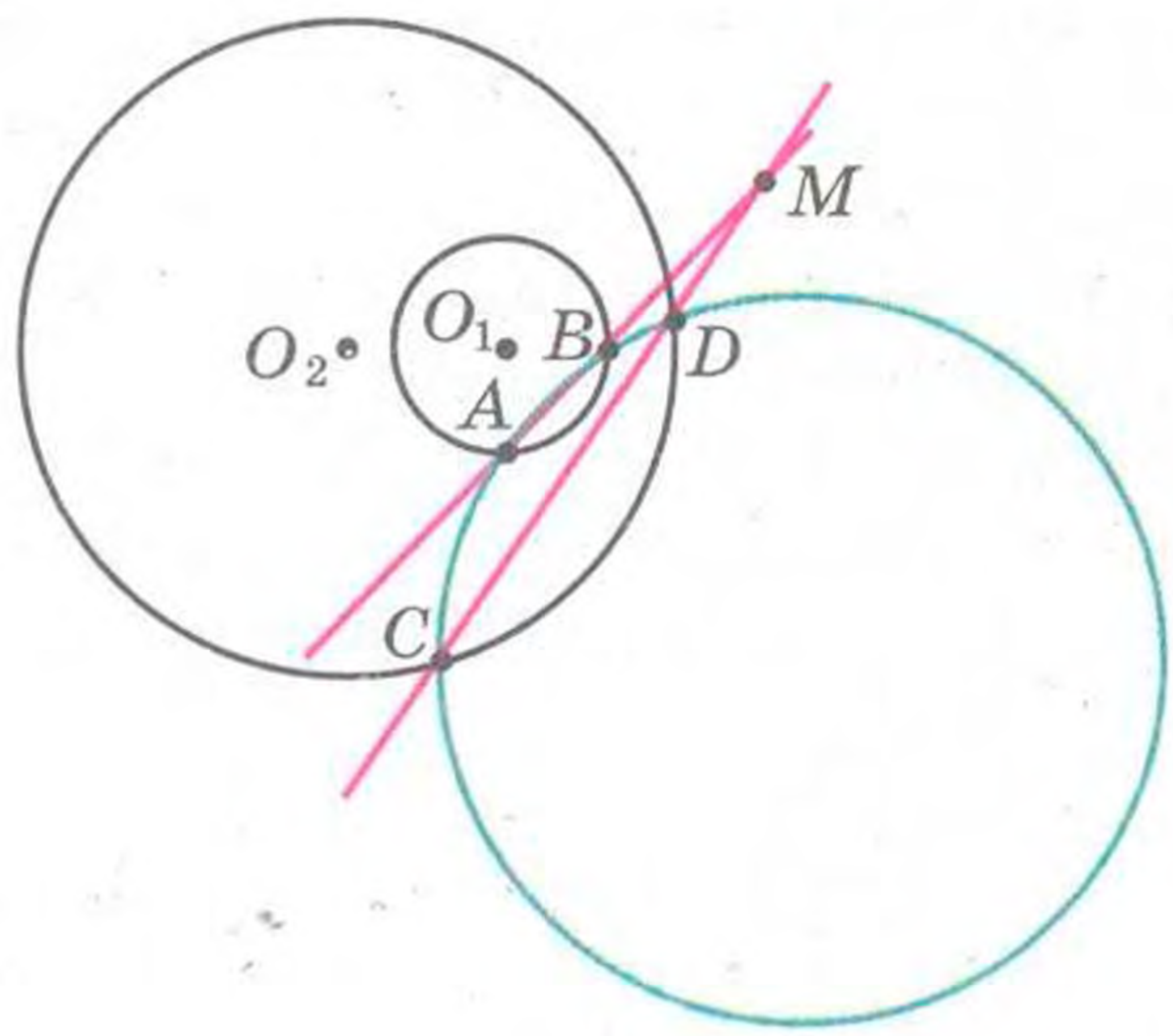


Рис 13.14

ВПРАВИ

1. Три кола попарно дотикаються зовнішнім чином (рис. 13.15), A, B і C — точки дотику. Спільні дотичні до кіл, проведені через точки A і B, перетинаються в точці M. Доведіть, що $MA = MB = MC$.

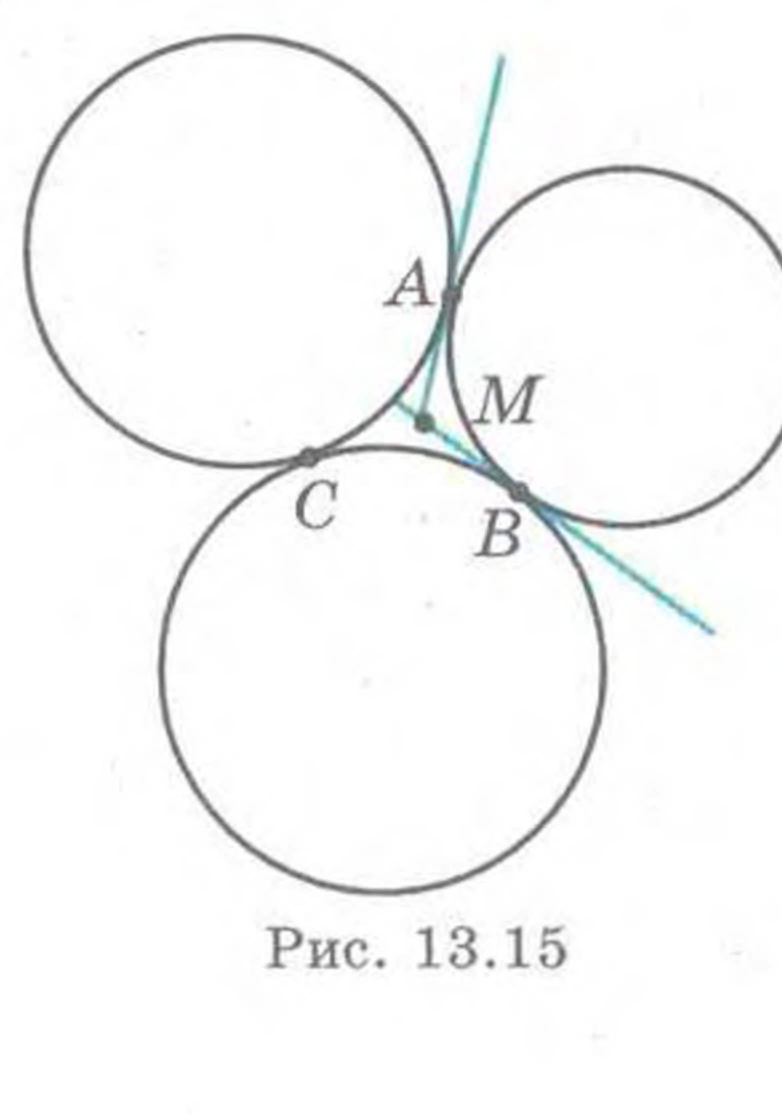


Рис. 13.15

2. Дано коло і дві точки, які лежать поза цим колом. Побудуйте коло, яке дотикається до даного кола і проходить через задані точки.

Вказівка. Радикальною віссю даного і шуканого кіл є їх спільна дотична. Ця дотична проходить через радикальний центр трьох кіл: даного кола і будь-яких двох кіл, які проходять через дві дані точки.

3. На сторонах BC і AC трикутника ABC позначили відповідно точки A_1 і B_1. На відрізках AA_1 і BB_1 як на діаметрах побудовано кола, які перетинаються в точках M і N. Доведіть, що пряма MN містить ортоцентр трикутника ABC.

Вказівка. Доведіть, що ортоцентр трикутника ABC є радикальним центром двох вказаних кіл і кола, побудованого на стороні AB як на діаметрі.

4. Точки A, B, C і D у вказаному порядку лежать на одній прямій. Кола з діаметрами AC і BD перетинаються в точках X і Y. Нехай P — точка на прямій XY. Пряма CP перетинає коло з діаметром AC у точках C і M, а пряма BP перетинає коло з діаметром BD у точках B і N. Доведіть, що прямі AM, ND, XY перетинаються в одній точці.

Вказівка. Доведіть, що точки A, M, N і D лежать на одному колі. Радикальний центр цього кола і кіл з діаметрами AC і BD і є точкою перетину прямих AM, ND і XY.

ВЕКТОРИ §5

14. Поняття вектора

Ви знаєте багато величин, які визначаються своїми числовими значеннями: маса, площа, довжина, об'єм, час, температура тощо. Такі величини називають **скалярними величинами**, або просто **скалярами**.

З курсу фізики вам знайомі величини, для задання яких недостатньо знати тільки їх числові значення. Наприклад, якщо на пружину діє сила 5Н, то не зрозуміло, чи буде пружина стискатися або розтягуватися (рис. 14.1). Потрібно ще знати, у якому напрямі діє сила.

Рис. 14.1

Величини, які визначаються не тільки числовим значенням, але й напрямом, називають **векторними величинами**, або просто **векторами**.

Сила, переміщення, швидкість, прискорення, вага — приклади векторних величин.

Є вектори й у геометрії. Це **напрямлені відрізки**.

Розглянемо відрізок AB. Якщо ми домовимося точку A вважати **початком** відрізка, а точку B — його **кінцем**, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямом від точки A до точки B.

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають **напрямленим відрізком**, або **вектором**.

Вектор з початком у точці A і кінцем у точці B позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (читають: «вектор AB»).

На рисунках вектор зображують відрізком зі стрілкою, яка вказує його кінець. На рисунку 14.2 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Для позначення векторів також використовують маленькі букви латинського алфавіту зі стрілкою згори. На рисунку 14.3 зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

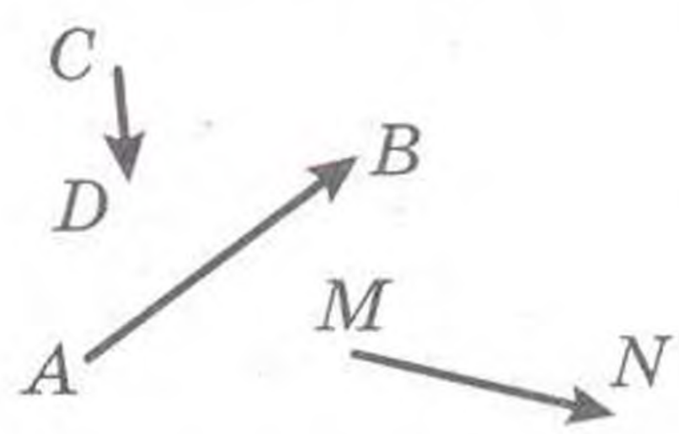


Рис. 14.2

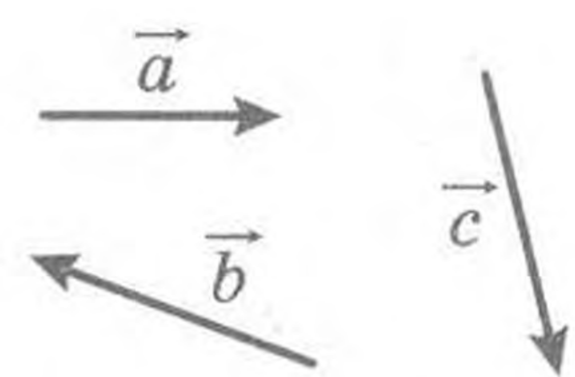


Рис. 14.3

Домовилися вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка, називати **нульовим вектором**, або **нуль-вектором**, і позначати $\vec{0}$. Якщо початок і кінець нульового вектора — це точка A, то його можна позначити й так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунку нульовий вектор зображують однією точкою.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нульового вектора вважають рівним нулю: $|\vec{0}|=0$.

Означення. Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

На рисунку 14.4 зображено колінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}$.

Той факт, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунку 14.5 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені. Такі вектори називають **співнапрямленими** і позначають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

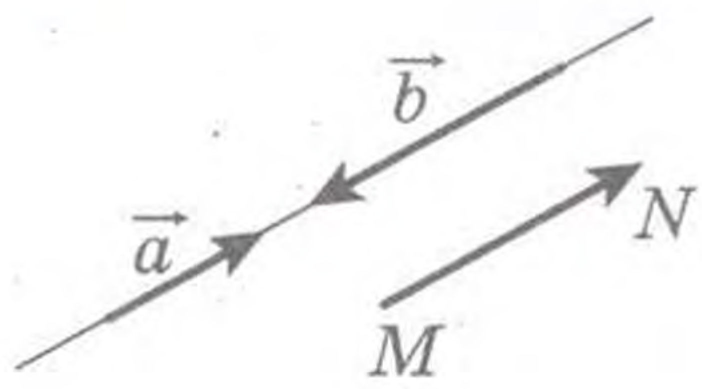


Рис. 14.4

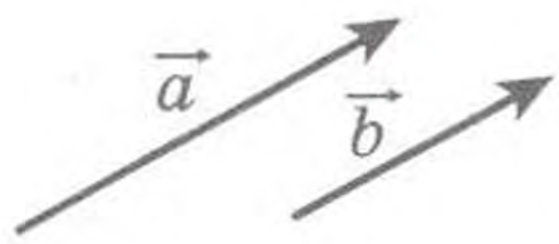


Рис. 14.5

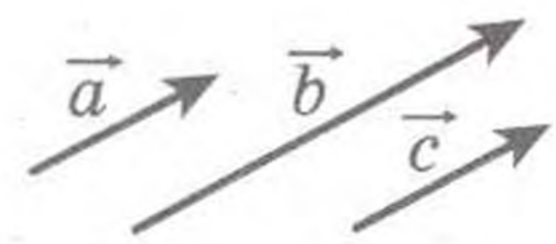


Рис. 14.6

Зрозуміло, що коли $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (рис. 14.6).

На рисунку 14.7 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **протилежно напрямлені**. Цей факт позначають так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Нульовий вектор не вважають співнапрямленим (протилежно напрямленим) з будь-яким іншим вектором.

Означення. Ненульові вектори називають рівними, якщо їх модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульові вектори рівні.

На рисунку 14.8 зображено рівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Це позначають так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Рівність ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ означає, що $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Очевидно, що коли $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

На рисунку 14.9 зображено вектор $\vec{a}$ з початком у точці A. Говорять, що вектор $\vec{a}$ **відкладено від точки** A.

Покажемо, як від довільної точки M відкласти вектор, рівний даному вектору $\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ нульовий, то шуканим вектором буде вектор $\overrightarrow{MM}$.

Тепер розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$. Нехай точка M лежить на прямій, яка містить вектор $\vec{a}$ (рис. 14.10). На цій прямій існують дві точки E і F такі, що $ME = MF = |\vec{a}|$. На цьому рисунку вектор $\overrightarrow{MF}$ дорівнюватиме вектору $\vec{a}$. Його і слід обрати.

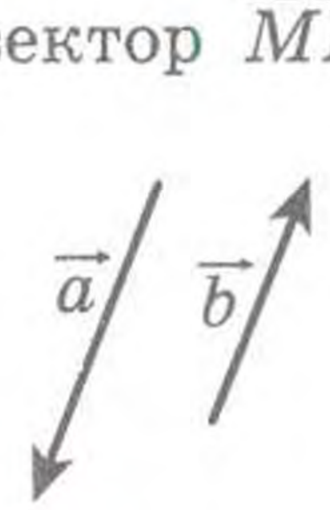


Рис. 14.7

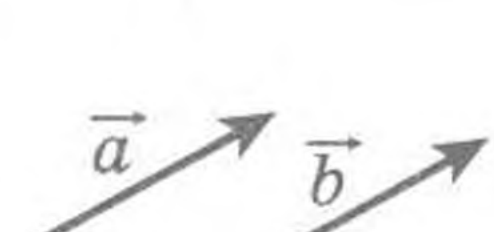


Рис. 14.8

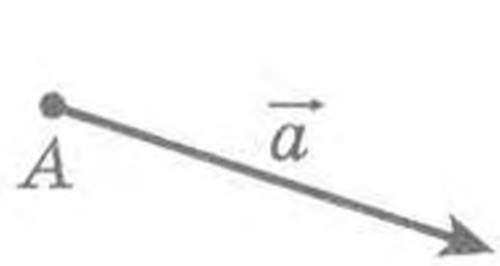


Рис. 14.9

Рис. 14.10

Якщо точка M не належить прямій, яка містить вектор $\vec{a}$, то через точку M проведемо пряму, їй паралельну (рис. 14.11). Подальша побудова аналогічна вже розглянутій.

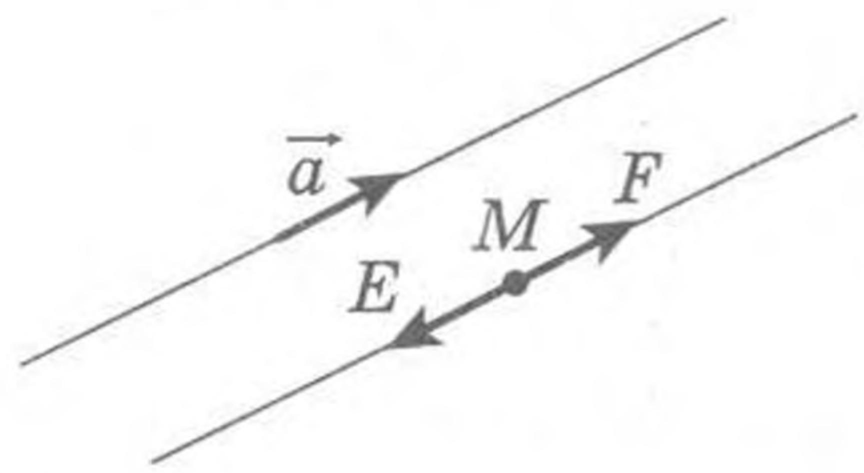


Рис. 14.11

Зрозуміло, що від заданої точки можна відкласти тільки один вектор, рівний даному.

Приклад. Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. З умови $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ випливає, що $AB \parallel DC$ і $AB = DC$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Рівність $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означає, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ рівні. А паралелограм з рівними діагоналями — прямокутник.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

14.1.° Дано вектор $\vec{a}$ і точку A (рис. 14.12). Відкладіть від точки A вектор, рівний вектору $\vec{a}$.

14.2.° Дано вектор $\vec{b}$ і точку B (рис. 14.13). Відкладіть від точки B вектор, рівний вектору $\vec{b}$.

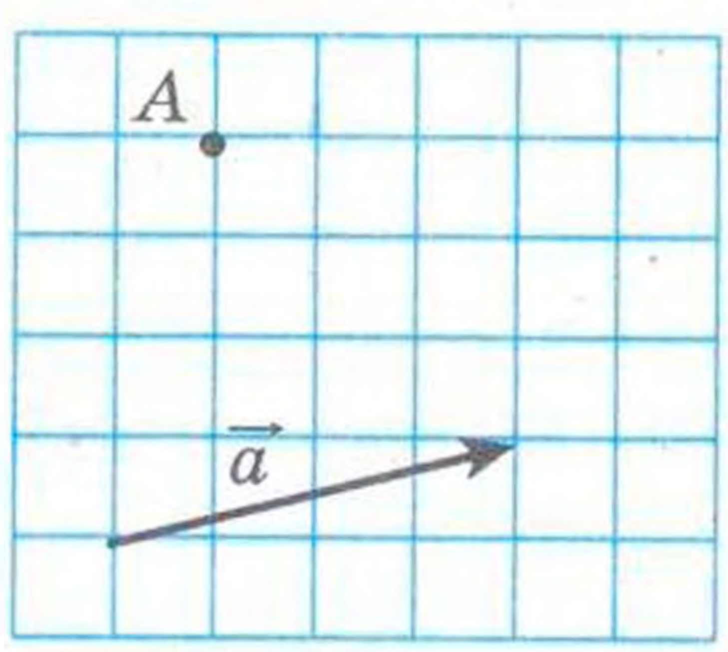


Рис. 14.12

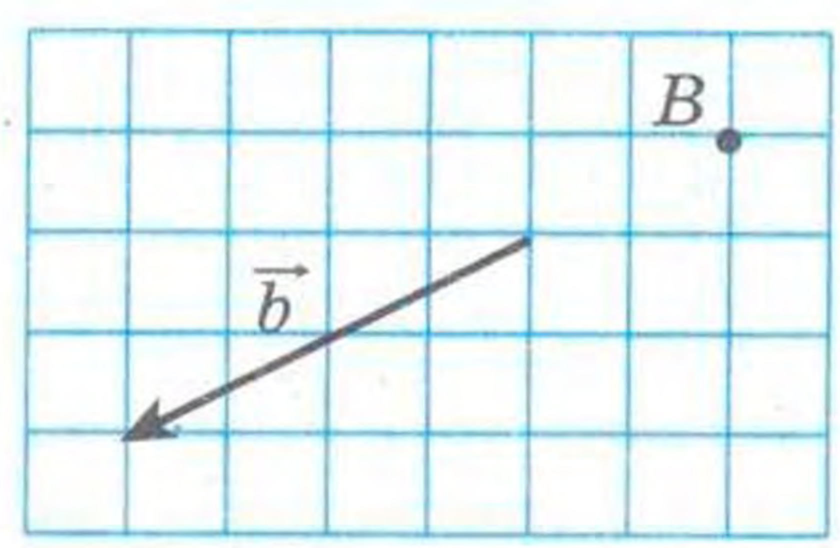


Рис. 14.13

14.3.° Накресліть трикутник ABC і позначте точку M — середину сторони BC. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AM}$, а від точки B — вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AC}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

14.4.° Накресліть трикутник ABC. Від точок B і C відкладіть вектори, відповідно рівні векторам $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

ВПРАВИ

14.5.° Укажіть рівні вектори, початки і кінці яких знаходяться у вершинах квадрата $ABCD$.

14.6.° У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Укажіть рівні вектори, початки і кінці яких знаходяться у точках A, B, C, D, O.

14.7.° Які з векторів, зображених на рисунку 14.14: 1) рівні; 2) співнапрямлені; 3) протилежно напрямлені; 4) колінеарні?

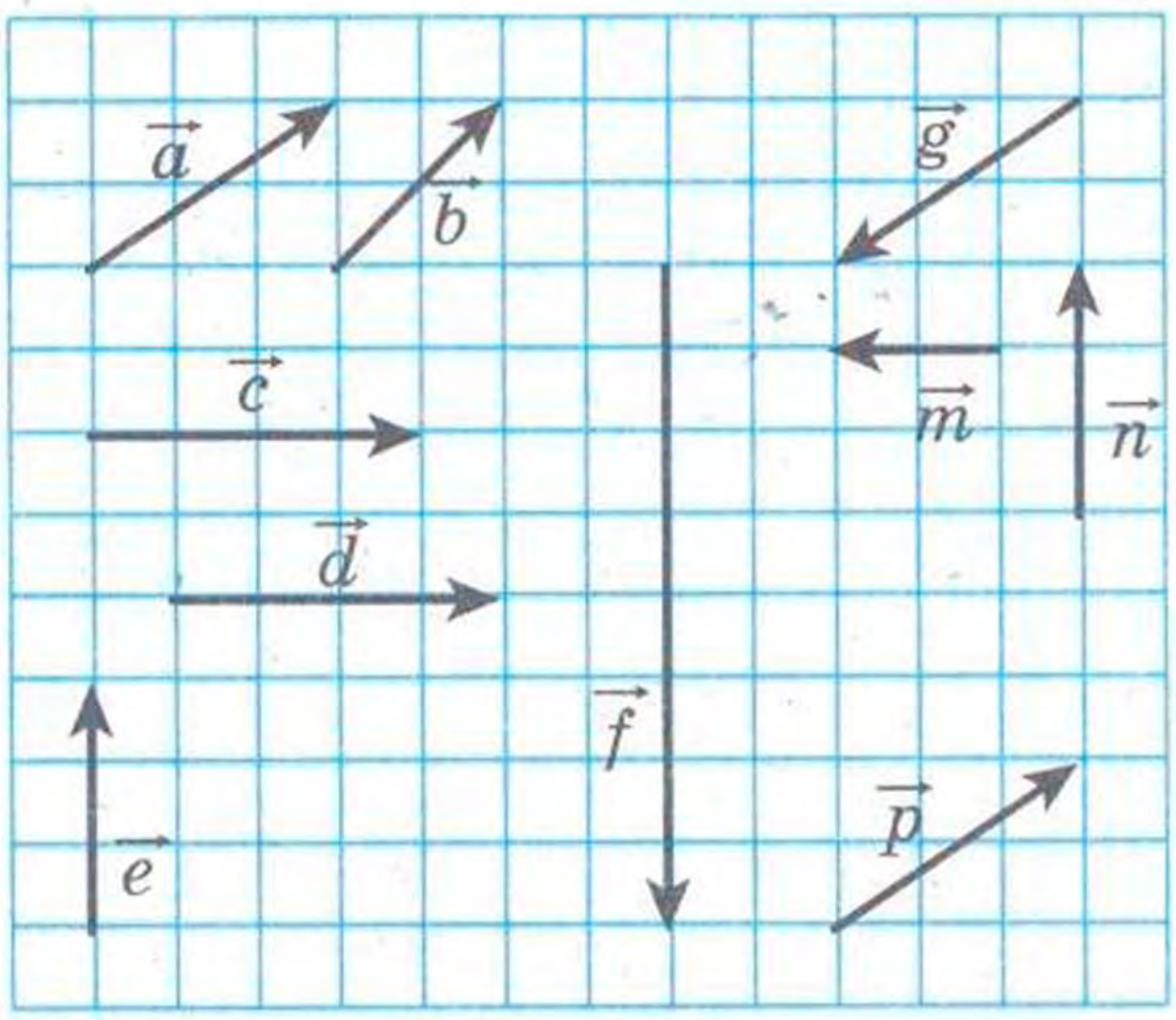


Рис. 14.14

14.8.° Точки M і N — відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки і кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D, M, N: 1) рівні вектору $\overrightarrow{AM}$; 2) колінеарні вектору $\overrightarrow{CD}$; 3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{NC}$; 4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{BC}$.

14.9.° Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки і кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D, O: 1) рівні; 2) співнапрямлені; 3) протилежно напрямлені.

14.10.° Точки M, N, P — відповідно середини сторін AB, BC, CA трикутника ABC. Укажіть вектори, початки і кінці яких знаходяться в точках A, B, C, M, N, P: 1) рівні вектору $\overrightarrow{MN}$; 2) колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$; 3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MP}$; 4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{CA}$.

14.11.° Чи є правильним твердження:

1) якщо $\vec{m}=\vec{n}$, то $|\vec{m}|=|\vec{n}|$;
2) якщо $\vec{m}=\vec{n}$, то $\vec{m}\parallel\vec{n}$;
3) якщо $\vec{m}=\vec{n}$, то $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$;
4) якщо $\vec{m}\neq\vec{n}$, то $|\vec{m}|\neq|\vec{n}|$?

14.12.° Доведіть, що коли чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

14.13.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{DA}$.

14.14.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ колінеарні і $|\overrightarrow{BC}|\neq|\overrightarrow{AD}|$.

14.15.° Знайдіть модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 14.15), якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

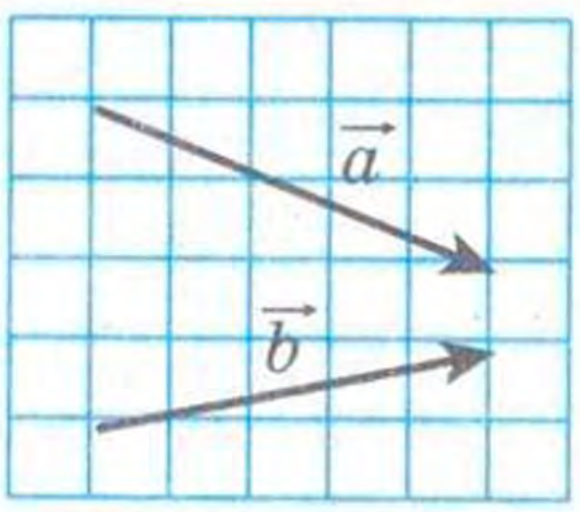


Рис. 14.15

14.16.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$.

14.17.° У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $|\overrightarrow{AB}|=5$ см, $|\overrightarrow{AO}|=6{,}5$ см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

14.18.° Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Чи правильно, що точки A, B, C і D є вершинами паралелограма?

14.19.° Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Які ще рівні вектори задають точки A, B, C і D?

14.20.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

14.21.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні і $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

14.22.° Що випливає з рівності $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$?

14.23.° У прямокутному трикутнику ABC точка M — середина гіпотенузи AB і $\angle B = 30°$. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MC}$, якщо $AC = 2$ см.

14.24.° У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана CM дорівнює 6 см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $\angle A = 30°$.

14.25.° Відомо, що вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні. Вектор $\vec{a}$ колінеарний кожному з векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Доведіть, що вектор $\vec{a}$ є нульовим.

14.26.° Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи правильне обернене твердження: якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні?

14.27.° Для чотирьох точок A, B, C, D відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Доведіть, що середини відрізків AD і BC збігаються. Доведіть обернене твердження: якщо середини відрізків AD і BC збігаються, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

14.28.° Відомо, що $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$. Доведіть, що точка O — середина відрізка MN. Доведіть обернене твердження: якщо точка O — середина відрізка MN, то $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$.

15. Координати вектора

Розглянемо на координатній площині вектор $\vec{a}$. Від початку координат відкладемо рівний йому вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 15.1). **Координатами вектора** $\vec{a}$ називатимемо координати точки A. Запис $\vec{a}(x; y)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати $(x; y)$.

Числа x і y називають відповідно **першою** і **другою координатами вектора** $\vec{a}$.

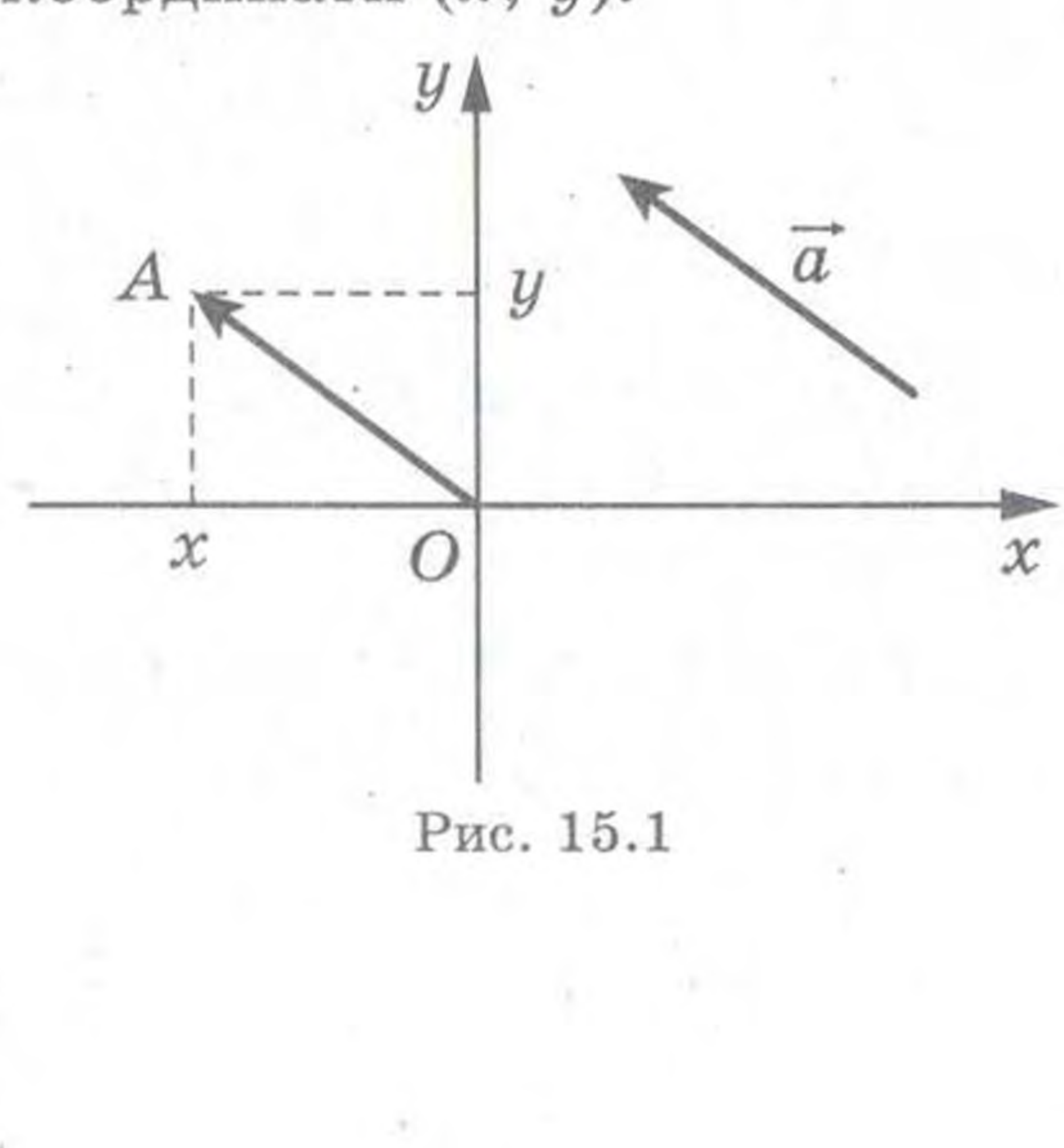


Рис. 15.1

З означення випливає, що ***рівні вектори мають рівні відповідні координати***. Наприклад, кожний з рівних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 15.2) має координати (2; 1).

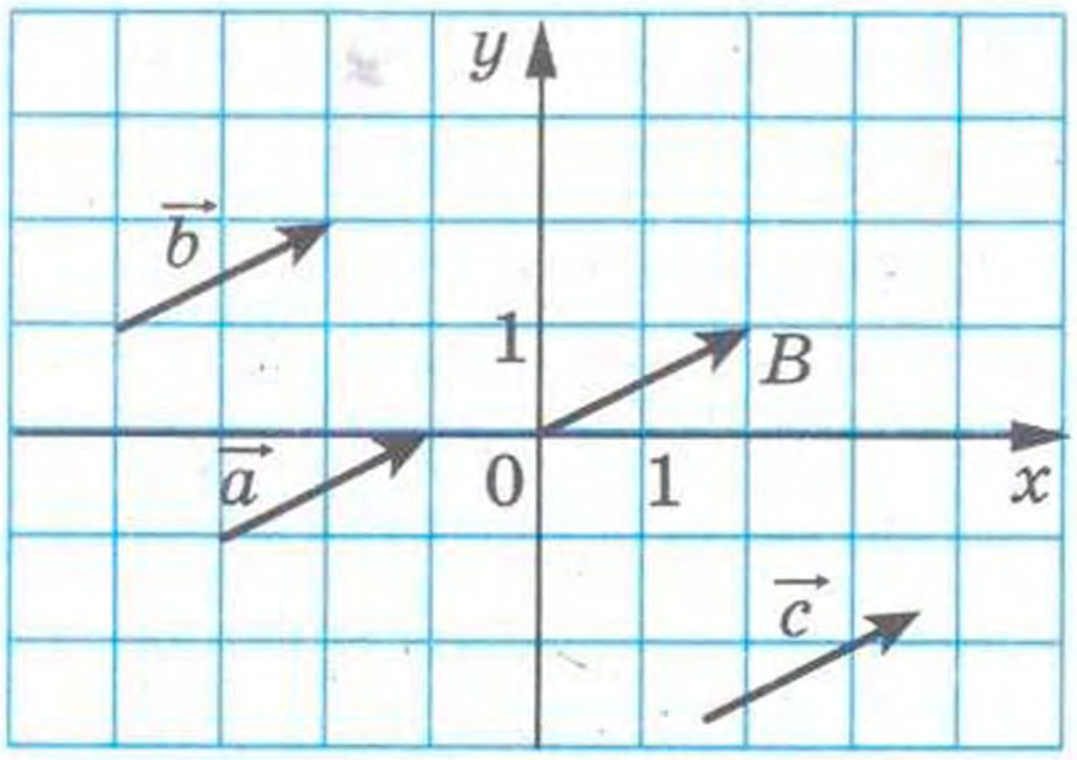


Рис. 15.2

Справедливе й обернене твердження: ***якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.***

Справді, якщо відкласти такі вектори від початку координат, то їх кінці збігатимуться.

Очевидно, що нульовий вектор має координати (0; 0).

Теорема 15.1. ***Якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.***

Доведення. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то теорема є очевидною. Нехай тепер $\vec{a} \neq \vec{0}$. Відкладемо від початку координат вектор $\overrightarrow{OM}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$. Якщо позначити координати точки M через $(a_1; a_2)$, то треба довести рівності $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, скориставшись результатом задачі 14.27, можемо зробити висновок, що середини відрізків OB і AM збігаються. Координати середин відрізків OB і AM відповідно дорівнюють $\left(\frac{0+x_2}{2}; \frac{0+y_2}{2}\right)$ і $\left(\frac{x_1+a_1}{2}; \frac{y_1+a_2}{2}\right)$. Тоді $\frac{0+x_2}{2} = \frac{x_1+a_1}{2}$, $\frac{0+y_2}{2} = \frac{y_1+a_2}{2}$. Ці рівності залишаються справедливими і тоді, коли точка O збігається з точкою B або точка A збігається з точкою M.

Звідси $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ▲

З формули відстані між двома точками випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Приклад. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(3; -2)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -3)$. Знайдіть координати вершини D.

Розв'язання. Оскільки чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Отже, координати цих векторів рівні.

Нехай координати точки D дорівнюють $(x;\ y)$. Для знаходження координат векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ скористаємося теоремою 15.1. Маємо:

$\overrightarrow{AB}(-4-3;\ 1-(-2))=\overrightarrow{AB}(-7;3)$; $\overrightarrow{DC}(-2-x;\ -3-y)$. Звідси

$$\begin{cases}-7=-2-x,\\ 3=-3-y;\end{cases}\quad \begin{cases}x=5,\\ y=-6.\end{cases}$$

Відповідь: $D\ (5;\ -6)$.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

15.1.° За допомогою циркуля і лінійки побудуйте точку, координати якої дорівнюють координатам даного вектора $\vec{a}$ (рис. 15.3).

15.2.° Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}(-3;2)$, $\vec{b}(0;-2)$, $\vec{c}(4;0)$.

15.3.° Відкладіть від точки $M\ (-1;\ 2)$ вектори $\vec{a}(1;-3)$, $\vec{b}(-2;0)$, $\vec{c}(0;-1)$.

ВПРАВИ

15.4.° Знайдіть координати векторів, зображених на рисунку 15.4.

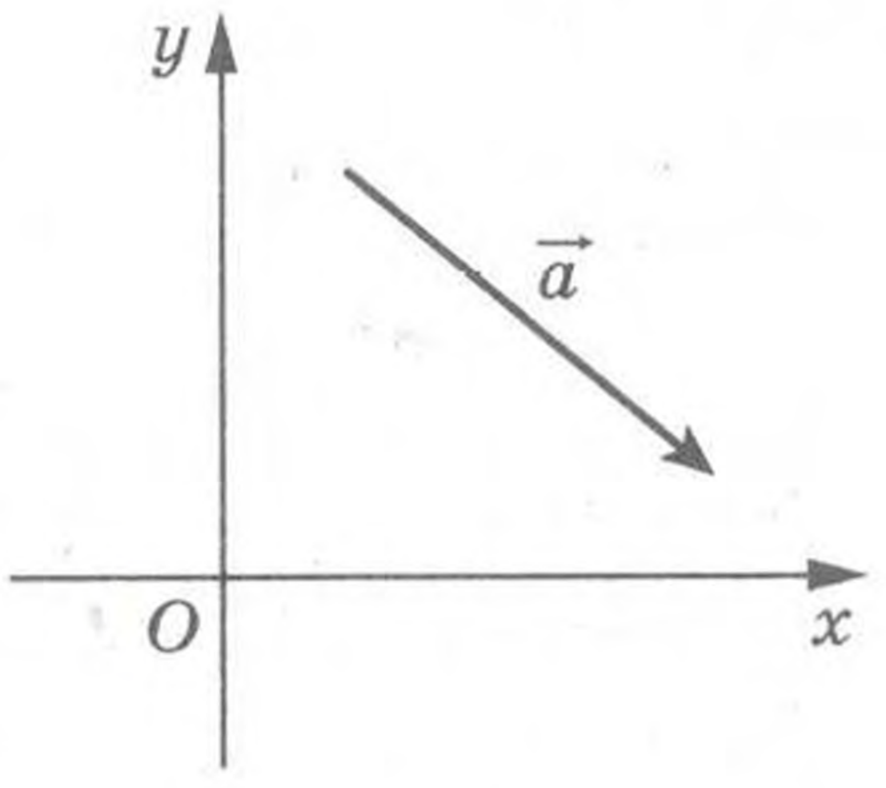


Рис. 15.3

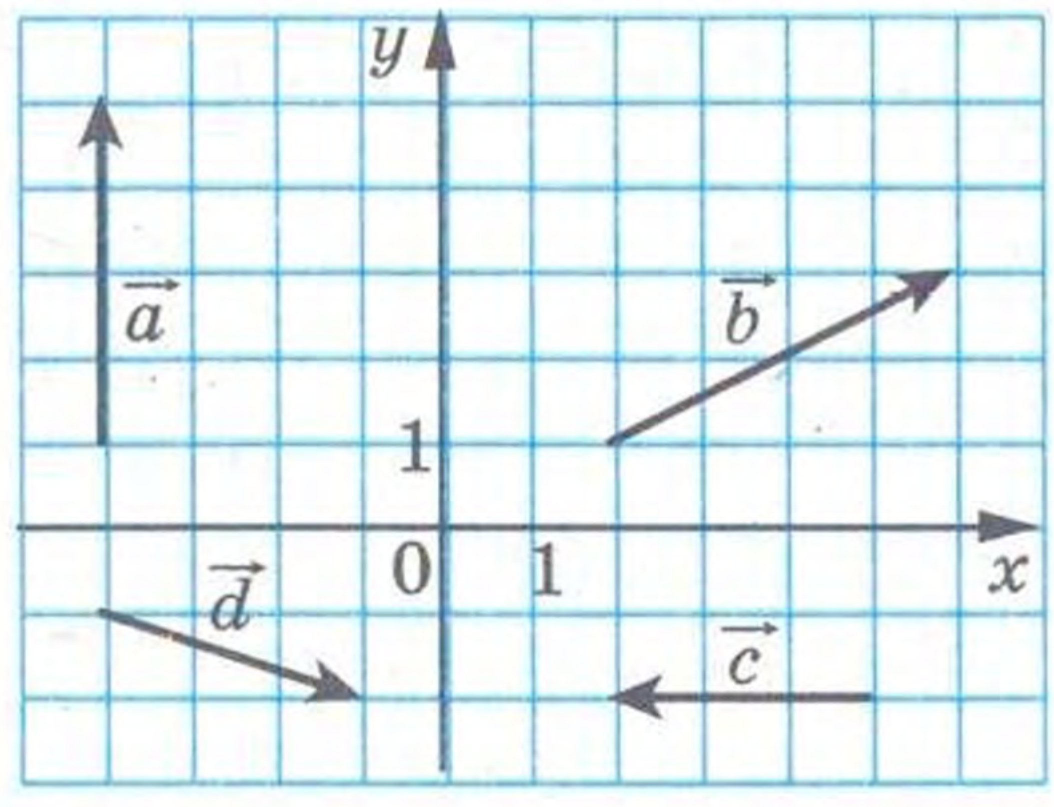


Рис. 15.4

15.5.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
1) A (2; 3), B (−1; 4);
2) A (0; 0), B (−2; −8);
3) A (m; n), B (p, k).

15.6.° Дано точку A (1; 3) і вектор $\vec{a}(-2;1)$. Знайдіть координати точки B такої, що $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$.

15.7.° Дано точки A (3; −7), B (4; −5), C (5; 8). Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

15.8.° Від точки A (4; −3) відкладено вектор $\vec{m}(-1;8)$. Знайдіть координати кінця вектора.

15.9.° Дано точки A (3; −4), B (−2; 7), C (−4; 16), D (1; 5). Доведіть, що $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

15.10.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (1; −5), B (2; 3), C (−3; 1), D (−4; −7) є паралелограмом.

15.11.° Серед векторів $\vec{a}(3;-4)$, $\vec{b}(-4;2)$, $\vec{c}\left(3;\sqrt{11}\right)$, $\vec{d}(-2;-4)$, $\vec{e}\left(-1;-2\sqrt{6}\right)$, $\vec{f}(-4;5)$ знайдіть такі, що мають рівні модулі.

15.12.° Дано точки A (1; −4), B (−2; 5), C (1 + a; −4 + b), D (−2 + + a; 5 + b). Доведіть, що $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

15.13.° Модуль вектора $\vec{a}(x;-8)$ дорівнює 10. Знайдіть x.

15.14.° При яких значеннях y модуль вектора $\vec{b}(12;y)$ дорівнює 13?

15.15.° Відрізок BM — медіана трикутника з вершинами A (3; −5), B (2; −3), C (−1; 7). Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

15.16.° Точки A (−1; 3), B (5; 0), C (2; −3) є вершинами трикутника ABC, медіани якого перетинаються в точці M. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

15.17.° Точка F ділить сторону BC прямокутника $ABCD$ у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини B (рис. 15.5). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{FD}$.

15.18.° Точка E — середина сторони AC прямокутника $OACD$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{DE}$ і $\overrightarrow{EO}$ (рис. 15.6).

15.19.° Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10. Його перша координата на 2 більша за другу. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

15.20.° Модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює 2, а його координати рівні. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.

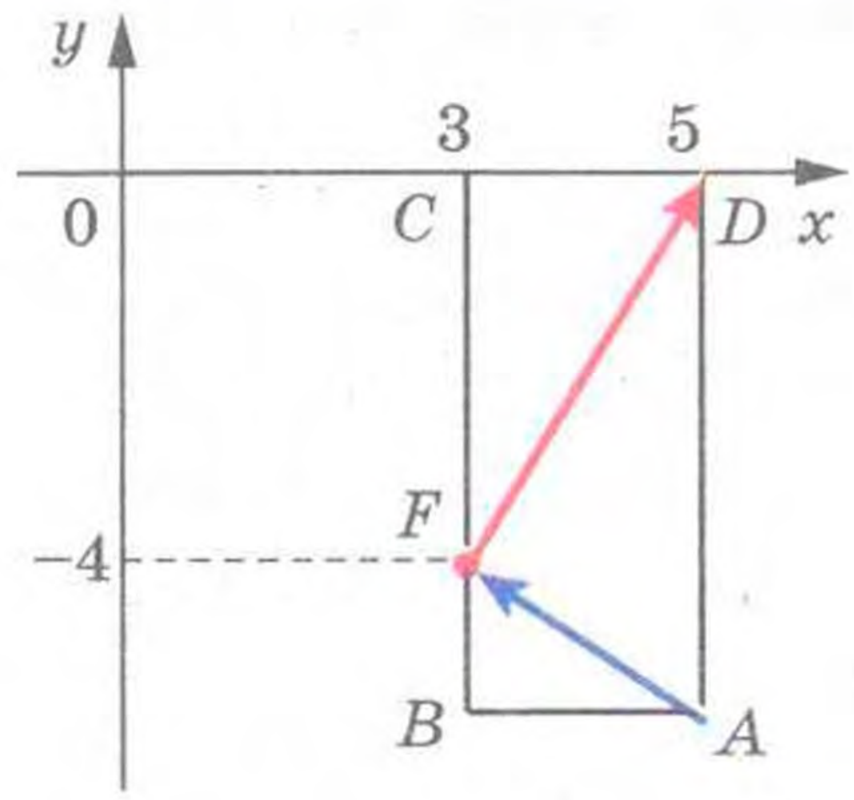


Рис. 15.5

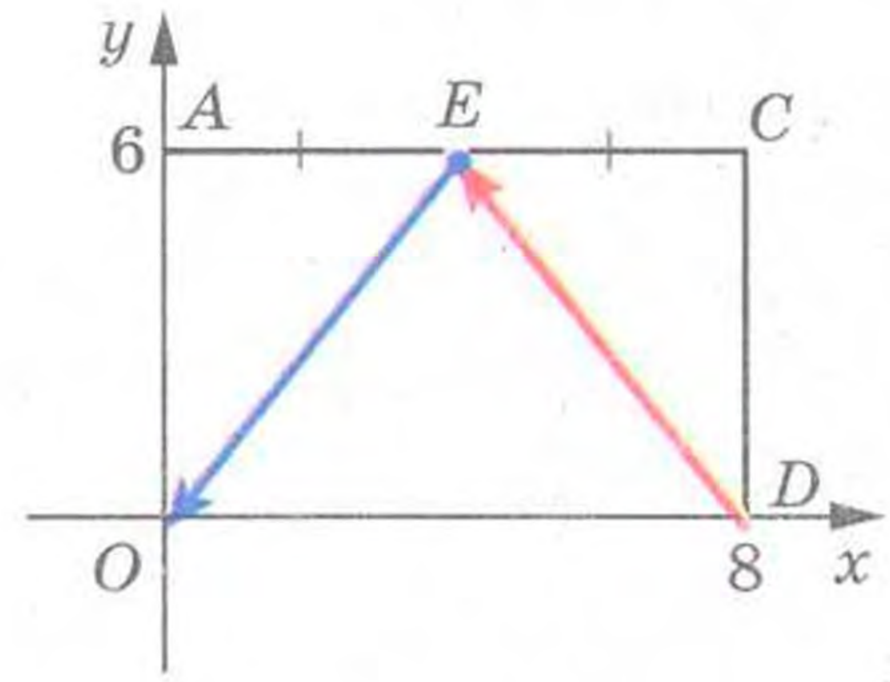


Рис. 15.6

15.21.$^{\bullet}$ Точки A (2; 5) і B (7; 5) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 13. Знайдіть координати точок C і D.

15.22.$^{\bullet}$ Точки A (1; 2) і D (1; −6) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 17. Знайдіть координати вершин B і C.

16. Додавання і віднімання векторів

Якщо тіло перемістилося з точки A в точку B, а потім з точки B в точку C, то сумарне переміщення з точки A в точку C природно подати у вигляді вектора $\overrightarrow{AC}$, вважаючи цей вектор сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, тобто $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 16.1).

Цей приклад підказує, як ввести поняття «сума векторів», тобто як додати два дані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *рівний вектору* $\vec{a}$. *Далі від точки B відкладемо вектор* $\overrightarrow{BC}$, *рівний вектору* $\vec{b}$. *Вектор* $\overrightarrow{AC}$ *називають* **сумою векторів** $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ (рис. 16.2) і записують $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

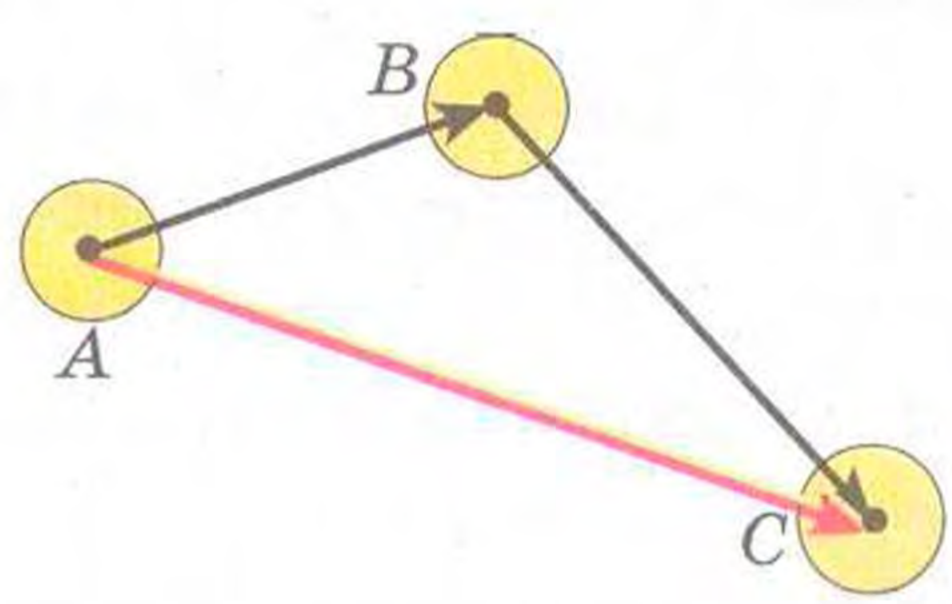


Рис. 16.1

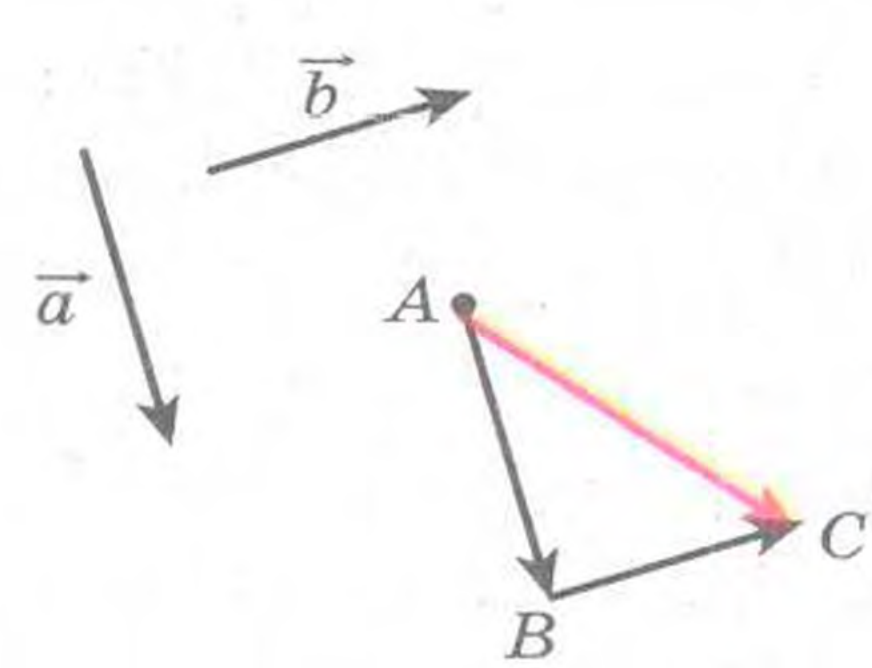
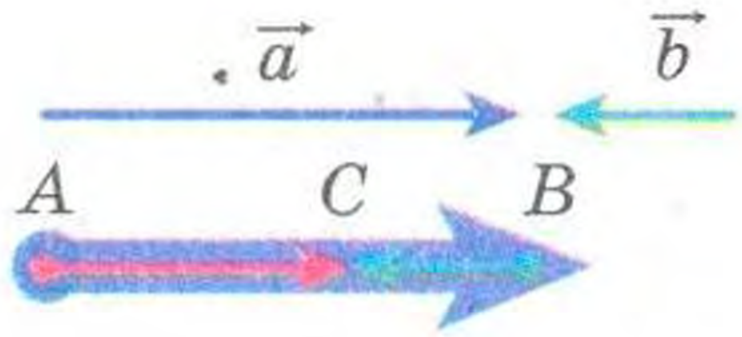


Рис. 16.2

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Ця назва пов'язана з тим, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то точки A, B і C є вершинами трикутника (рис. 16.2).

За правилом трикутника можна додавати й колінеарні вектори. На рисунку 16.3 вектор $\overrightarrow{AC}$ дорівнює сумі колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



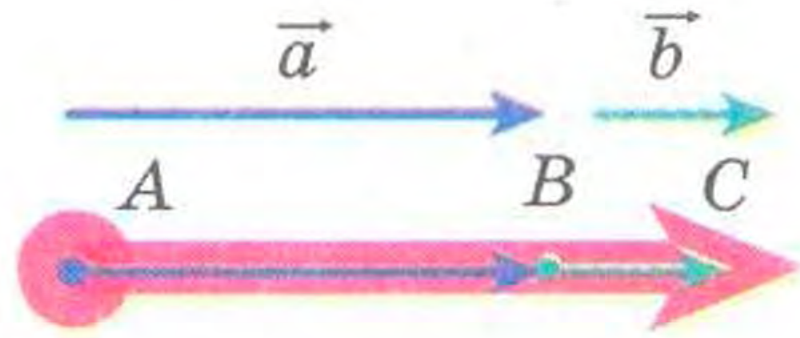


Рис. 16.3

Отже, ***для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, яка виражає **правило трикутника для додавання векторів**.

Теорема 16.1. ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1;\ a_2)$ і $(b_1;\ b_2)$, то координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнюють $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.***

Доведення. Нехай точки $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$ такі, що $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Тоді $\vec{a}\,(x_2-x_1; y_2-y_1)$, $\vec{b}\,(x_3-x_2; y_3-y_2)$;

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_1; y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_2+x_2-x_1; y_3-y_2+y_2-y_1)=$$
$$=\overrightarrow{AC}\,(a_1+b_1; a_2+b_2).\ \blacktriangle$$

Зауваження. Описуючи правило трикутника для знаходження суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ми відклали вектор $\vec{a}$ від довільної точки. Якщо точку A замінити точкою A_1, то замість вектора $\overrightarrow{AC}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, отримаємо деякий вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. З теореми 16.1 випливає, що координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ дорівнюють $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$, отже, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$. Це означає, що сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не залежить, від якої точки відкладено вектор $\vec{a}$.

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переставна властивість);

3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сполучна властивість).

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

З переставної і сполучної властивостей додавання векторів випливає, що при додаванні кількох векторів можна міняти місцями доданки і розставляти дужки у будь-який спосіб.

Правило трикутника дозволяє знаходити суму трьох і більше векторів. Наприклад, знайдемо суму векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$, зображених на рисунку 16.4.

Від довільної точки A_1 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$; від точки A_2 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_2A_3}=\vec{b}$; від точки A_3 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_3A_4}=\vec{c}$; від точки A_4 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_4A_5}=\vec{d}$. Знайдемо суму $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}$.

Маємо: $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}\right)+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=$

$$=\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=\left(\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}\right)+\overrightarrow{A_4A_5}=\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=\overrightarrow{A_1A_5}.$$

Узагалі, для будь-яких точок A_1, A_2, A_3, ..., A_n виконується рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

У фізиці часто доводиться додавати вектори, відкладені від однієї точки. Так, якщо до тіла прикладено сили $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ (рис. 16.5), то рівнодійна цих сил дорівнює сумі $\vec{F_1}+\vec{F_2}$.

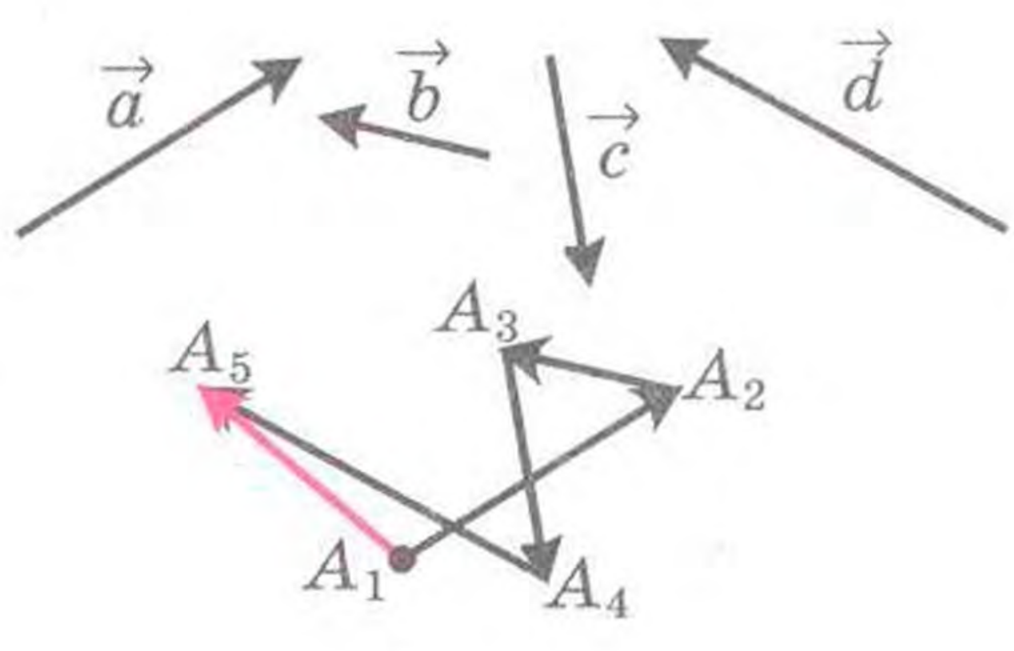


Рис. 16.4

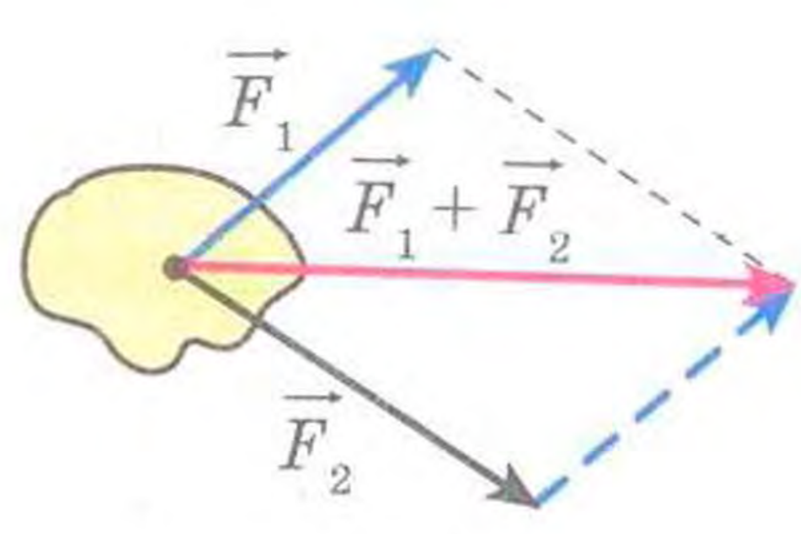


Рис. 16.5

Для знаходження суми двох неколінеарних векторів, відкладених від однієї точки, зручно користуватися **правилом паралелограма для додавання векторів**.

Нехай потрібно знайти суму неколінеарних векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ (рис. 16.6). Відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AD}$. Тоді за правилом трикутника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм з діагоналлю AC.

Наведені міркування дозволяють сформулювати правило паралелограма для додавання неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *рівний вектору* $\vec{a}$, *і вектор* $\overrightarrow{AD}$, *рівний вектору* $\vec{b}$. *Побудуємо паралелограм* $ABCD$ (рис. 16.7). *Тоді шукана сума* $\vec{a}+\vec{b}$ *дорівнює вектору* $\overrightarrow{AC}$.

Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Пишуть: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, рівний різниці заданих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 16.8). Тоді вектор $\overrightarrow{BA}$ буде різницею $\vec{a}-\vec{b}$. Справді, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. Отже, за означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.

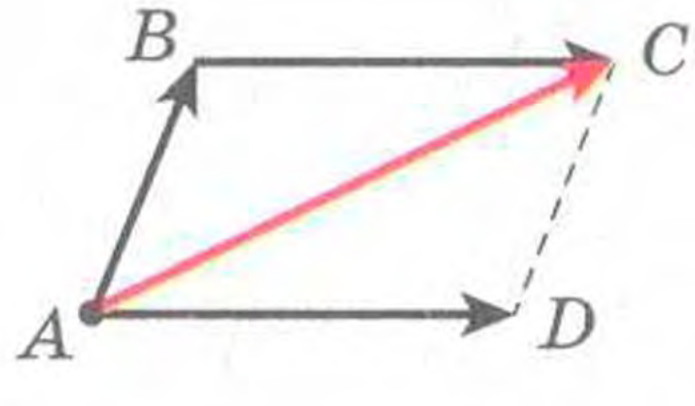


Рис. 16.6

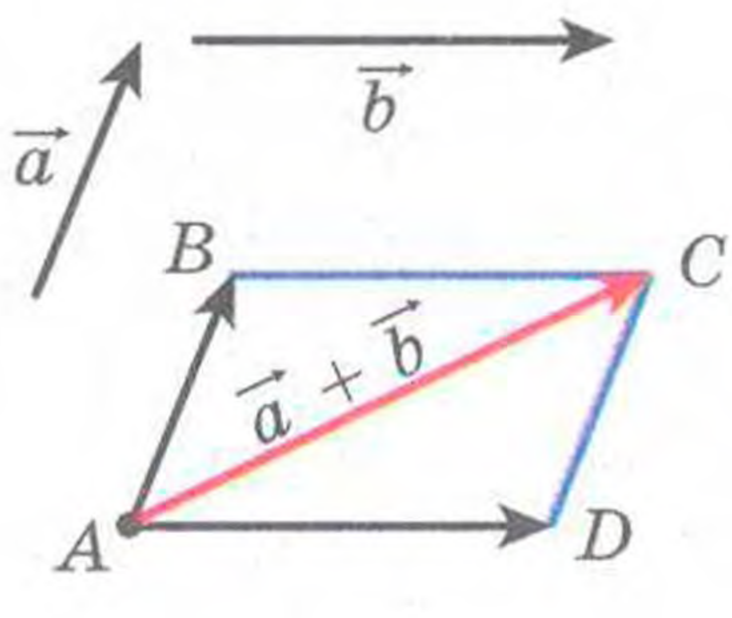


Рис. 16.7

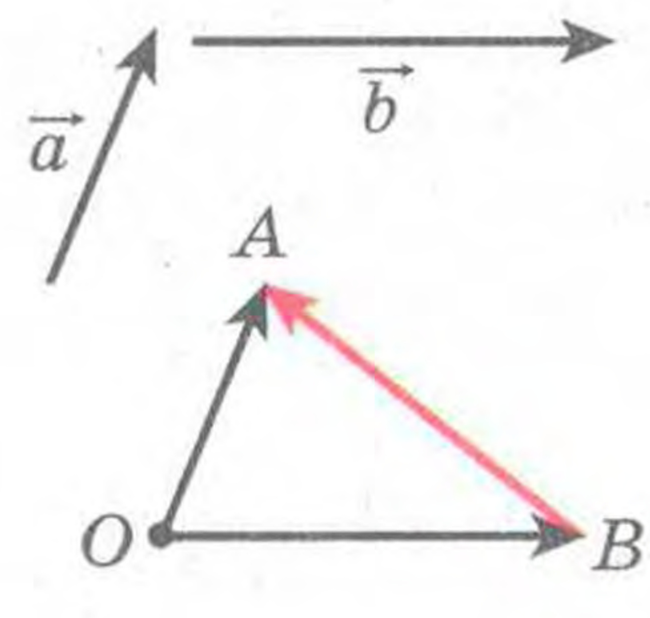
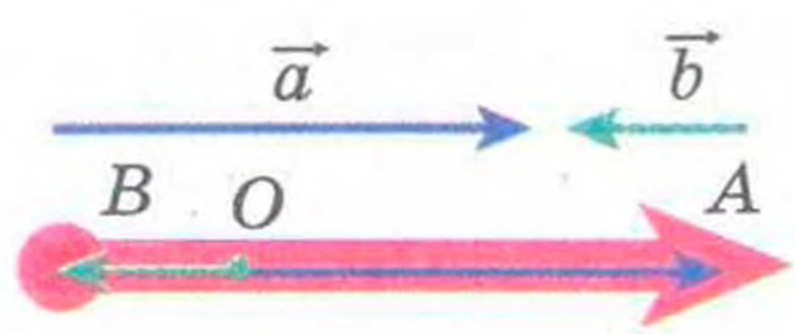


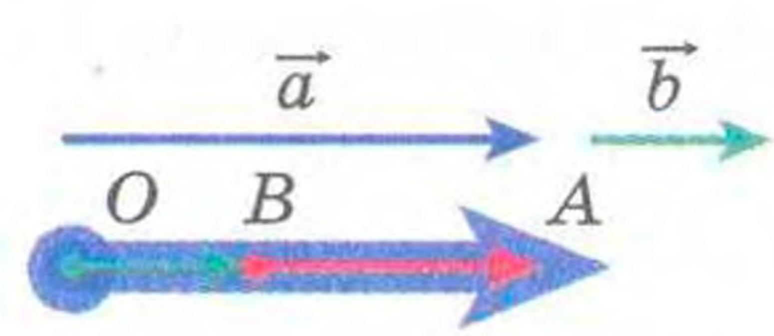
Рис. 16.8

На рисунку 16.8 вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ неколінеарні. Проте описаний алгоритм можна застосовувати і для знаходження різниці колінеарних векторів. На рисунку 16.9 вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Отже, ***для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність*** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, яка виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки.



а)



б)

Рис. 16.9

Теорема 16.2. ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a}-\vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

З цієї теореми випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ існує єдиний вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$.

Означення. Два ненульові вектори називають протилежними, якщо їх модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежні, то кажуть, що вектор $\vec{a}$ **протилежний** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ — протилежний вектору $\vec{a}$.

Вектором, протилежним нульовому вектору, вважають нульовий вектор.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають так: $-\vec{a}$.

З означення випливає, що вектору $\overrightarrow{AB}$ протилежним є вектор $\overrightarrow{BA}$. Тоді ***для будь-яких точок A і B виконується рівність*** $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

З правила трикутника випливає, що

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

А з цієї рівності випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати $(-a_1; -a_2)$.

Теорема 16.3. ***Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.***

Для доведення достатньо порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівності. Зробіть це самостійно.

Теорема 16.3 дозволяє звести віднімання векторів до додавання: *щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, можна до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$* (рис. 16.10).

Приклад. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 16.11). Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$ через вектори $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

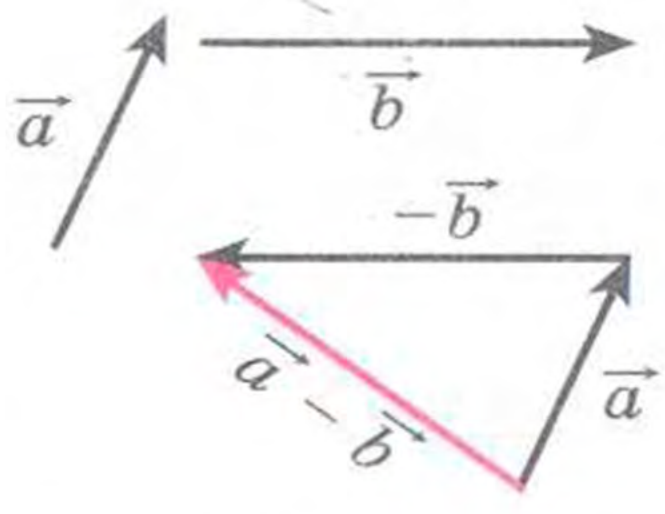


Рис. 16.10

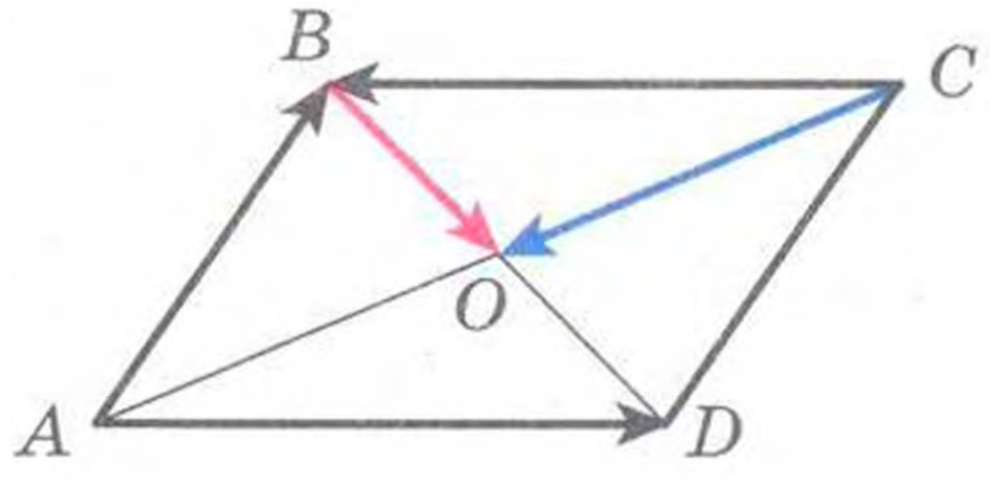


Рис. 16.11

Розв'язання. Оскільки точка O — середина відрізків BD і AC, то $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

Маємо: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BO}=-\vec{a}-\vec{b}$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$;

$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}$.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

16.1.° За допомогою правила трикутника побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 16.12.

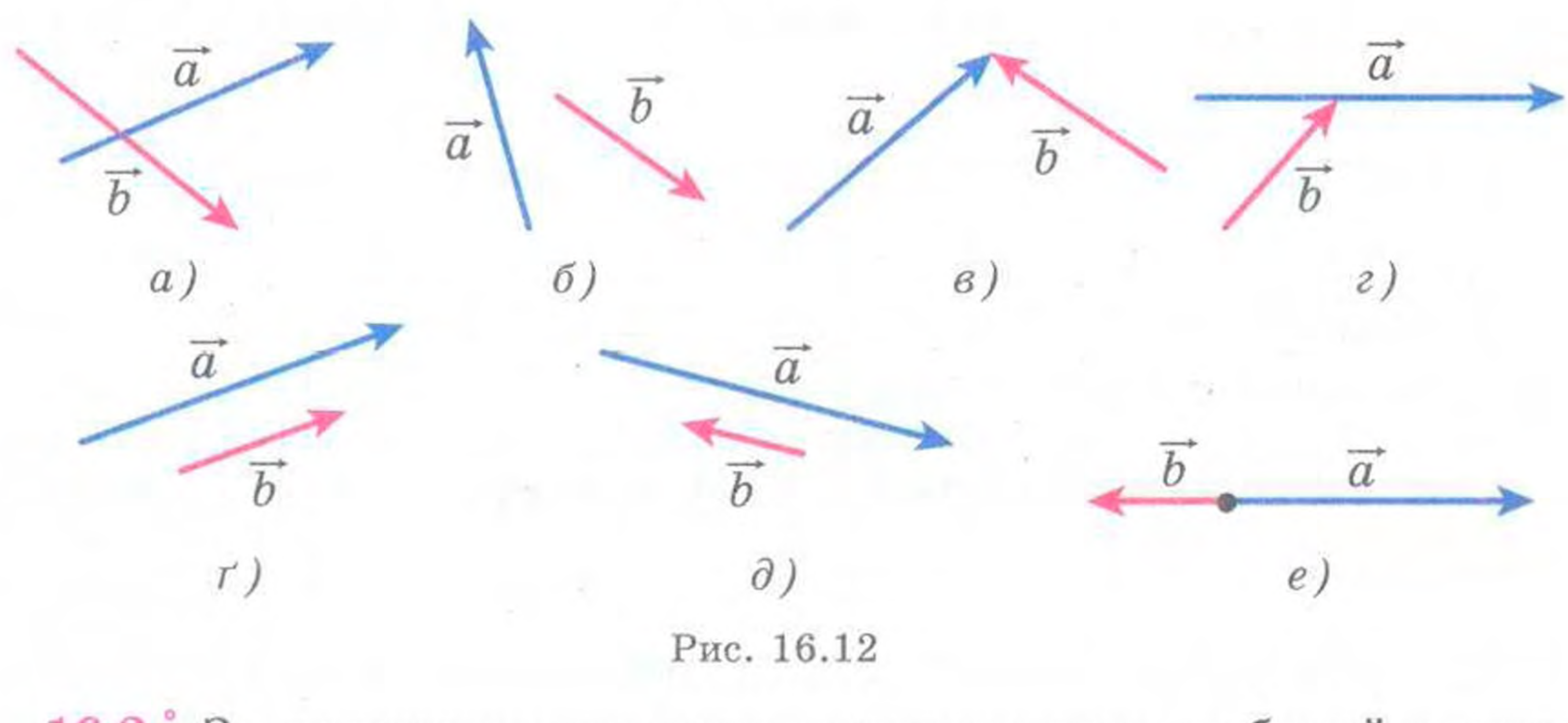


Рис. 16.12

16.2.° За допомогою правила паралелограма побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 16.12, *а*) – *г*).

16.3.° Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 16.12, побудуйте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

16.4.° Накресліть трикутник ABC. Відкладіть від точки A вектор, протилежний вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

16.5.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

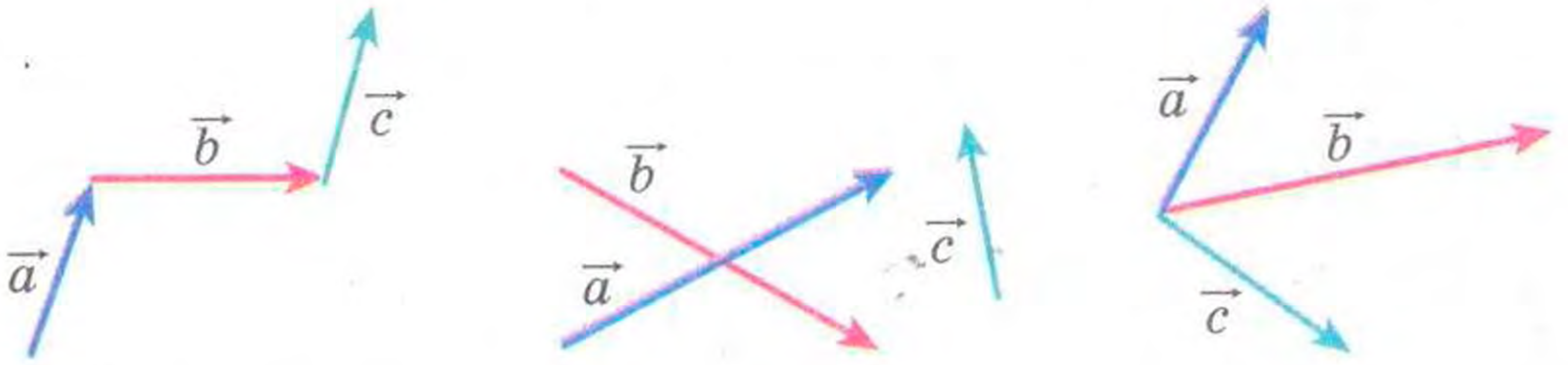
16.6.° Накресліть трикутник MNP. Побудуйте вектори $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

16.7.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

16.8.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

16.9.° Позначте чотири точки M, N, P, Q. Побудуйте вектор $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

16.10.° Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, зображених на рисунку 16.13, побудуйте вектор: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.



а) *б)* *в)*

Рис. 16.13

16.11.° Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб сума двох з них дорівнювала третьому вектору.

16.12.° Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб їх сума дорівнювала нуль-вектору.

16.13.° Для точок A, B, C, D, зображених на рисунку 16.14, побудуйте вектор $\vec{x}$ такий, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.

16.14.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте таку точку X, що:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$;

2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

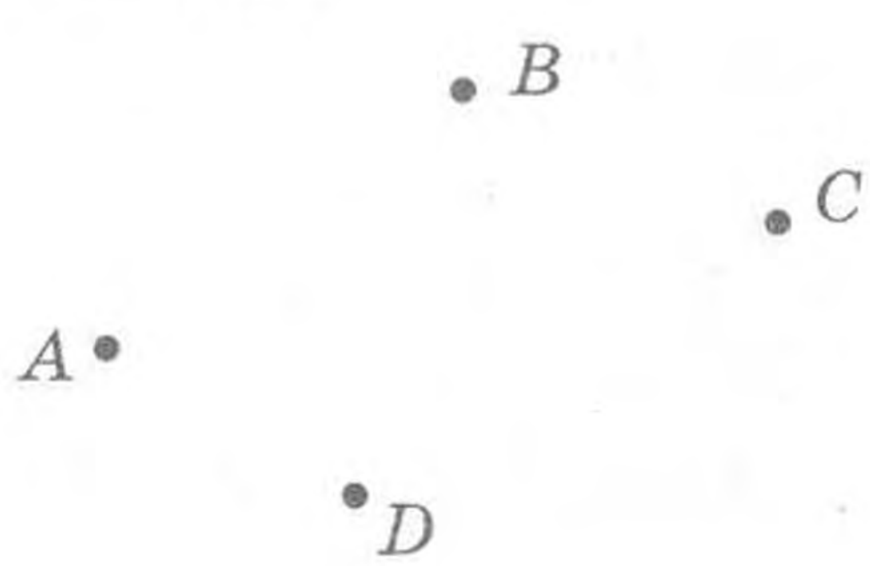


Рис. 16.14

ВПРАВИ

16.15.° Дано трикутник ABC. Виразіть вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектори:

1) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$;
2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

16.16.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

16.17.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ через вектори $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$.

16.18.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

16.19.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C, D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$;
3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

16.20.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C, D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

16.21.° Точки M і N — середини відповідно сторін BA і BC трикутника ABC. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NB}$ через вектори $\overrightarrow{BM}=\vec{m}$ і $\overrightarrow{BN}=\vec{n}$.

16.22.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

16.23.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

16.24.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

16.25.° Дано вектори $\vec{a}(4;-5)$ і $\vec{b}(-1;7)$. Знайдіть:

1) координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$;
2) $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.

16.26.° Дано точки A (1; –3), B (4; 5), C (–2; –1), D (3; 0). Знайдіть:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$.

16.27.° Сума векторів $\vec{a}(5;-3)$ та $\vec{b}(x;4)$ дорівнює вектору $\vec{c}(2;y)$. Знайдіть x та y.

16.28.° Сума векторів $\vec{a}(x;-1)$ та $\vec{b}(2;y)$ дорівнює вектору $\vec{c}(-3;4)$. Знайдіть x та y.

16.29.° Дано вектор $\overrightarrow{MN}(3;-5)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{NM}$.

16.30.° Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 3 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

16.31.° Катет рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) дорівнює 4 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|$.

16.32.° Дано точки N (3; –5) і F (4; 1). Знайдіть $|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}|$ та $|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}|$, де O — довільна точка.

16.33.° Доведіть, що для будь-яких n точок A_1, A_2, ..., A_n виконується рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$.

16.34.° Виразіть вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 16.15).

16.35.° У паралелограмі $ABCD$ точки M, N, K — середини відповідно сторін AB, BC і CD. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{MN}=\vec{m}$, $\overrightarrow{KN}=\vec{n}$.

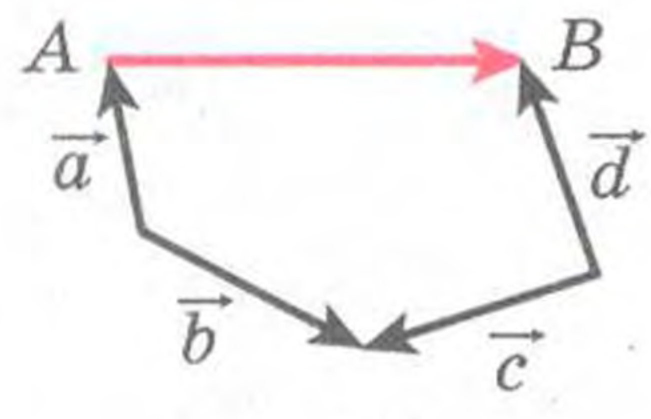


Рис. 16.15

16.36.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{DO}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$.

16.37.° Дано чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{DA}$, де M — довільна точка.

16.38.° Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$, де M — довільна точка.

16.39.° Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

16.40.° У трикутнику ABC проведено медіану BM. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

16.41.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

16.42.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a}-\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

16.43.• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Доведіть, що $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

16.44.• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Доведіть, що $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

16.45.• Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:

1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

16.46.• Доведіть, що для паралелограма $ABCD$ і довільної точки X виконується рівність $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

16.47.•• Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Відомо, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

16.48.•• Вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{EF}$ попарно неколінеарні, причому $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам MN, PQ і EF.

16.49.•• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{AB}|$.

16.50.•• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{BX}|$.

16.51.•• Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведіть, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

16.52.•• Доведіть, що для будь-яких n точок A_1, A_2, ..., A_n існує єдина точка M така, що $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$.

16.53.* На сторонах трикутника ABC у зовнішній бік побудовано паралелограми AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непаралельні. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2.

17. Множення вектора на число. Застосування векторів до розв'язування задач

Нехай дано ненульовий вектор $\vec{a}$. На рисунку 17.1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}+\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{CD}$, рівний вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, що

$$|\overrightarrow{AB}|=2|\vec{a}| \text{ і } \overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{a},$$
$$|\overrightarrow{CD}|=3|\vec{a}| \text{ і } \overrightarrow{CD}\uparrow\downarrow\vec{a}.$$

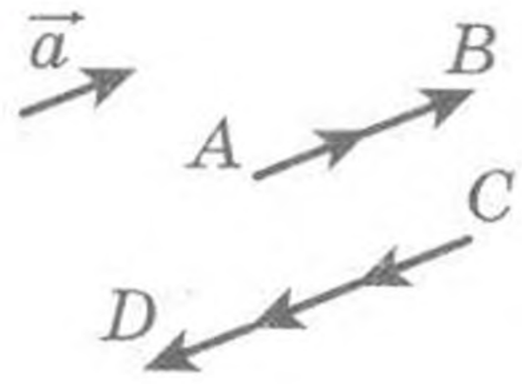


Рис. 17.1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ природно позначити $2\vec{a}$ і вважати, що його отримано в результаті **множення вектора $\vec{a}$ на число** 2. Аналогічно можна вважати, що вектор $\overrightarrow{CD}$ отримано в результаті множення вектора $\vec{a}$ на число -3, і прийняти позначення $\overrightarrow{CD}=-3\vec{a}$.

Цей приклад підказує, як ввести поняття «множення вектора на число».

Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$;

2) якщо $k>0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $k<0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Пишуть: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a}=\vec{0}$ або $k=0$, то вважають, що $k\vec{a}=\vec{0}$.

На рисунку 17.2 зображено вектори $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\vec{a}$.

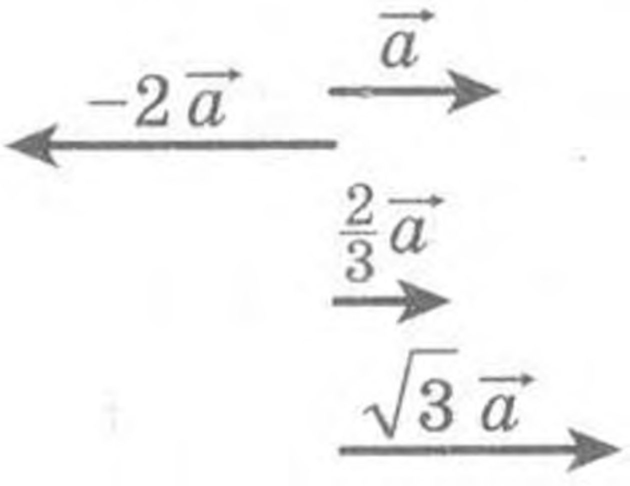


Рис. 17.2

З означення випливає, що

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a},$$
$$-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}.$$

Також з означення випливає, що *коли $\vec{b}=k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.*

А якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то чи можна подати вектор $\vec{b}$ у вигляді добутку $k\vec{a}$? Відповідь дає така теорема.

Теорема 17.1. ***Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a}\neq\vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b}=k\vec{a}$.***

Доведення. Якщо $\vec{b}=\vec{0}$, то при $k=0$ отримуємо, що $\vec{b}=k\vec{a}$. Якщо $\vec{b}\neq\vec{0}$, то або $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, або $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

1) Нехай $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Оскільки $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, отже, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Крім того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким чином, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ співнапрямлені і модулі їх рівні. Звідси $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Нехай $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для цього випадку завершіть доведення самостійно. ▲

Теорема 17.2. ***Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.***

Доведення. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то твердження теореми очевидне.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $k \neq 0$. Розглянемо вектор $\vec{b}(ka_1; ka_2)$. Покажемо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Маємо: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, рівні відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Оскільки пряма OA проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $ax + by = 0$.

Цій прямій належить точка $A\ (a_1; a_2)$. Тоді

$$a \cdot a_1 + b \cdot a_2 = 0. \text{ Звідси } a\ (ka_1) + b\ (ka_2) = 0.$$

Отже, точка $B\ (ka_1; ka_2)$ теж належить прямій OA, тому вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

При $k > 0$ числа a_1 і ka_1 мають однакові знаки (або обидва дорівнюють нулю). Ту ж властивість мають числа a_2 і ka_2. Отже, при $k > 0$ точки A і B лежать в одній чверті (або на одному координатному промені), тому вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ співнапрямлені (рис. 17.3), тобто $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k < 0$ вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ будуть протилежно напрямленими, тобто $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Отже, ми отримали, що $\vec{b} = k\vec{a}$. ▲

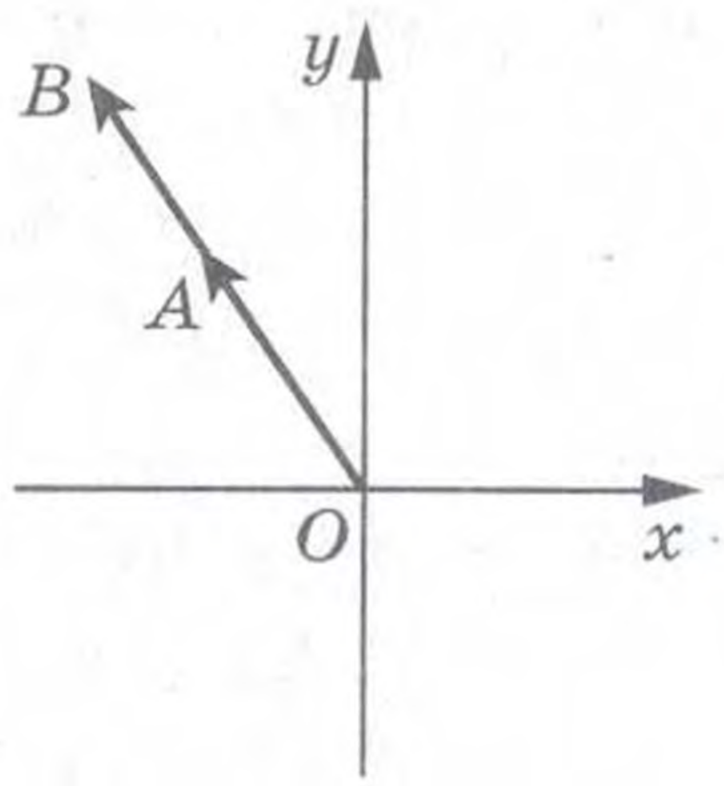


Рис. 17.3

Наслідок 1. ***Вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(ka_1; ka_2)$ колінеарні.***

Наслідок 2. ***Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.***

За допомогою теореми 17.2 можна довести такі властивості множення вектора на число.

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ виконуються рівності:

$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ (сполучна властивість);

$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (перша розподільна властивість);

$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (друга розподільна властивість).

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правих і лівих частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Ці властивості дозволяють перетворювати вирази, які містять суму векторів, їх різницю і добуток вектора на число аналогічно тому, як ми це робимо в алгебрі. Наприклад, $2(\vec{a}-3\vec{b})+3(\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{a}-6\vec{b}+3\vec{a}+3\vec{b} = 5\vec{a}-3\vec{b}$.

Теорема 17.3. ***Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори. Тоді для будь-якого вектора $\vec{c}$ існує єдина пара чисел $(x;\ y)$ така, що***

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що така пара $(x;\ y)$ існує.

Нехай $\vec{c} \parallel \vec{a}$. Тоді існує таке число k, що $\vec{c} = k\vec{a}$ (теорема 17.1). Звідси $\vec{c} = k\vec{a} + 0\vec{b}$. Отже, $(k;\ 0)$ — шукана пара чисел.

Нехай $\vec{c} \parallel \vec{b}$. Міркуючи аналогічно, отримуємо, що $\vec{c} = 0\vec{a} + m\vec{b}$, де m — деяке число.

Нехай вектор $\vec{c}$ не колінеарний ні вектору $\vec{a}$, ні вектору $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки O вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Через точку C проведемо прямі, паралельні прямим OA і OB. Отримаємо паралелограм OB_1CA_1 (рис. 17.4). Тоді за правилом паралелограма $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$.

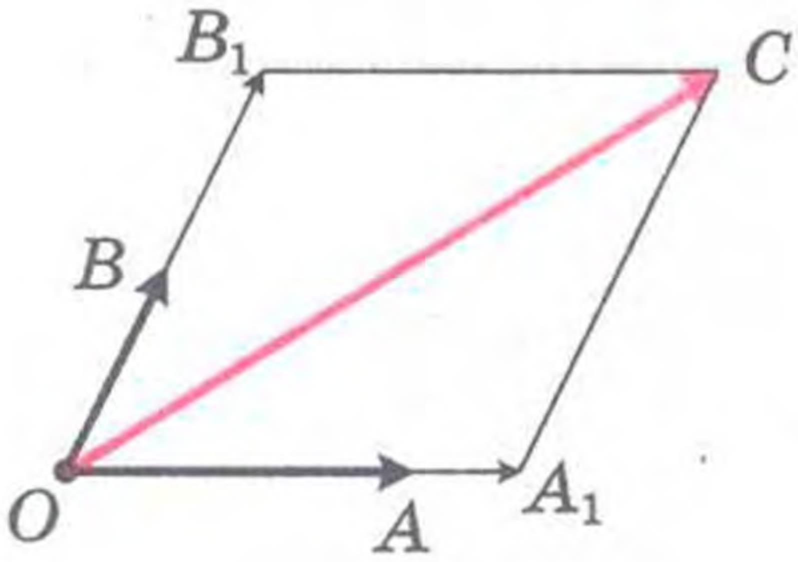


Рис. 17.4

Вектори в парах $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA}$ колінеарні. Отже, існують такі числа x і y, що $\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = y\overrightarrow{OB}$. Звідси $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, тобто

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Покажемо, що пара $(x; y)$ — єдина. Нехай існує ще одна пара $(x_1; y_1)$ така, що $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Тоді

$$\vec{0} = \vec{c} - \vec{c} = (x\vec{a} + y\vec{b}) - (x_1\vec{a} + y_1\vec{b}) = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}.$$

Звідси $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} = 0$.

Нехай $x \neq x_1$. Тоді $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$, що суперечить умові теореми. Отже, $x = x_1$. Аналогічно можна довести, що $y = y_1$. ▲

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні і для вектора $\vec{c}$ знайдено пару дійсних чисел $(x; y)$ таку, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то кажуть, що вектор $\vec{c}$ **розкладено за векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Упорядковану пару $(\vec{a}; \vec{b})$ неколінеарних векторів називають **базисом.** Якщо для вектора $\vec{c}$ виконується рівність $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорять, що вектор $\vec{c}$ **розкладено за базисом** $(\vec{a}; \vec{b})$. Упорядковану пару $(x; y)$ називають **координатами вектора** $\vec{c}$ **в базисі** $(\vec{a}; \vec{b})$.

Задача 1. Доведіть, що коли $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то точки O, A і B лежать на одній прямій.

Розв'язання. З умови випливає, що вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні. До того ж ці вектори відкладено від однієї точки O. Отже, точки O, A і B лежать на одній прямій.

Задача 2. Нехай M — така точка відрізка AB, що $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (рис. 17.5). Доведіть, що для будь-якої точки X виконується рівність:

$$\boxed{\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}} \qquad (*)$$

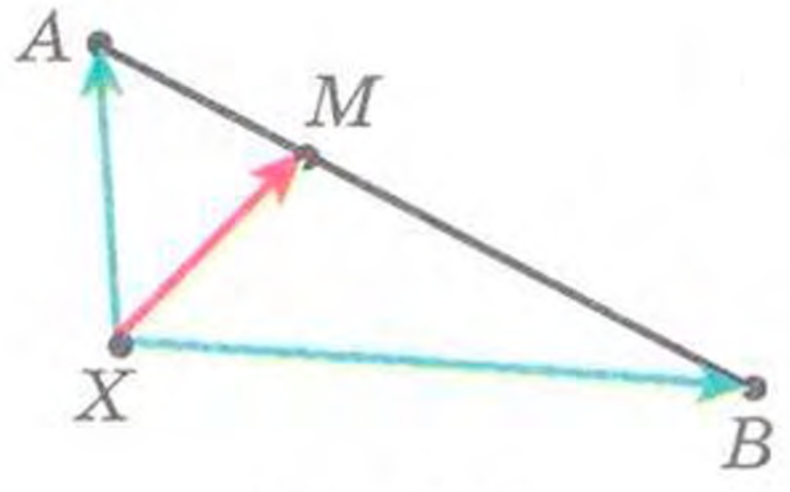


Рис. 17.5

Розв'язання.

Маємо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Оскільки $AM = \frac{m}{m+n}AB$,

то $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишемо $\overrightarrow{XM}-\overrightarrow{XA}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}$, то маємо:

$$\overrightarrow{XM}-\overrightarrow{XA}=\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}\right);$$

$$\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \blacktriangle$$

Якщо $m = n$, то точка M є серединою відрізка AB. Тоді формула (*) набуває вигляду

$$\boxed{\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right)} \qquad (**)$$

Властивості векторів широко застосовуються при розв'язуванні задач і доведенні теорем. Продемонструємо це на прикладах.

Приклад 1. Доведіть властивість медіан трикутника: *медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка поділяє кожну медіану у відношенні* 2 : 1, *рахуючи від вершини.*

Розв'язання. Нехай медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 17.6).

Позначимо $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AB_1}=\vec{d}$. Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ неколінеарні. Вони утворюють базис $(\vec{c};\vec{d})$.

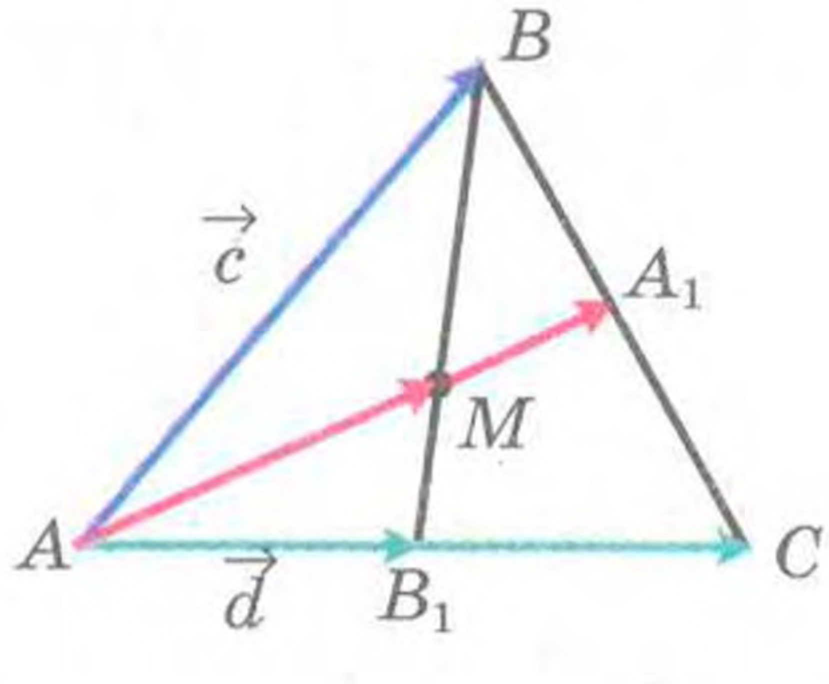


Рис. 17.6

Нехай $\dfrac{BM}{MB_1}=\alpha$. Записавши це відношення так: $\dfrac{BM}{MB_1}=\dfrac{\alpha}{1}$, можна за допомогою формули (*) розкласти вектор $\overrightarrow{AM}$ за базисом $(\vec{c};\vec{d})$:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{\alpha+1}\vec{c}+\frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{d}. \qquad (1)$$

Застосовуючи формулу (**), запишемо:

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\cdot 2\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ колінеарні, то існує таке число $k \neq 0$, що $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA_1}$. Звідси

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{2}\vec{c} + k\vec{d}. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) внаслідок єдиності розкладу вектора за базисом отримуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} = \dfrac{k}{2}, \\ \dfrac{\alpha}{\alpha+1} = k. \end{cases}$$ Звідси $\alpha = 2$.

Отже, $\dfrac{BM}{MB_1} = 2$, тобто ми показали, що медіана AA_1 поділяє медіану BB_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B. Подальше доведення вам відомо.

Приклад 2. Доведіть, що середини основ трапеції і точка перетину продовжень її бічних сторін лежать на одній прямій[1].

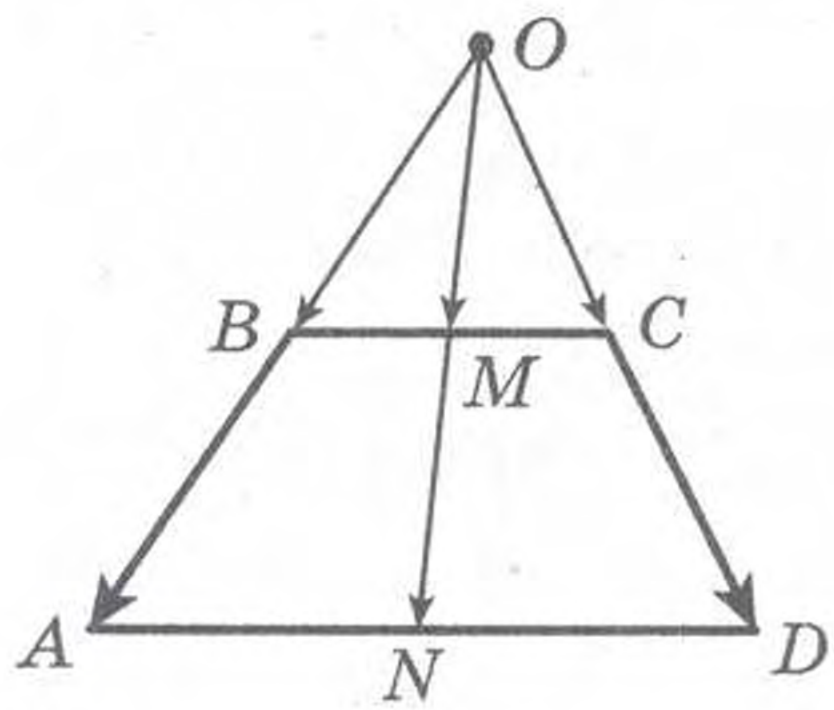


Рис. 17.7

Розв'язання. Нехай точки M і N — середини основ BC і AD трапеції $ABCD$, O — точка перетину прямих AB і CD (рис. 17.7).

Застосовуючи ключову задачу 2, запишемо:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}).$$

Оскільки вектори в парах $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ колінеарні, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, де k і k_1 — деякі числа.

Оскільки $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, то $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OC}{OD}$. Отже, $k = k_1$.

Маємо: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}) = k \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = k\overrightarrow{ON}$.

З ключової задачі 1 випливає, що точки O, M, N лежать на одній прямій.

Також за допомогою векторів можна довести, що прямій ON належить точка перетину діагоналей трапеції. Зробіть це самостійно.

---

[1] Два способи розв'язування цієї задачі було розглянуто у 8 класі («Геометрія-8», № 18.46).

Задача 3. Нехай M — точка перетину медіан трикутника ABC і X — довільна точка (рис. 17.8). Доведіть, що

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}).$$

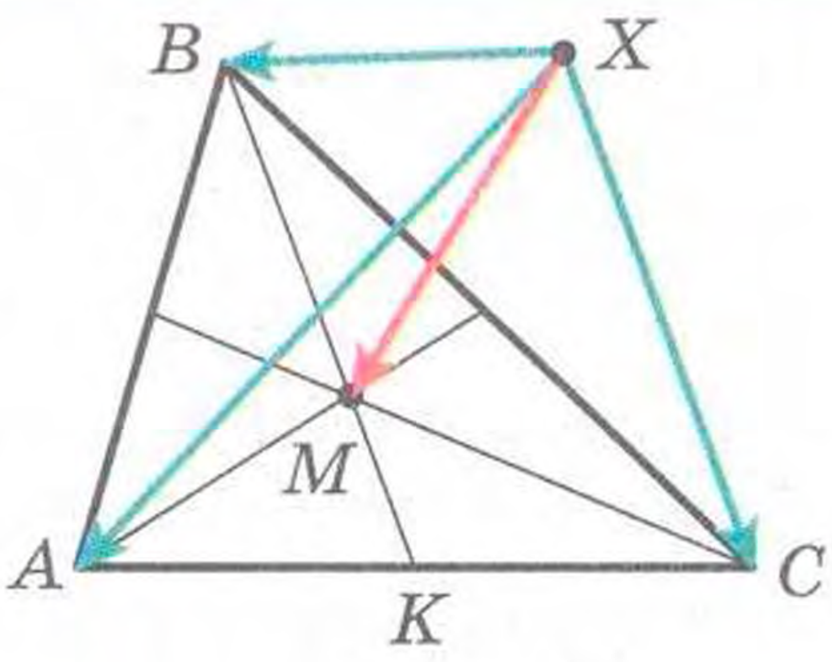


Рис. 17.8

Розв'язання. Нехай K — середина відрізка AC. Маємо: $BM : MK = 2 : 1$. Тоді, використовуючи ключову задачу 2, можна записати

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{XB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{XK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{XB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}).$$

Доведемо одну векторну рівність, яка пов'язує дві чудові[1] точки трикутника.

Задача 4. Доведіть, що коли точка H — ортоцентр трикутника ABC, а точка O —центр його описаного кола, то

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}. \qquad (***)$$

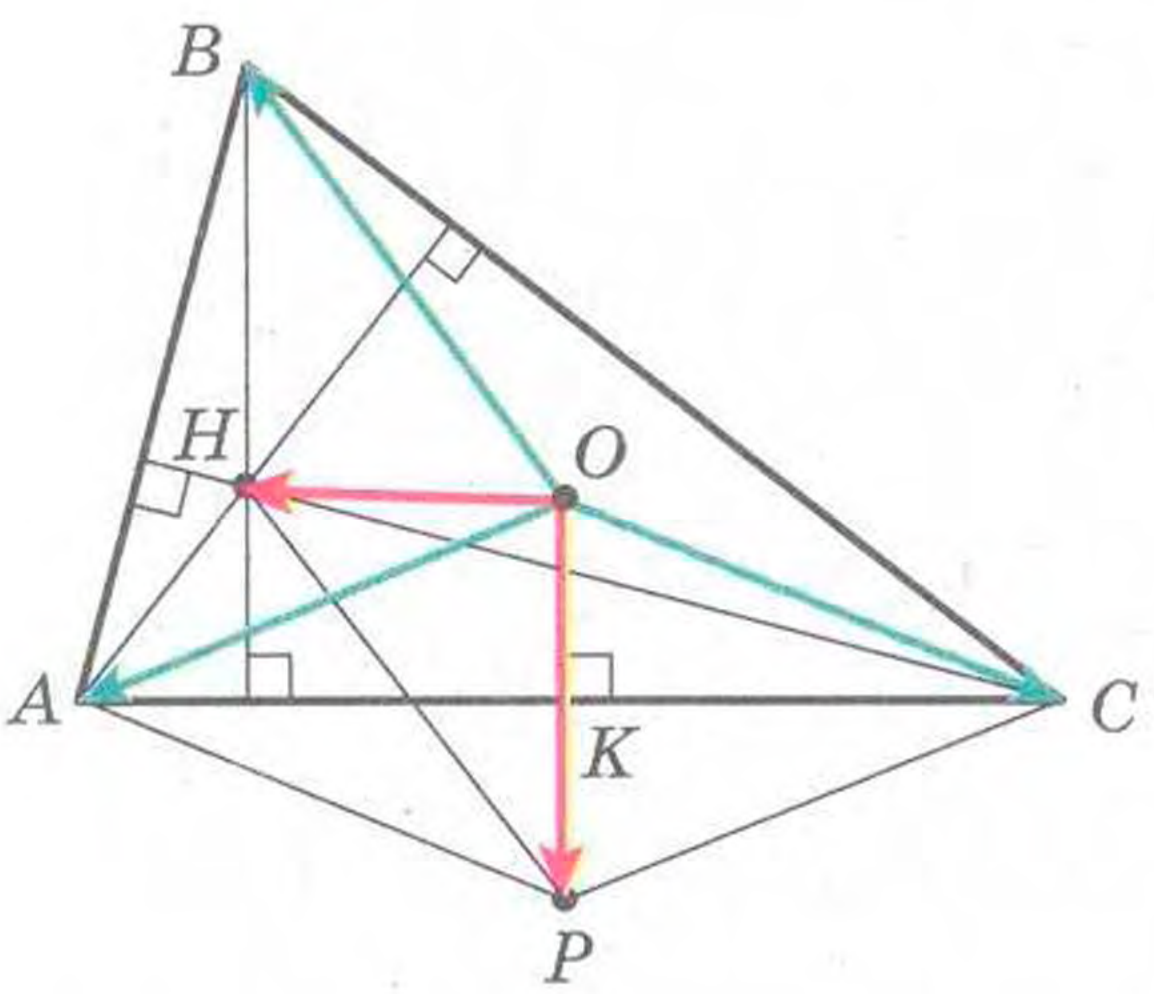


Рис. 17.9

Розв'язання. Для прямокутного трикутника рівність (***) є очевидною. Нехай тепер трикутник ABC не є прямокутним. Опустимо з точки O перпендикуляр OK на сторону AC трикутника ABC (рис. 17.9). У курсі геометрії 8 класу[2] було доведено, що $BH = 2OK$.

На промені OK позначимо точку P таку, що $OK = KP$. Тоді $BH = OP$. Оскільки $BH \parallel OP$, то чотирикутник $HBOP$ — паралелограм.

За правилом паралелограма $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}$.

Оскільки точка K є серединою відрізка AC, то в чотирикутнику $AOCP$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. Звідси $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$.

Маємо: $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$. ▲

---

[1] Про чудові точки трикутника див. «Геометрія-8», с. 136.

[2] Див. «Геометрія-8», с. 137.

Звернемося до векторної рівності $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC. Оскільки X — довільна точка, то рівність залишається правильною, якщо за точку X обрати точку O — центр описаного кола трикутника ABC.

Маємо: $3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Беручи до уваги рівність (***), отримуємо: $3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}$.

Ця рівність означає, що точки O, M і H лежать на одній прямій — **прямій Ейлера**[1].

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

17.1.° Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 17.10). Побудуйте вектор: 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

17.2.° Побудуйте два неколінеарні вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Позначте яку-небудь точку O. Від точки O відкладіть вектори:

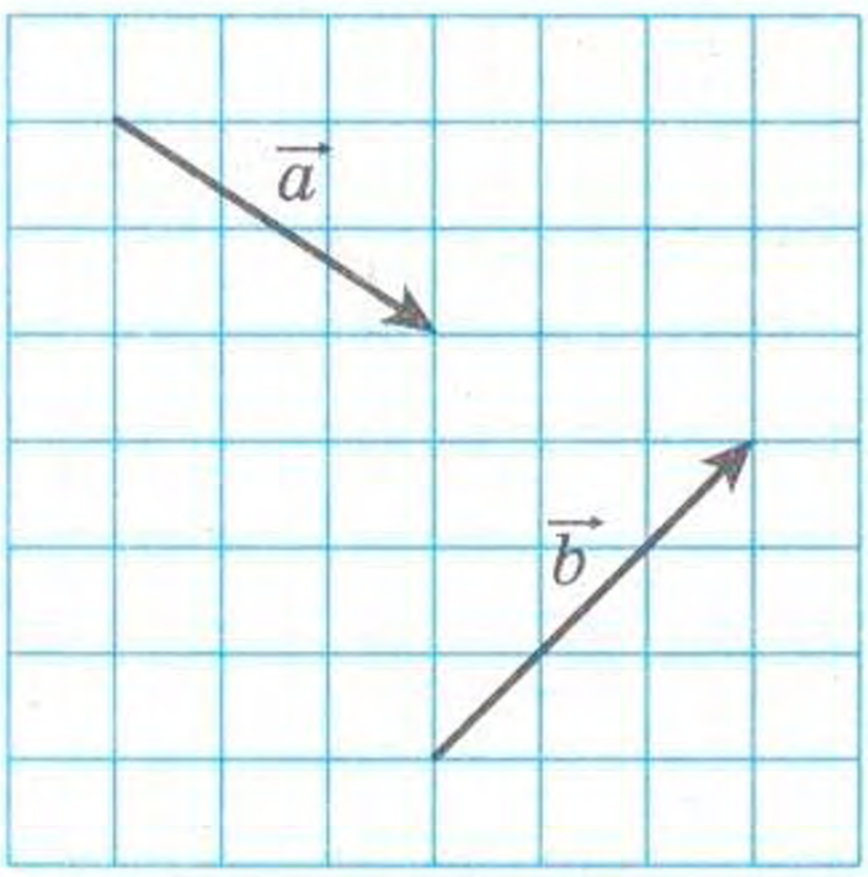


Рис. 17.10

1) $3\vec{x}+\vec{y}$;
2) $\vec{x}+2\vec{y}$;
3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$;
4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

17.3.° Позначте на площині три точки A, B і C такі, що:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$;
2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

17.4.° Накресліть трикутник ABC. Позначте точку M — середину сторони AC.

1) Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) Від точки B відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

17.5.° Накресліть трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Позначте точку M — середину сторони AB. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

---

[1] Див. «Геометрія-8», теорема 20.1, с. 136.

17.6.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектор, рівний вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, щоб його початок належав стороні AB, а кінець — стороні BC.

ВПРАВИ

17.7.° Знайдіть модулі векторів $3\vec{m}$ та $-\frac{1}{2}\vec{m}$, якщо $|\vec{m}|=4$.

17.8.° Який з векторів, $3\vec{a}$ або $-\frac{1}{3}\vec{a}$, співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$?

17.9.° Чи є ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямленими або протилежно напрямленими, якщо: 1) $\vec{b}=2\vec{a}$; 2) $\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b}=\sqrt{2}\vec{a}$? Знайдіть відношення $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

17.10.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть: 1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$; 3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

17.11.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

17.12.° У паралелограмі $ABCD$ на діагоналі AC позначено точку M так, що $AM : MC = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MC}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

17.13.° У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

17.14.° У трикутнику ABC точки M і N — середини сторін AB і BC відповідно. Виразіть: 1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$; 2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

17.15.° На відрізку AB завдовжки 18 см позначено точку C так, що $BC = 6$ см. Виразіть: 1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

17.16.° Дано вектор $\vec{a}(-4; 2)$. Знайдіть координати і модулі векторів $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{a}$.

17.17.° Дано вектор $\vec{b}(-6;12)$. Знайдіть координати і модулі векторів $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$, $\frac{2}{3}\vec{b}$.

17.18.° Дано вектор $\vec{a}(3;-2)$. Які з векторів $\vec{b}(-3;-2)$, $\vec{c}(-6;4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2};-1\right)$, $\vec{e}\left(-1;-\frac{2}{3}\right)$, $\vec{f}\left(-3\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ колінеарні вектору $\vec{a}$?

17.19.° Дано вектори $\vec{a}(3;-3)$ і $\vec{b}(-16;8)$. Знайдіть координати вектора: 1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$.

17.20.° Дано вектори $\vec{m}(-2;4)$ і $\vec{n}(3;-1)$. Знайдіть координати вектора: 1) $3\vec{m}+2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m}+2\vec{n}$; 3) $\vec{m}-3\vec{n}$.

17.21.° На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

17.22.° Точки O, A і B лежать на одній прямій. Доведіть, що існує таке число k, що $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$.

17.23.° На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{NM}$ за базисом $(\vec{a};\vec{b})$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

17.24.° На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки E і F так, що $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{EF}$ за базисом $(\vec{a};\vec{b})$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

17.25.° Серед векторів $\vec{a}(1;-2)$, $\vec{b}(-3;-6)$, $\vec{c}(-4;8)$, $\vec{d}(-1;-2)$ укажіть пари колінеарних векторів.

17.26.° Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, якщо $A(1; 1)$, $B(3; -2)$, $C(-1; 3)$, $D(5; -6)$.

17.27.° Дано вектори $\vec{m}(4;-6)$, $\vec{n}\left(-1;\frac{3}{2}\right)$, $\vec{k}\left(3;-\frac{9}{2}\right)$. Укажіть пари однаково напрямлених і протилежно напрямлених векторів.

17.28.° Знайдіть значення x, при яких вектори $\vec{a}(1;x)$ і $\vec{b}\left(\frac{x}{4};4\right)$ колінеарні.

17.29.° При яких значеннях y вектори $\vec{a}(2;3)$ і $\vec{b}(-1;y)$ колінеарні?

17.30.° Дано вектор $\vec{b}(-3;1)$. Знайдіть координати вектора, колінеарного вектору $\vec{b}$, модуль якого вдвічі більший за модуль вектора $\vec{b}$. Скільки розв'язків має задача?

17.31.° Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, протилежно напрямленого вектору $\vec{n}(5;-12)$, якщо $|\vec{m}|=39$.

17.32.° Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, співнапрямленого вектору $\vec{b}(-9;12)$, якщо $|\vec{a}|=5$.

17.33.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(14; 6)$, $D(2; -3)$ є трапецією.

17.34.° Доведіть, що точки $A(-1; 3)$, $B(4; -7)$, $D(-2; 5)$ лежать на одній прямій.

17.35.° Дано вектори $\vec{a}(1;-4)$, $\vec{b}(0;3)$, $\vec{c}(2;-17)$. Знайдіть такі числа x і y, що $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

17.36.° На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MC = 2 : 3$. Доведіть, що $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

17.37.° На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $BD : DC = 1 : 2$. Доведіть, що $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

17.38.• У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. На стороні BC позначено точку K так, що $BK : KC = 2 : 3$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{OK}$ за базисом $(\vec{a};\vec{b})$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

17.39.• Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O так, що $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ за базисом $(\vec{a};\vec{b})$, де $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

17.40.• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки K і F так, що $AK : KB = 1 : 2$ і $BF : FC = 2 : 3$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KF}$ за базисом $(\vec{m};\vec{n})$, де $\overrightarrow{BK}=\vec{m}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{n}$.

17.41.• На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MC = 1 : 3$ і $BN : NC = 4 : 3$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NM}$ за базисом $(\vec{k};\vec{p})$, де $\overrightarrow{BN}=\vec{k}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{p}$.

17.42.• Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Розкладіть вектор $\overrightarrow{BM}$ за базисом: 1) $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$; 2) $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA})$.

17.43.• За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трикутника.

17.44.$^{\bullet}$ За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трапеції.

17.45.$^{\bullet}$ Нехай точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$. За допомогою векторів доведіть, що $MN \parallel AD$.

17.46.$^{\bullet\bullet}$ Нехай точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

17.47.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N — відповідно середини протилежних сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що коли $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$, то $BC \parallel AD$.

17.48.$^{\bullet\bullet}$ Нехай точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

17.49.$^{\bullet\bullet}$ У коло вписано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ з ортоцентрами H і H_1 відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

17.50.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють медіанам даного трикутника.

17.51.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах BC, CA і AB трикутника ABC позначили відповідно точки A_1, B_1 і C_1 так, що $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам AA_1, BB_1, CC_1.

17.52.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N — середини відповідно сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють $\frac{1}{2}AC$, $\frac{1}{2}BD$ і MN.

17.53.$^{\bullet\bullet}$ Нехай точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що середини відрізків A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 лежать на одній прямій.

17.54.$^{\bullet\bullet}$ На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки M, N і B лежать на одній прямій.

17.55.$^{\bullet\bullet}$ Нехай M_1 і M_2 — точки перетину медіан відповідно трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$. Доведіть, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}\right)$.

17.56.** На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC обрано відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A}$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ збігаються.

17.57.* Чотирикутник $ABCD$ є вписаним. H_1, H_2, H_3 і H_4 — ортоцентри відповідно трикутників BCD, ACD, ABD і ABC. Доведіть, що середини відрізків AH_1, BH_2, CH_3 і DH_4 збігаються.

17.58.* Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло з центром у точці O. Доведіть, що коли $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

17.59.* Точка перетину відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника, збігається з точкою перетину його діагоналей. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом.

17.60.* Дано чотирикутник $ABCD$, середини сторін AB і CD та точка перетину діагоналей якого належать одній прямій. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

17.61.* У п'ятикутнику $ABCDE$ точки M, N, P і Q — середини сторін AB, BC, CD і DE відповідно. Точки K і F — середини відрізків MP і NQ відповідно. Доведіть, що $KF \parallel AE$ і $KF = \frac{1}{4}AE$.

17.62.* У чотирикутнику $ABCD$ точки M і N — середини сторін AB і CD відповідно. Точка K — середина відрізка MN. Медіани трикутника BCD перетинаються в точці P. Доведіть, що точки A, K і P лежать на одній прямій.

17.63.* З точки P, яка належить стороні AC рівностороннього трикутника ABC, на сторони AB і BC опущено перпендикуляри PE і PF відповідно. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ABC, середина відрізка EF і точка P лежать на одній прямій.

17.64.* Дано трикутник ABC і довільну точку O. Нехай точки P, Q і R — відповідно точки перетину медіан трикутників AOB, BOC, COA. Доведіть, що точка O і точки перетину медіан трикутників ABC і PQR лежать на одній прямій.

17.65.* Паралельні прямі, які проходять через вершини A, B і C трикутника ABC, перетинають його описане коло в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що ортоцентри H_1, H_2 і H_3 відповідно трикутників ABC_1, BCA_1 і CAB_1 лежать на одній прямій.

18. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульові і неспівнапрямлені вектори (рис. 18.1). Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a},\vec{b})$. Наприклад, на рисунку 18.1 $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$, а на рисунку 18.2 $\angle(\vec{m},\vec{n})=180°$.

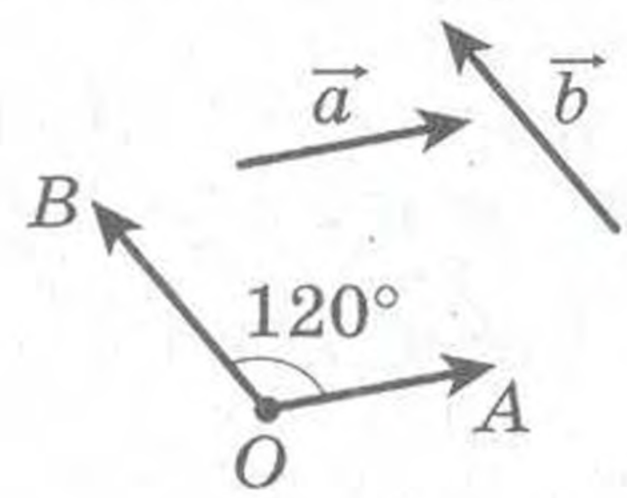


Рис. 18.1

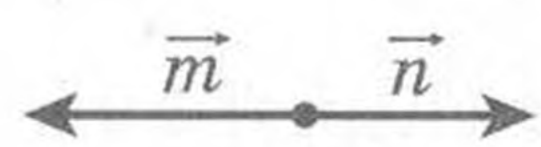


Рис. 18.2

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, то вважають, що $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$.

Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце нерівність:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a},\vec{b}) \leqslant 180°.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює $90°$. Пишуть: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ви вмієте додавати і віднімати вектори, множити вектор на число. Також з курсу фізики ви знаєте, що коли під впливом постійної сили $\vec{F}$ тіло перемістилося з точки A в точку B (рис. 18.3), то здійснена механічна робота дорівнює $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, де $\varphi=\angle(\vec{F},\overrightarrow{AB})$.

Цей факт підказує, що доцільно ввести ще одну дію над векторами.

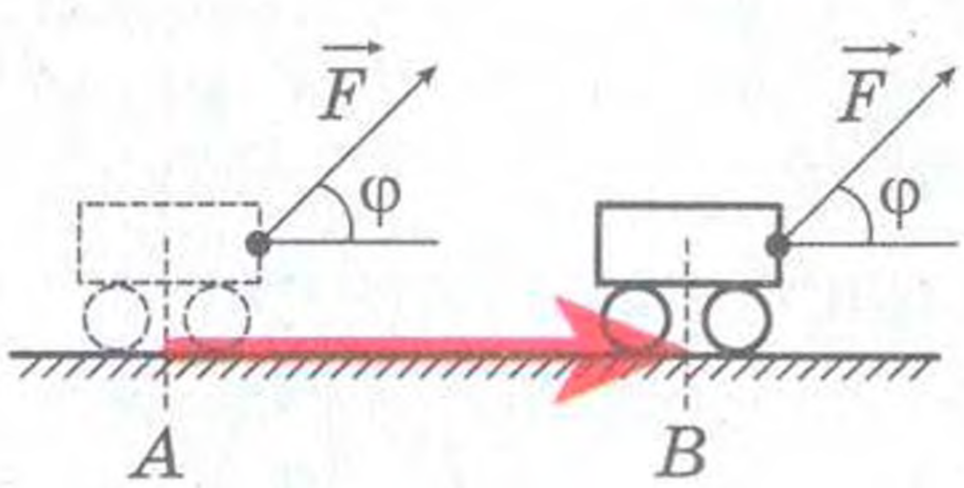


Рис. 18.3

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають добуток їх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Маємо:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).}$$

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Нехай $\vec{a}=\vec{b}$. Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Отже, ми отримали, що $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, тобто ***скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля***. Звідси $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Теорема 18.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Доведення. Нехай $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Тоді $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90°=0$.

Нехай тепер $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Тоді $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$. Оскільки $|\vec{a}|\neq 0$ і $|\vec{b}|\neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$. Звідси $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$, тобто $\vec{a}\perp\vec{b}$. ▲

Теорема 18.2. ***Скалярний добуток векторів*** $\vec{a}(a_1;a_2)$ ***і*** $\vec{b}(b_1;b_2)$ ***можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 18.4). Отримуємо, що $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle AOB$.

Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOB:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB.$$

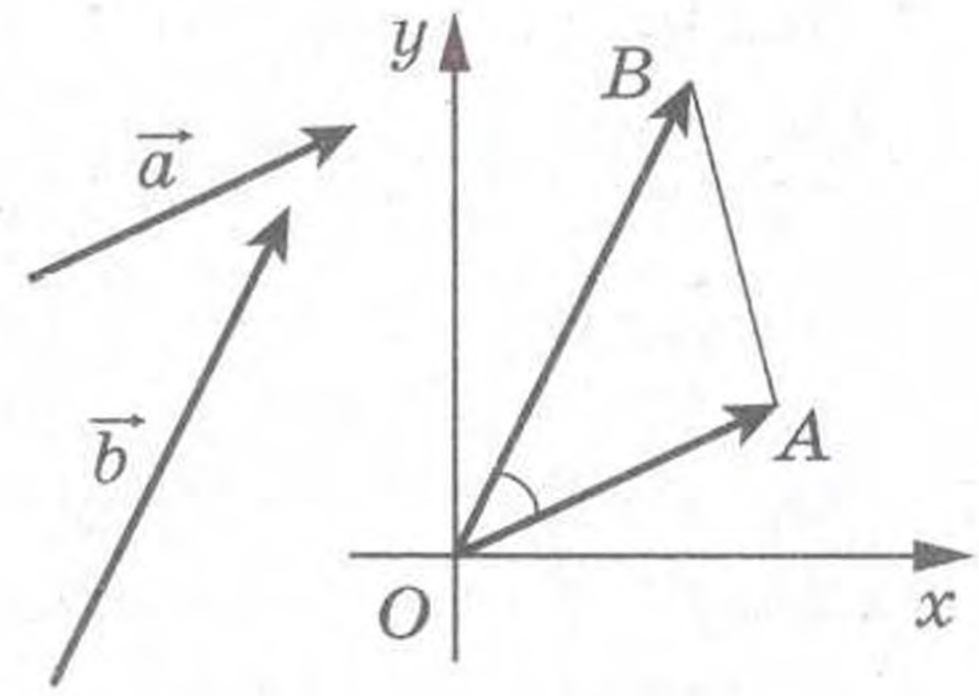


Рис. 18.4

Звідси

$$OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2).$$

Оскільки $|\vec{a}| = OA$ і $|\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Крім того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Звідси $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Скориставшись формулою знаходження модуля вектора за його координатами, запишемо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right).$$

Спрощуючи вираз, який записано в правій частині останньої рівності, отримуємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, то формула, яку доводимо, є правильною. Розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тоді існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$, тобто $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Тоді $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{a}) = |\vec{a}|\,|k\vec{a}| \cos 0° = |k|\,|\vec{a}|^2 = k(a_1^2 + a_2^2) =$$

$$= a_1 \cdot ka_1 + a_2 \cdot ka_2 = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Випадок, коли $k < 0$, розгляньте самостійно. ▲

Наслідок. ***Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}} \qquad (*)$$

Доведення. З означення скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Скориставшись теоремою 18.2 і формулою знаходження модуля вектора за його координатами, отримуємо формулу (*). ▲

За допомогою теореми 18.2 легко довести такі властивості скалярного добутку векторів.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b});$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Для доведення цих властивостей достатньо виразити через координати векторів скалярні добутки, записані в правих і лівих частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Ці властивості разом з властивостями додавання векторів і множення вектора на число дозволяють перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, за звичними правилами, які ви знаєте з курсу алгебри. Наприклад, $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$ $=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$

Приклад 1. Відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$. Знайдіть $|2\vec{a}-3\vec{b}|$.

Розв'язання. Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})^2$.

Звідси $|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=$

$$=\sqrt{4|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})+9|\vec{b}|^2}=\sqrt{36+18+9}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$$

Приклад 2. У трикутнику ABC $AB=4$ см, $BC=6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC=30°$. Знайдіть довжину медіани BM.

Розв'язання. Застосовуючи ключову задачу 2 п. 17, запишемо $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ (рис. 18.5).

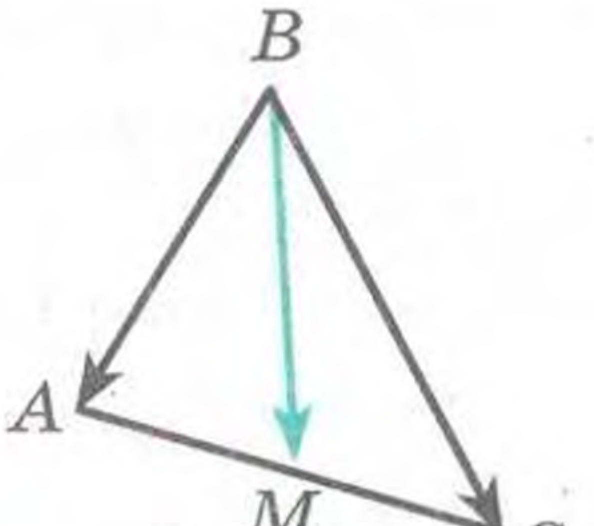


Рис. 18.5

Звідси

$$\overrightarrow{BM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle ABC+|\overrightarrow{BC}|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(16+48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+108\right)=49.$$

Отже, $BM^2=49$; $BM=7$ см.

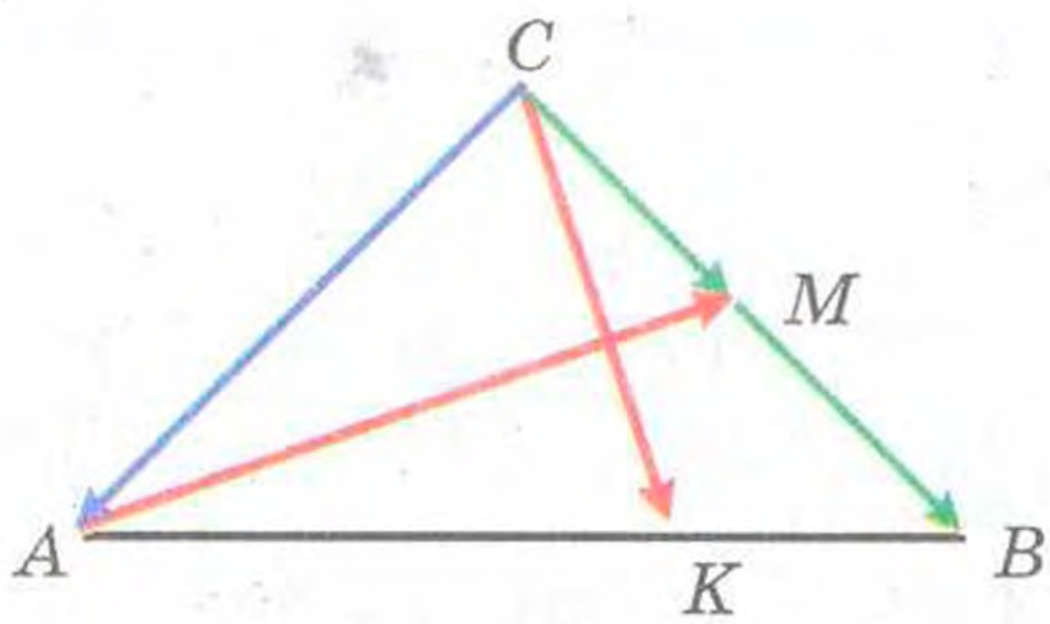


Рис 18.6

Приклад 3. На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC позначено точку K так, що $AK : KB = 2 : 1$ (рис. 18.6). Доведіть, що відрізок CK перпендикулярний медіані AM.

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Скориставшись ключовою задачею 2 п. 17, можна записати $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Маємо: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

З урахуванням того, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ і $\vec{a} \perp \vec{b}$, знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{CK}$ і $\overrightarrow{AM}$.

Маємо:

$$\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}^2 + \frac{1}{3}\vec{b}^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 = 0.$$

Отже, $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AM}$.

Приклад 4. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перпендикулярні.

Розв'язання. Оберемо систему координат так, щоб A (0; 0), B (1; 0). Нехай C (x; y) — вершина трикутника ABC (рис. 18.7). Очевидно, що $y \neq 0$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$. Маємо: $\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}\left(\frac{x-2}{2}; \frac{y}{2}\right)$.

Точка C належить шуканому ГМТ тоді й тільки тоді, коли $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$ і $y \neq 0$.

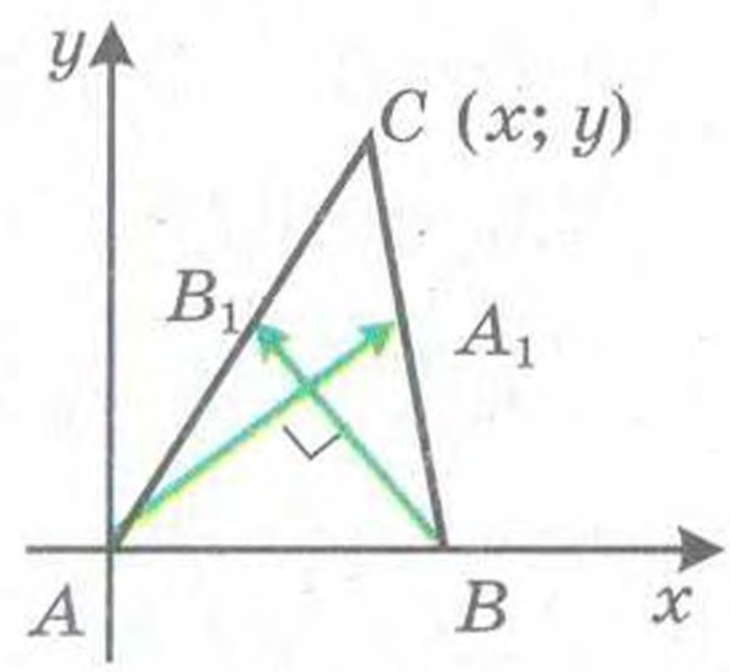


Рис. 18.7

Маємо:

$$\begin{cases}\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{y^2}{4}=0,\\ y\neq 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4},\\ y\neq 0.\end{cases}$$

Отже, шуканим ГМТ є коло радіуса $\frac{3}{2}AB$ з центром у середині відрізка AB, за винятком точок, які належать прямій AB.

Задача. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M\ (x_0;\ y_0)$ перпендикулярно до даного ненульового вектора $\vec{n}\,(a; b)$.

Розв'язання. Нехай $X\ (x;\ y)$ — довільна точка (рис. 18.8). Точка X належить шуканій прямій тоді й тільки тоді, коли $\vec{n}\perp\overrightarrow{MX}$, тобто за умови виконання рівності $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MX}=0$. Звідси отримуємо:

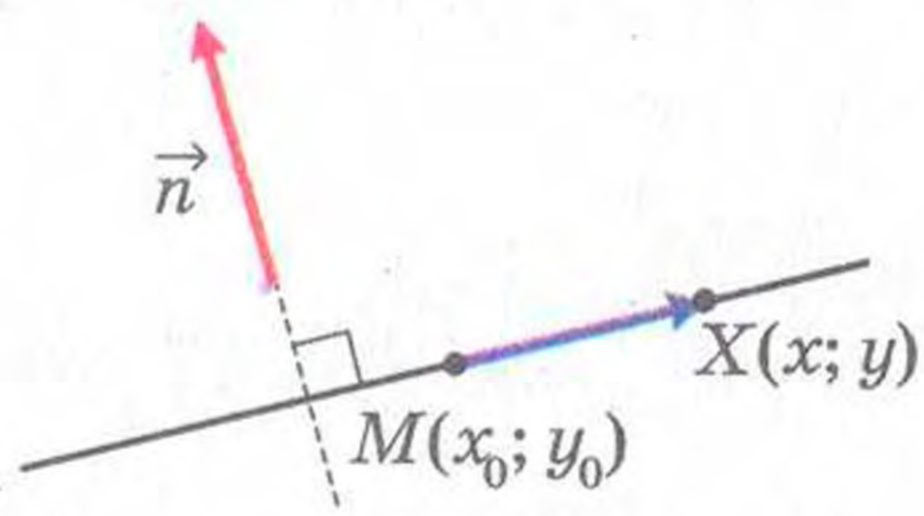


Рис. 18.8

$$\boxed{a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)=0} \qquad (*)$$

Рівняння (*) є шуканим.

Перепишемо рівняння (*) так: $ax+by=ax_0+by_0$.

Нехай $ax_0+by_0=c$. Оскільки вектор $\vec{n}\neq\vec{0}$, тобто $a^2+b^2\neq 0$, то отримуємо загальне рівняння прямої $ax+by=c$.

Розв'язання цієї задачі дозволяє в загальному рівнянні прямої $ax+by=c$ виявити геометричний зміст коефіцієнтів a і b: вектор $\vec{n}\,(a; b)$ перпендикулярний даній прямій.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

18.1.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 18.9).

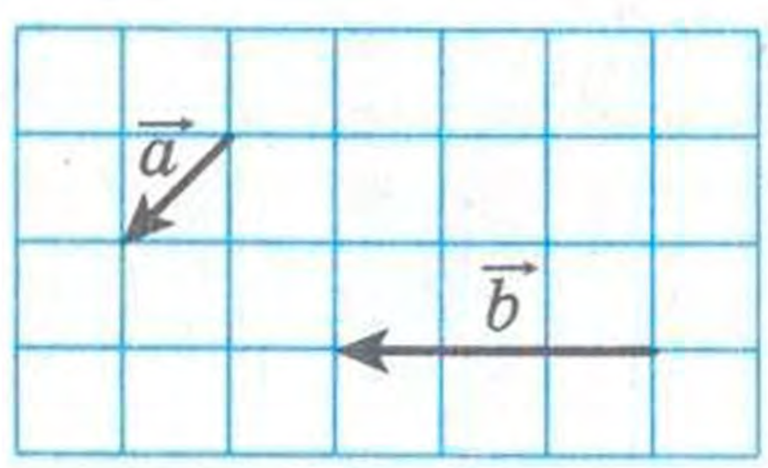


Рис. 18.9

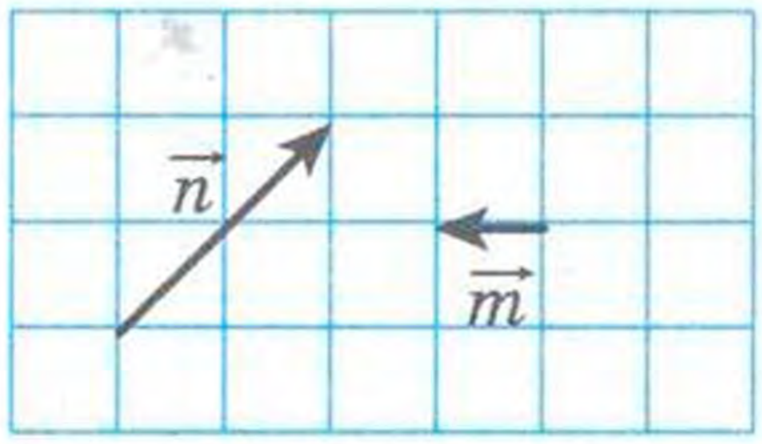


Рис. 18.10

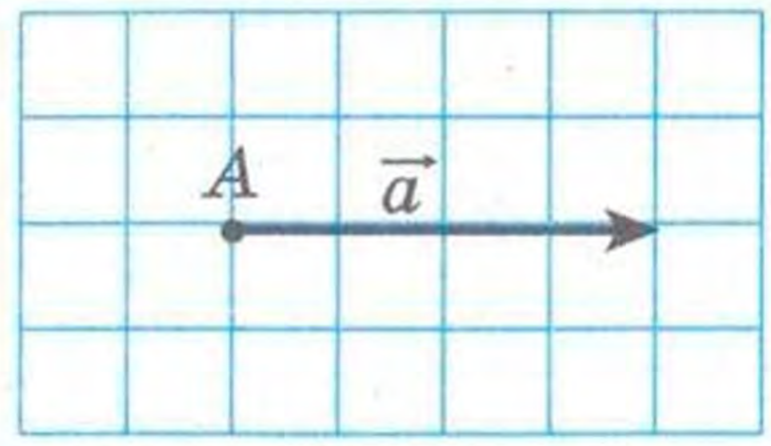


Рис. 18.11

18.2.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ (рис. 18.10).

18.3.° На рисунку 18.11 зображено вектор $\vec{a}$ (довжина сторони клітинки дорівнює 0,5 см). Відкладіть від точки A вектор $\vec{b}$ такий, що $|\vec{b}| = 3$ см і $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Скільки розв'язків має задача?

ВПРАВИ

18.4.° На рисунку 18.12 зображено рівносторонній трикутник ABC, медіани якого AM і BK перетинаються в точці F. Знайдіть кут між векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BK}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BK}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ і $\overrightarrow{AB}$.

18.5.° На рисунку 18.13 зображено квадрат $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Знайдіть кут між векторами: 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CD}$.

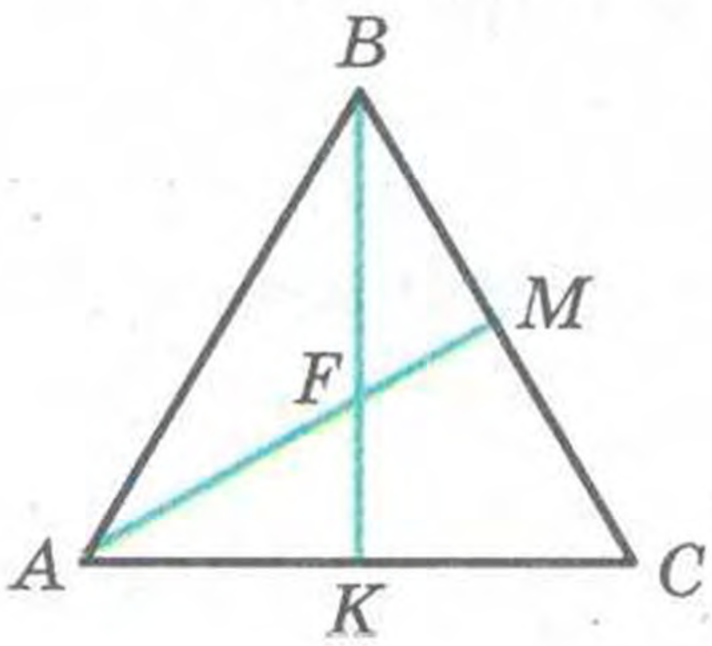


Рис. 18.12

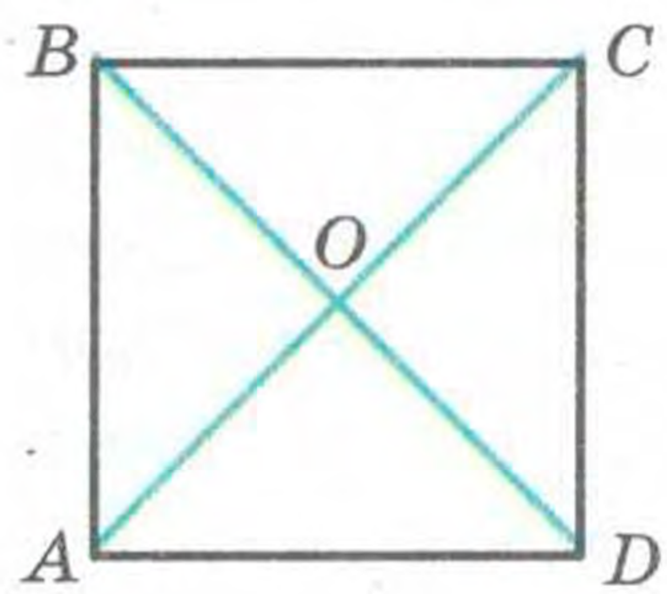


Рис. 18.13

18.6.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;

2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;

3) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;

4) $|\vec{a}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{b}|=6$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=180°$;

5) $|\vec{a}|=0,3$, $|\vec{b}|=0$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=137°$.

18.7.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $|\vec{m}|=7\sqrt{2}$, $|\vec{n}|=4$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=45°$;

2) $|\vec{m}|=8$, $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=150°$.

18.8.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2;-1)$, $\vec{b}(1;-3)$; 2) $\vec{a}(-5;1)$, $\vec{b}(2;7)$; 3) $\vec{a}(1;-4)$, $\vec{b}(8;2)$.

18.9.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $\vec{m}(3;-2)$, $\vec{n}(1;0)$; 2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2};-1\right)$, $\vec{n}(6;9)$.

18.10.° На рисунку 18.14 зображено ромб $ABCD$, у якому $AB = 6$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть скалярний добуток векторів: 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$; 5) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AC}$; 6) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$; 7) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

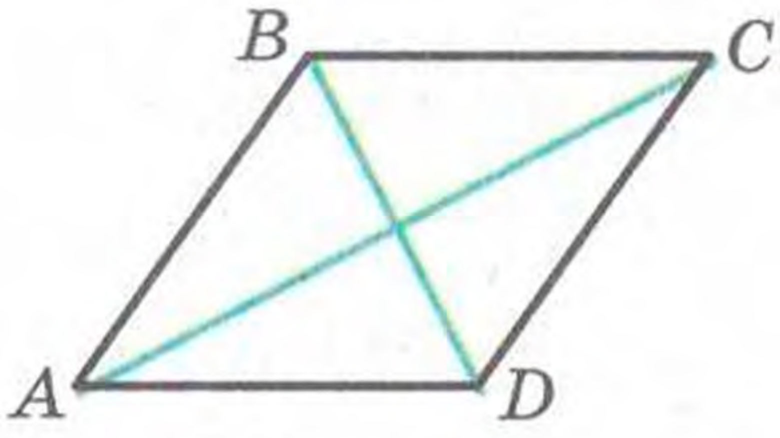


Рис. 18.14

18.11.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$ см. Знайдіть скалярний добуток векторів: 1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

18.12.° Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(1;-2)$ і $\vec{b}(2;-3)$.

18.13.° Який знак має скалярний добуток векторів, якщо кут між ними: 1) гострий; 2) тупий?

18.14.° Відомо, що скалярний добуток векторів є: 1) додатним числом; 2) від'ємним числом. Визначте вид кута між векторами.

18.15.° При яких значеннях x кут між векторами $\vec{a}(2;5)$ і $\vec{b}(x;4)$: 1) гострий; 2) тупий?

18.16.° Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(3;-4)$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=-100$.

18.17.° У рівносторонньому трикутнику ABC, сторона якого дорівнює 1, медіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці M. Обчисліть:

1) $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{MA_1}$.

18.18.° Нехай O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, сторона якого дорівнює 1. Обчисліть:
1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{ED}$; 4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$.

18.19.° При якому значенні x вектори $\vec{a}(3; x)$ і $\vec{b}(1; 9)$ перпендикулярні?

18.20.° Відомо, що $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Доведіть, що вектори $\vec{a}(-x; y)$ і $\vec{b}(y; x)$ перпендикулярні.

18.21.° При яких значеннях x вектори $\vec{a}(2x; -3)$ і $\vec{b}(x; 6)$ перпендикулярні?

18.22.° При якому значенні y скалярний добуток векторів $\vec{a}(4; y)$ і $\vec{b}(3; -2)$ дорівнює 14?

18.23.° Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні та $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. При яких значеннях x вектори $\vec{a} + x\vec{b}$ та $\vec{a} - x\vec{b}$ перпендикулярні?

18.24.° Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

18.25.° Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$. Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a} - \vec{b})\cdot\vec{b}$.

18.26.° Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

18.27.• Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$. Знайдіть $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

18.28.• Відомо, що $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$. Знайдіть $|2\vec{m} - 3\vec{n}|$.

18.29.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами A (3; −2), B (4; 0), C (2; 1), D (1; −1) є прямокутником.

18.30.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами A (−1; 4), B (−2; 5), C (−1; 6), D (0; 5) є квадратом.

18.31.• Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами A (1; 6), B (−2; 3), C (2; −1).

18.32.• Знайдіть кути трикутника з вершинами A (0; 6), $B(4\sqrt{3}; 6)$, $C(3\sqrt{3}; 3)$.

18.33.• Доведіть, що для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $-|\vec{a}||\vec{b}| \leqslant \vec{a}\cdot\vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$.

18.34.* Визначте взаємне розміщення двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$;

18.35.* Знайдіть кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо

$$(\vec{m}+3\vec{n})(\vec{m}-\vec{n})=-11,\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=3.$$

18.36.* Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2},\quad |\vec{a}|=|\vec{b}|=1.$$

18.37.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4$, $AC = 10$, $\angle BAC = 60°$. На стороні BC позначено точку M так, що $BM : MC = 3$. Знайдіть AM.

18.38.** На параболі $y = x^2$ позначено три точки $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$ так, що $\angle ABC = 90°$. Доведіть, що $(x_1 + x_2) \times (x_2 + x_3) = -1$.

18.39.** Точки M і N є серединами відповідно сторін BC і CD ромба $ABCD$. Доведіть, що коли $AM \perp BN$, то чотирикутник $ABCD$ — квадрат.

18.40.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $BC=\sqrt{2}$. Доведіть, що медіани AK і CM перпендикулярні.

18.41.** У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіани CC_1 і BB_1 перпендикулярні. Знайдіть $\operatorname{tg} \angle ABC$.

18.42.** У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні та перетинаються в точці O. Відомо, що $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Знайдіть кут між прямими AB і DC.

18.43.** У трикутнику ABC проведено медіану BD. Відомо, що $\angle DBC = 90°$, $BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайдіть $\angle ABD$.

18.44.** Точки K і M — середини відповідно сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Знайдіть AD, якщо $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$.

18.45.** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = 65°$, $\angle D = 85°$, $AB=\sqrt{3}$, $CD = 3$. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає середини сторін AD і BC.

18.46.** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки M і N — середини діагоналей AC і BD відповідно. Знайдіть кут між прямими AB і CD, якщо $AB = 2$, $CD = 4$, $MN=\sqrt{3}$.

18.47.•• На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC знайдіть таку точку K, щоб відрізок CK і медіана AM були перпендикулярними.

18.48.•• На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначили точку C_1 так, що $AC_1 : C_1B = 1 : 2$, а на стороні AC позначили точку B_1 так, що $CC_1 \perp BB_1$. Знайдіть відношення $AB_1 : B_1C$.

18.49.•• На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABMN$ і $BCKF$. Доведіть, що медіана BD трикутника ABC перпендикулярна прямій MF.

18.50.* Доведіть нерівність $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$, де A, B і C — кути трикутника ABC.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР §6*

19. Перетворення (відображення) фігур

З курсу алгебри ви знаєте, що функцію f, у якої $D(f) = X$, $E(f) = Y$, також називають відображенням множини X на множину Y.

Як правило, в алгебрі елементами множин X і Y є числа. У геометрії природно розглядати такі множини X і Y, елементами яких є точки. У цьому разі множина X — це деяка фігура F, множина Y — фігура F_1, а відображення f — це **відображення фігури F на фігуру F_1** (рис. 19.1). Пишуть $f(F) = F_1$. Фігуру F_1 називають **образом** фігури F, фігуру F — **прообразом** фігури F_1 при відображенні f.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. На рисунку 19.2 зображено відрізок AB, пряму a і точку O, яка не належить ні прямій a, ні прямій AB. Розглянемо функцію f, областю визначення якої є множина точок відрізка AB і яка задається за таким правилом: кожній точці X відрізка AB поставимо у відповідність єдину точку X_1 прямої a таку, щоб точки O, X і X_1 лежали на одній прямій. Зокрема, $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$.

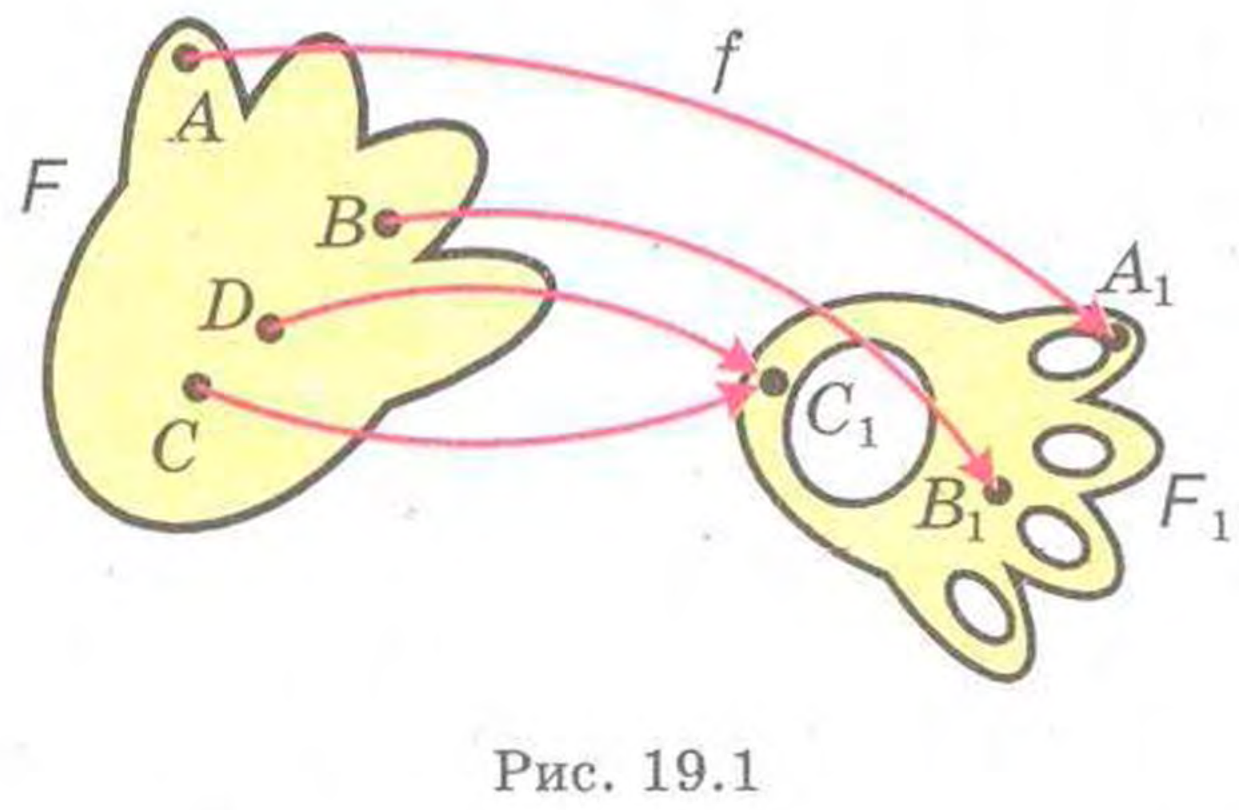


Рис. 19.1

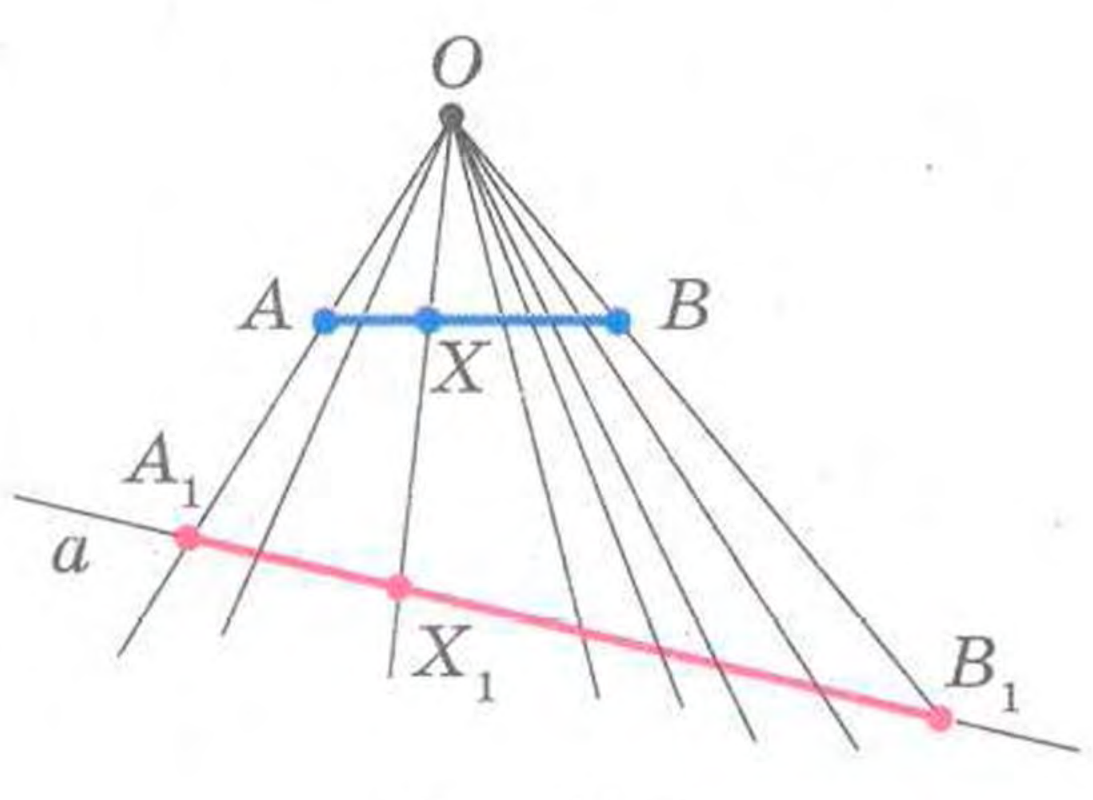


Рис. 19.2

Зрозуміло, що множина всіх точок X_1 таких, що $X_1 = f(X)$, утворює відрізок A_1B_1.

Таким чином, ми задали відображення f відрізка AB на відрізок A_1B_1. Також прийнято говорити, що задано **перетворення** f

відрізка AB, результатом якого є відрізок A_1B_1. Тут відрізок A_1B_1 — це образ відрізка AB при перетворенні f, зокрема, точка A_1 — **образ точки** A, точка B_1 — образ точки B.

Слова «відображення» і «перетворення» є синонімами. У геометрії ми частіше користуватимемося терміном «**перетворення фігури F**».

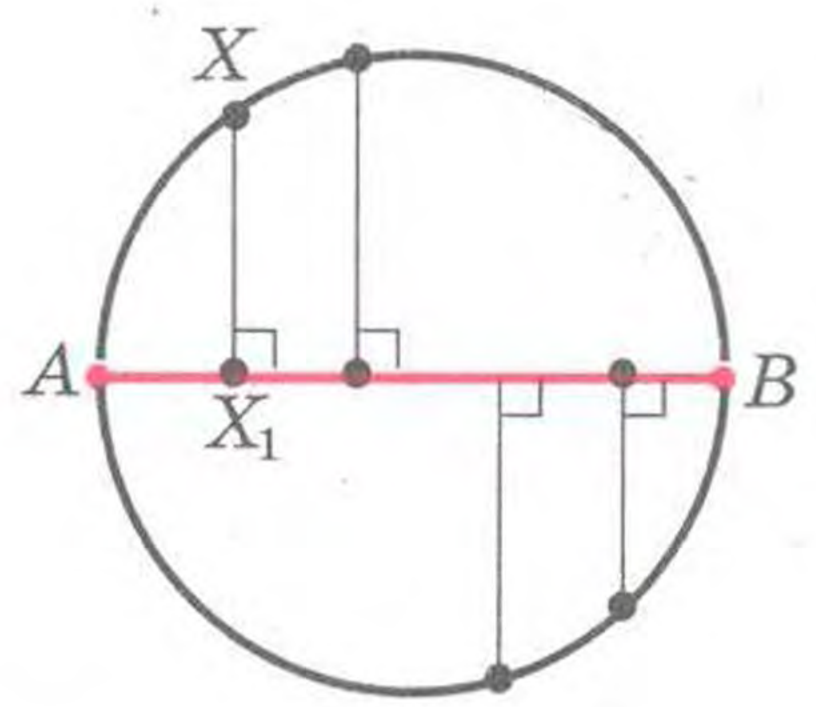


Рис. 19.3

Приклад 2. На рисунку 19.3 зображено коло з діаметром AB. Задамо перетворення g кола: кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1 — основу перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму AB. Зокрема, $g(A) = A$, $g(B) = B$. При цьому кожній точці кола поставлено у відповідність єдину точку діаметра AB, і кожна точка діаметра AB є образом щонайменше однієї точки кола.

Таким чином, ми задали перетворення g кола, при якому образом кола є відрізок AB.

Приклад 3. Позначимо на площині точку O. Розглянемо функцію h, областю визначення якої є всі точки площини, а областю значень — множина, яка складається з однієї точки O, тобто кожній точці X площини поставимо у відповідність точку O. Маємо: $h(X) = O$.

Тут функція h — це перетворення площини, при якому образом площини є фігура, яка складається з однієї точки O.

У прикладі 1 кожна точка відрізка A_1B_1 є відповідною деякій *єдиній* точці відрізка AB. У таких випадках говорять, що перетворення f відрізка AB є **оборотним**. Оборотне — це таке перетворення, при якому різним точкам фігури відповідають різні образи.

У прикладі 2 перетворення кола не є оборотним (подумайте, чому).

Кожне оборотне перетворення має **обернене** перетворення. Пояснимо сказане. Знову звернемося до рисунку 19.2. Оскільки перетворення f є оборотним, то ми можемо розглянути функцію f_1, областю визначення якої є множина точок відрізка A_1B_1 і яка задається таким правилом: кожній точці X_1 відрізка A_1B_1 поставимо у відповідність єдину точку X відрізка AB таку, що точки O, X і X_1 лежать на одній прямій.

Таким чином, ми задали перетворення f_1 і f, які зв'язані такими властивостями:

1) якщо фігура F_1 — образ фігури F при перетворенні f, то фігура F — образ фігури F_1 при перетворенні f_1;

2) якщо X — довільна точка фігури F і $f(X) = X_1$, то $f_1(X_1) = X$.

Перетворення f_1 називають **оберненим** до перетворення f. Також можна сказати, що перетворення f є оберненим до перетворення f_1. Перетворення f і f_1 називають **взаємно оберненими**.

Розглянемо перетворення f, при якому образом фігури F є сама ця фігура F, тобто $f(F) = F$. У цьому разі говорять, що задано **перетворення фігури F на себе.**

Приклад 4. Розглянемо точку M, яка лежить всередині кола (рис. 19.4). Кожній точці X кола поставлено у відповідність точку X_1 — другу точку перетину прямої MX з колом. Отримаємо перетворення даного кола на себе.

Розглянемо перетворення f, при якому кожній точці X фігури F ставиться у відповідність сама точка X, тобто $f(X) = X$. Таке перетворення f фігури F називають **тотожним.** Очевидно, що тотожне перетворення є окремим випадком перетворення фігури на себе.

Тотожне перетворення є оборотним (подумайте чому).

Нехай у результаті перетворення f образом фігури F є фігура F_1, а в результаті перетворення g образом фігури F_1 є фігура F_2, тобто $f(F) = F_1$, $g(F_1) = F_2$ (рис. 19.5).

Перетворення f і g, виконані послідовно, задають перетворення h, при якому образом фігури F є фігура F_2. Таке перетворення h називають **композицією** перетворень f і g. Якщо виконується спочатку перетворення f, а потім перетворення g, то пишуть $h = g \circ f$. Тоді $g \circ f(F) = g(f(F)) = g(F_1) = F_2$, тобто $g \circ f(F) = F_2$.

Розглянемо два взаємно обернених перетворення f і g. Нехай X — довільна точка фігури F і $f(X) = X_1$. Тоді $g(X_1) = X$. Отже, $g \circ f(X) = X$. Це означає, що композиція двох взаємно обернених перетворень є тотожним перетворенням.

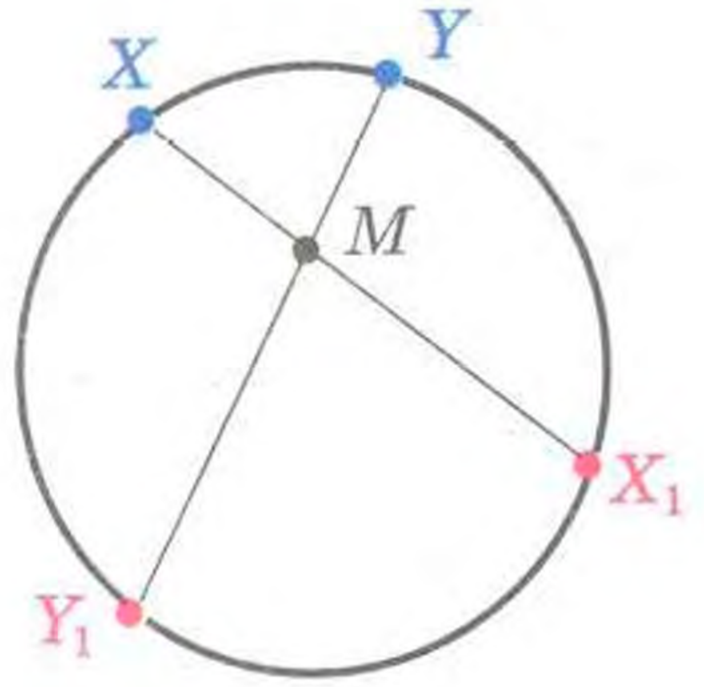


Рис. 19.4

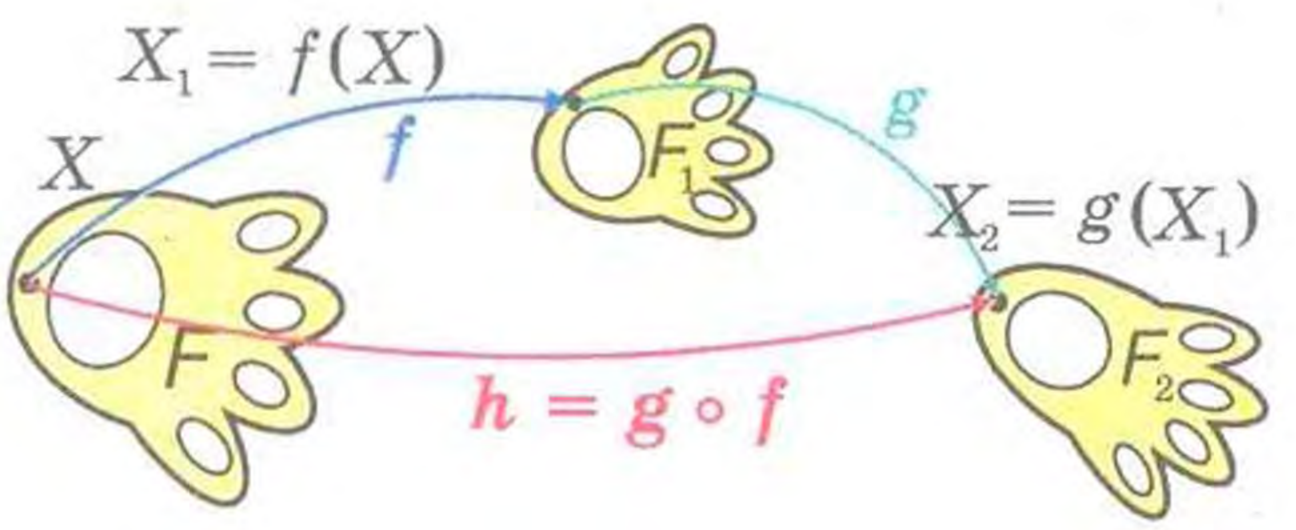


Рис. 19.5

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

19.1.° Позначимо на площині точку O. Задамо перетворення площини за таким правилом (рис. 19.6): кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що точка O є серединою відрізка XX_1 (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні. Чи є задане перетворення оборотним?

19.2.° Проведемо на площині пряму l. Задамо перетворення площини за таким правилом: кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що пряма l є серединним перпендикуляром відрізка XX_1 (кожній точці прямої l поставимо у відповідність цю саму точку). Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні. Чи є задане перетворення оборотним (рис. 19.7)?

19.3.° Позначимо на площині точку O. Задамо перетворення площини за таким правилом: кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$ (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні площини. Чи є задане перетворення оборотним (рис. 19.8)?

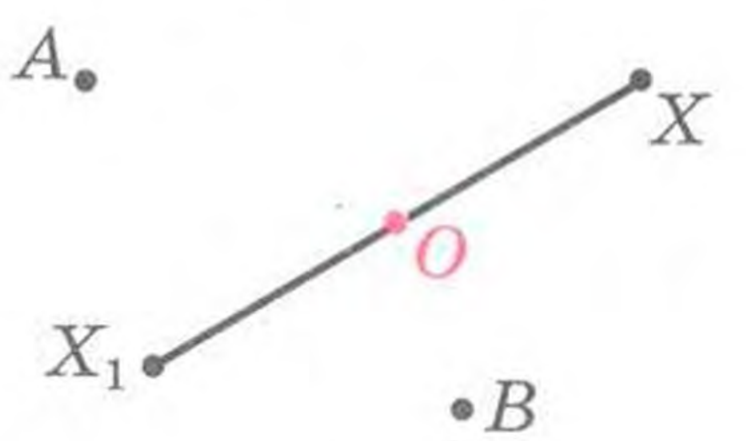


Рис. 19.6

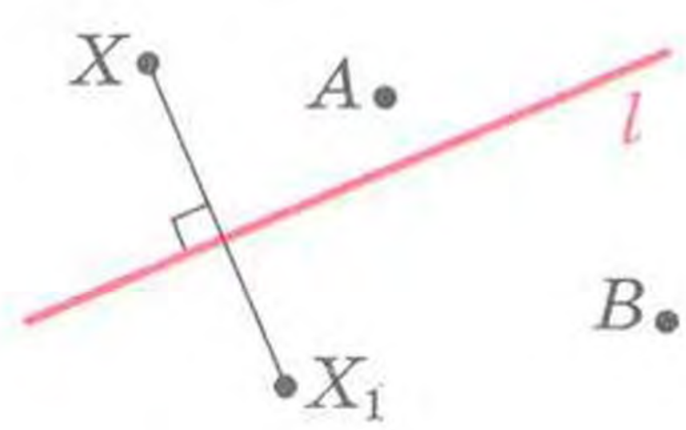


Рис. 19.7

Рис. 19.8

19.4.° Дано вектор $\vec{a}$. Задамо перетворення площини за таким правилом: кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні площини. Чи є задане перетворення оборотним (рис. 19.9)?

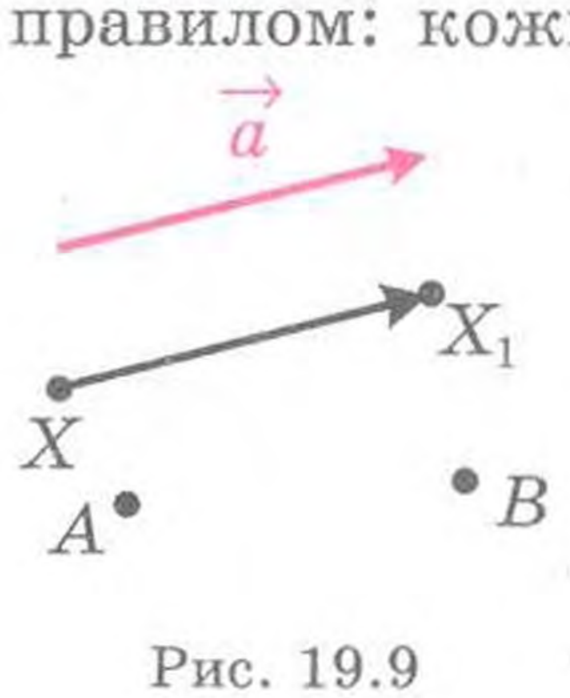


Рис. 19.9

19.5.° На рисунку 19.10 зображено кут AOB і пряму p, непаралельну його сторонам. Кожній точці X сторони OA поставлено у відповідність таку точку X_1 сторони OB, що $XX_1 \parallel p$ (точці O поставлено у відповідність саму точку O). Побудуйте образ точки M і прообраз точки K при даному перетворенні променя OA. Яка фігура є образом променя OA?

19.6.° На рисунку 19.11 зображено відрізок AB і пряму a. Кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність основу перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму a. Побудуйте образ точки E і прообраз точки F при заданому перетворенні відрізка AB. Чи існують точки прямої a, які не мають прообразу? Побудуйте образ відрізка AB.

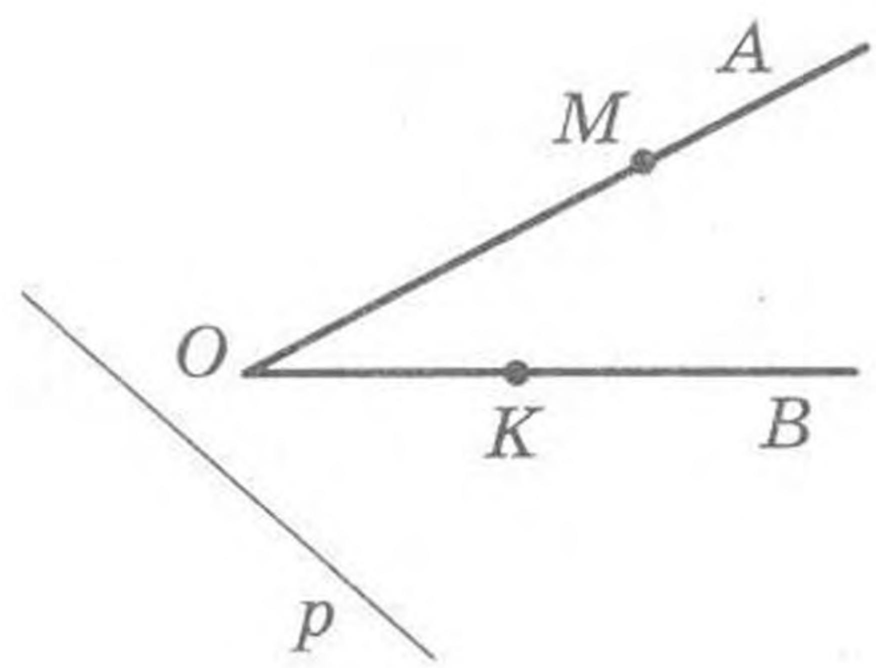


Рис. 19.10

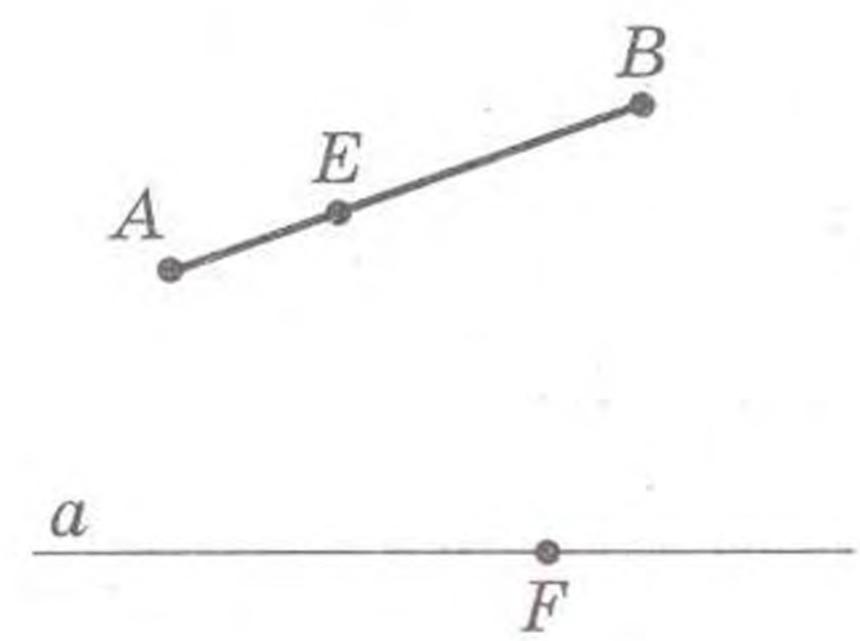


Рис. 19.11

19.7.° Нехай f і g — перетворення, задані в задачах 19.1 і 19.2 відповідно. Побудуйте образи точок A і B (рис. 19.12) при перетворенні: 1) $f \circ g$; 2) $g \circ f$.

19.8.° Нехай f і g — перетворення, задані в задачах 19.3 і 19.4 відповідно. Побудуйте образи точок A і B (рис. 19.13) при перетворенні: 1) $f \circ g$; 2) $g \circ f$.

19.9.° Пряма a дотикається до півкола AB з центром у точці O (рис. 19.14). Задайте яке-небудь перетворення півкола AB, при якому пряма a є образом півкола AB з «виколотими» точками A і B. З'ясуйте, чи є задане перетворення оборотним.

Рис. 19.12

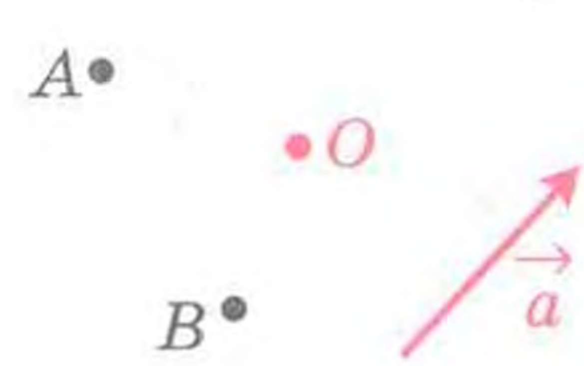


Рис. 19.13

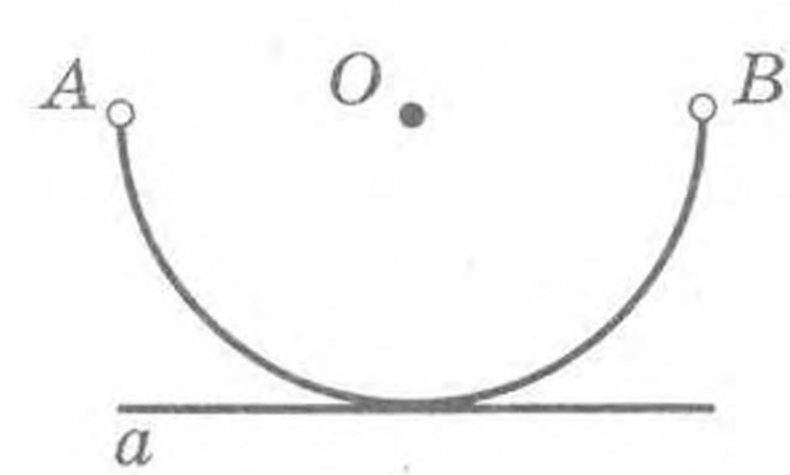


Рис. 19.14

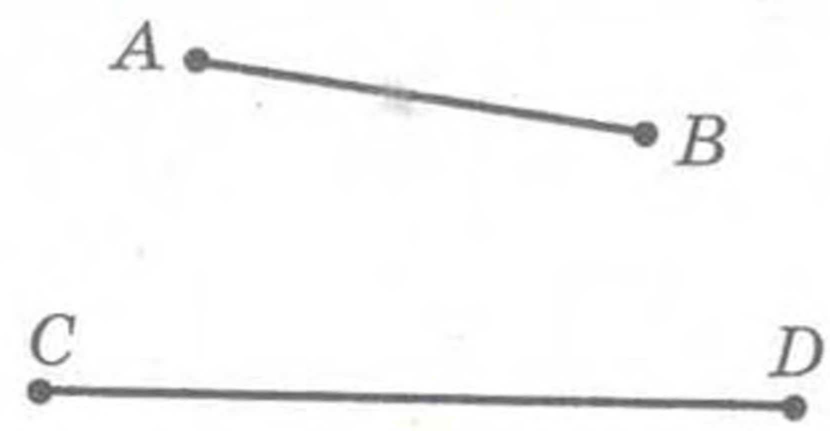


Рис. 19.15

19.10.° Задайте яке-небудь перетворення відрізка AB, при якому відрізок CD є образом відрізка AB (рис. 19.15). З'ясуйте, чи є задане перетворення оборотним.

19.11.• Відрізок AB перпендикулярний прямій MN (рис. 19.16). Задайте яке-небудь перетворення відрізка AB, при якому образом відрізка AB з «виколотою» точкою A є промінь BN.

19.12.• Відрізок AB перпендикулярний прямій l (рис. 19.17). Задайте яке-небудь перетворення відрізка AB, при якому образом відрізка AB з «виколотими» кінцями A, B є пряма l.

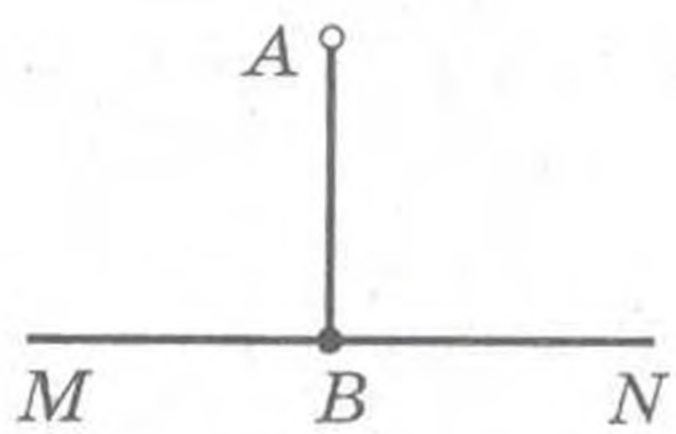


Рис. 19.16

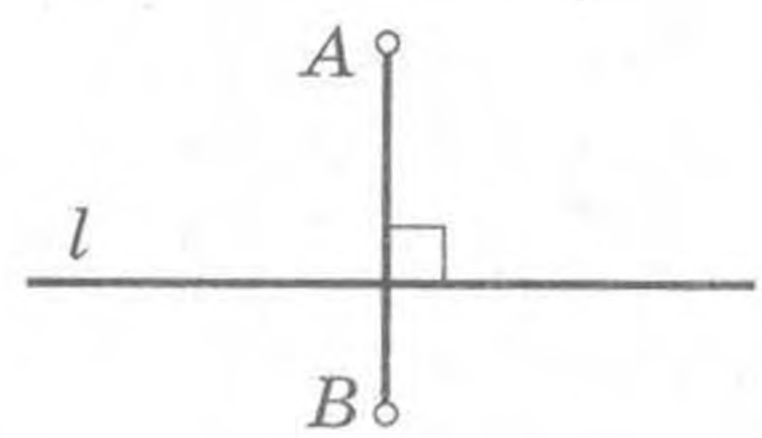


Рис. 19.17

ВПРАВИ

19.13.° Задайте яке-небудь перетворення квадрата $ABCD$, при якому образом квадрата є сторона AB.

19.14.° Задайте яке-небудь перетворення квадрата $ABCD$, при якому образом квадрата є діагональ AC.

19.15.° Розглянемо коло радіуса r з центром O. Кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1, яка належить радіусу OX, таку, що $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Яка фігура є образом заданого кола?

19.16.° Дано кут AOB (рис. 19.18). Кожній точці X сторони OA поставимо у відповідність точку X_1, яка належить стороні OB і лежить на колі з центром O радіуса OX (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Яка фігура є образом сторони OA?

19.17.° Дано кут MON. Кожній точці X сторони OM поставимо у відповідність таку точку X_1 сторони ON, що пряма XX_1 перпендикулярна бісектрисі кута MON (точці O відповідає сама точка O). Чи є описане перетворення променя OM оборотним?

19.18.° Відомо, що при перетворенні фігури F її образом є сама фігура F. Чи справедливе твердження, що це перетворення є тотожним?

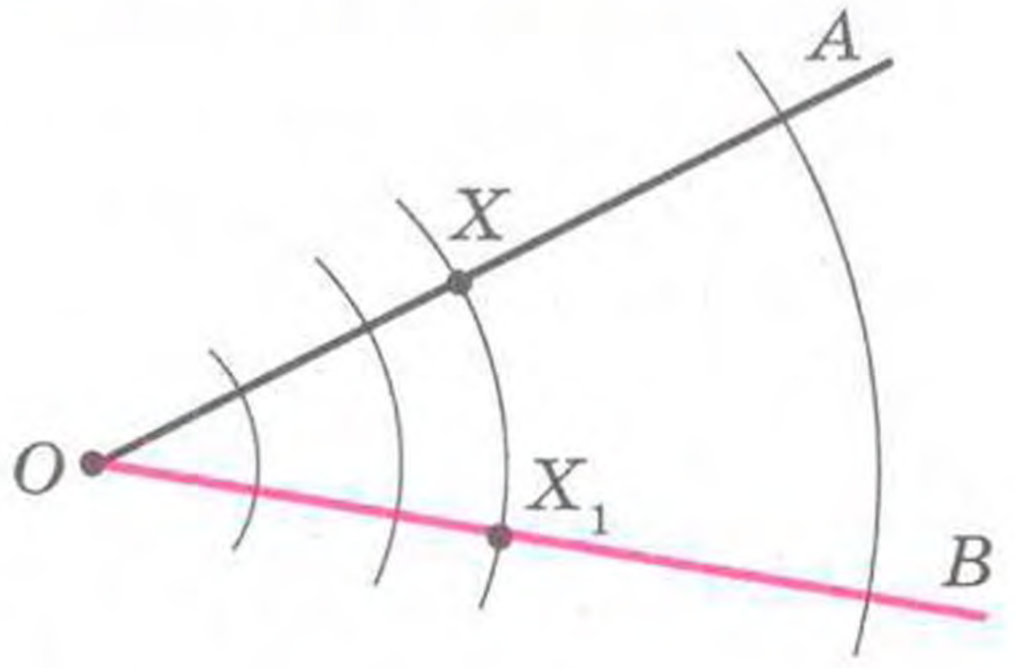


Рис. 19.18

19.19.• Розглянемо фігуру, що складається з усіх точок, які належать сторонам прямокутника. Опишіть яке-небудь перетворення цієї фігури, при якому її образом є коло.

19.20.• Розглянемо фігуру, що складається з усіх точок, які належать сторонам прямокутника. Опишіть яке-небудь перетворення цієї фігури, при якому її образом є фігура, яка складається з усіх точок сторін ромба.

19.21.• Задайте яке-небудь перетворення площини, при якому її образом є: 1) пряма; 2) промінь; 3) відрізок; 4) дві точки.

19.22.• Позначимо на площині точку O. Задамо перетворення площини за таким правилом: кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$ (точці O відповідає сама точка O). Доведіть, що це перетворення є оборотним, і задайте перетворення, обернене до даного.

19.23.• Проведемо на площині пряму l (рис. 19.19). Задамо перетворення площини за таким правилом: кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $XX_1 \perp l$, $X_1M = \frac{1}{2}XM$, де $M = XX_1 \cap l$, і точки X і X_1 лежать у різних півплощинах відносно прямої l (кожній точці прямої l поставимо у відповідність цю саму точку). Доведіть, що це перетворення є оборотним, і задайте перетворення, обернене до даного.

19.24.• Задайте перетворення відрізка, відмінне від тотожного, при якому образом відрізка є цей самий відрізок.

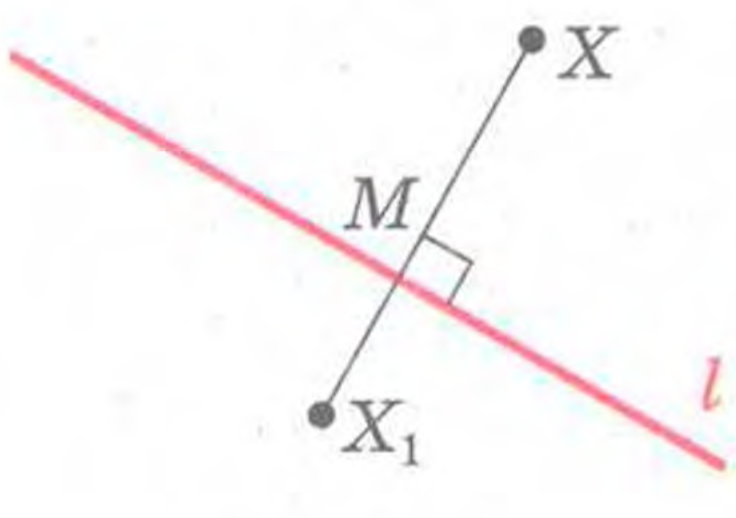


Рис. 19.19

19.25.• Розглядається фігура, яка складається з трьох точок A, B і C. Укажіть образи точки A при всіх можливих перетвореннях даної фігури на себе.

19.26.•• Чи будь-яке перетворення фігури F на себе є оборотним?

20. Рух. Паралельне перенесення

Які властивості перетворення фігури гарантують збереження її розміру і форми? Виявляється, що достатньо вимагати лише збереження відстані між точками. Тобто, якщо A і B — довільні точки фігури F, а A_1 і B_1 — їх образи, то має виконуватися рівність $AB = A_1B_1$.

Означення. Перетворення фігури F, яке зберігає відстань між точками, називають рухом фігури F.

Найпростішим прикладом руху є тотожне перетворення.

Розглянемо властивості руху.

Теорема 20.1. ***При русі фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.***

Доведення. Нехай точки A, B і C фігури F лежать на даній прямій, причому точка B належить відрізку AC (рис. 20.1). Тоді

$$AC = AB + BC \qquad (1)$$

Розглянемо рух f фігури F.

Нехай $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$. З означення руху випливає, що $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. З урахуванням рівності (1) можна записати $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. Отже, точка B_1 належить відрізку A_1C_1, тобто точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

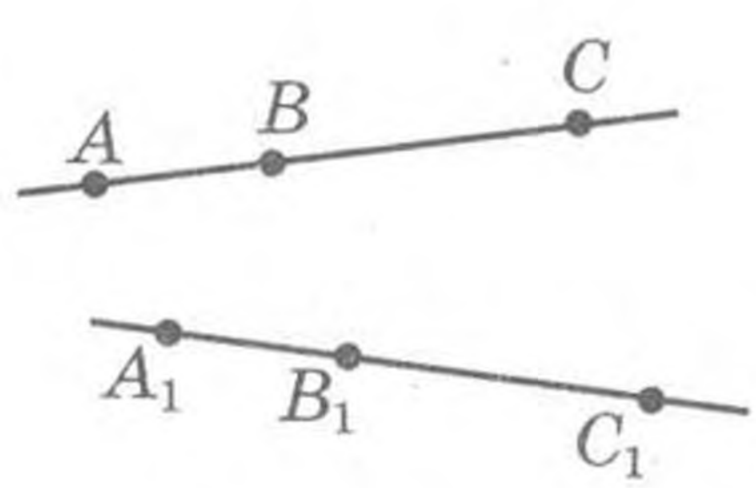


Рис. 20.1

Використовуючи нерівність трикутника, доведіть другу частину теореми самостійно. ▲

Наслідок. ***При русі відрізка, променя, прямої, кута образами є відповідно відрізок, промінь, пряма, кут.***

Доведемо першу з зазначених властивостей (решту властивостей ви можете довести самостійно або на заняттях математичного гуртка).

Нехай X — довільна точка відрізка AB. Розглянемо деякий рух f відрізка AB. Нехай $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(X) = X_1$. При доведенні теореми 20.1 було показано, що точка X_1 належить відрізку A_1B_1. Це означає, що образи всіх точок відрізка AB належать відрізку A_1B_1.

Покажемо, що для кожної точки Y_1 відрізка A_1B_1 знайдеться точка Y відрізка AB така, що $f(Y) = Y_1$. Виберемо на відрізку AB таку точку Y, що $AY = A_1Y_1$. Нехай $f(Y) = Y_2$. Тоді точка Y_2 належить відрізку A_1B_1 і $AY = A_1Y_2$. Отже, точки Y_1 і Y_2 збігаються, тобто $f(Y) = Y_1$. ▲

Теорема 20.2. ***Якщо f — рух кута ABC і $f(\angle ABC) = \angle A_1B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.***

Доведення. Позначимо на променях BA і BC точки M і N відповідно. Нехай $f(M) = M_1$, $f(N) = N_1$ (рис. 20.2). Точки M_1 і N_1 належать променям B_1A_1 і B_1C_1 відповідно. Оскільки $BM = B_1M_1$, $BN = B_1N_1$, $MN = M_1N_1$, то $\triangle BMN = \triangle B_1M_1N_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle B = \angle B_1$. ▲

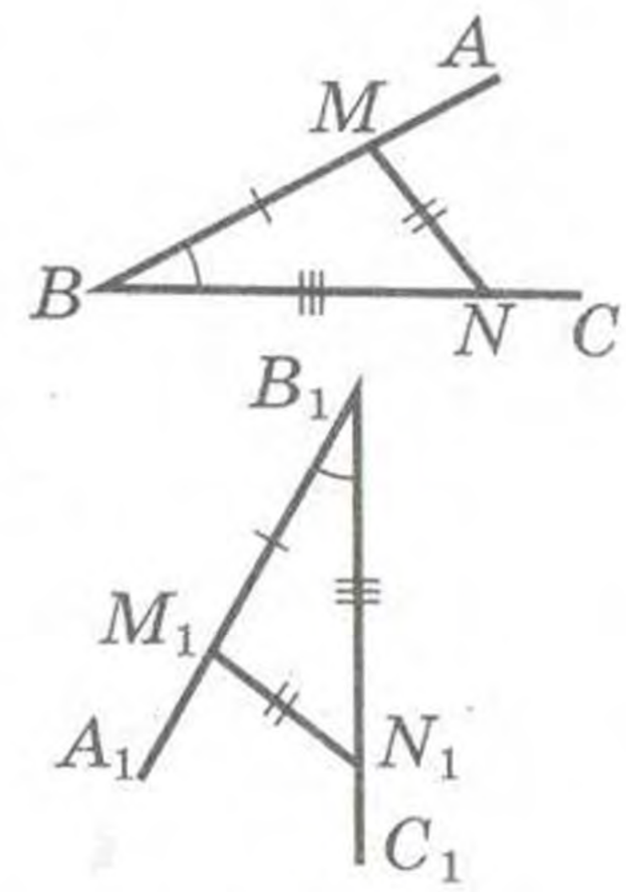


Рис. 20.2

Теорема 20.3. ***Якщо f — рух трикутника ABC і $f(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 20.4. ***Рух — оборотне перетворення. Перетворення, обернене до руху, також є рухом.***

Доведення. Припустимо, що рух f фігури F не є оборотним перетворенням. Тоді знайдуться дві різні точки A і B фігури F такі, що $f(A) = f(B) = C$, тобто відстань між образами точок A і B дорівнює нулю. Отримали суперечність, оскільки $AB \neq 0$.

Другу частину теореми доведіть самостійно. ▲

Теорема 20.5. ***Якщо f і g — рухи, то композиція цих перетворень також є рухом.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Ми давно використовуємо поняття «рівність фігур», хоча не давали йому строгого означення.

Властивості руху вказують на те, що рух пов'язаний з рівністю фігур. Тому доречно домовитися про таке означення.

Означення. Дві фігури називають *рівними*, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом іншої.

Запис $F = F_1$ означає, що фігури F і F_1 рівні.

З п'ятого класу ми під рівними розуміли такі фігури, які збігалися при накладанні. Термін «накладання» інтуїтивно зрозумілий, і в нашому уявленні він пов'язаний із накладанням реальних об'єктів. Але геометричні фігури не можна накласти одну на одну в буквальному розумінні цього слова. Тепер накладання фігури F на фігуру F_1 можна розглядати як рух фігури F, при якому її образом є фігура F_1.

Термін «рух» також асоціюється з певною фізичною дією: зміною положення тіла без деформації. Саме з цим пов'язана поява цього терміна в математиці. Проте в геометрії предметом дослідження є не процес, який відбувається в часі, а лише властивості фігури та її образу.

Нехай задано деяку фігуру F і вектор $\vec{a}$. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1 таку, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 20.3). Таке перетворення фігури F називають **паралельним перенесенням на вектор** $\vec{a}$. Перетворення, яке є паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$, позначають так: $T_{\vec{a}}$. Пишуть: $T_{\vec{a}}(F) = F_1$.

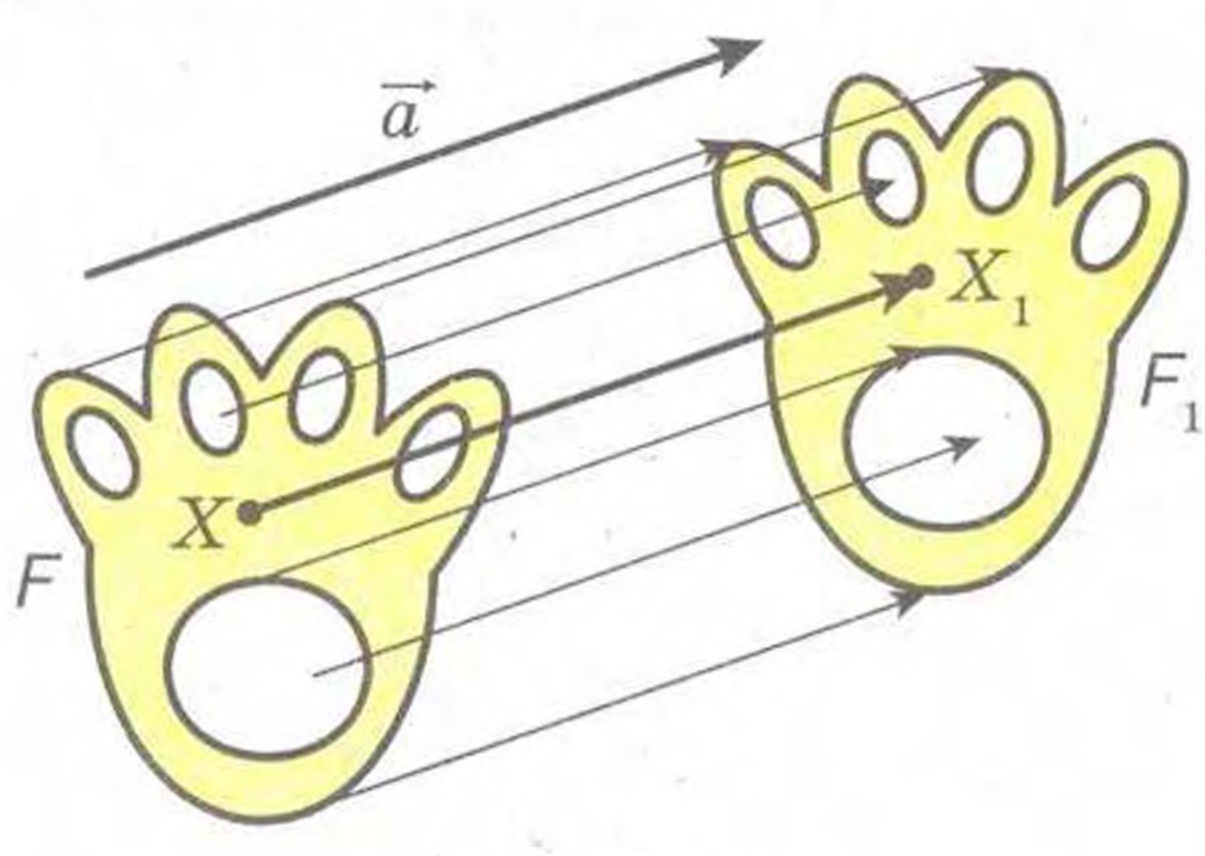


Рис. 20.3

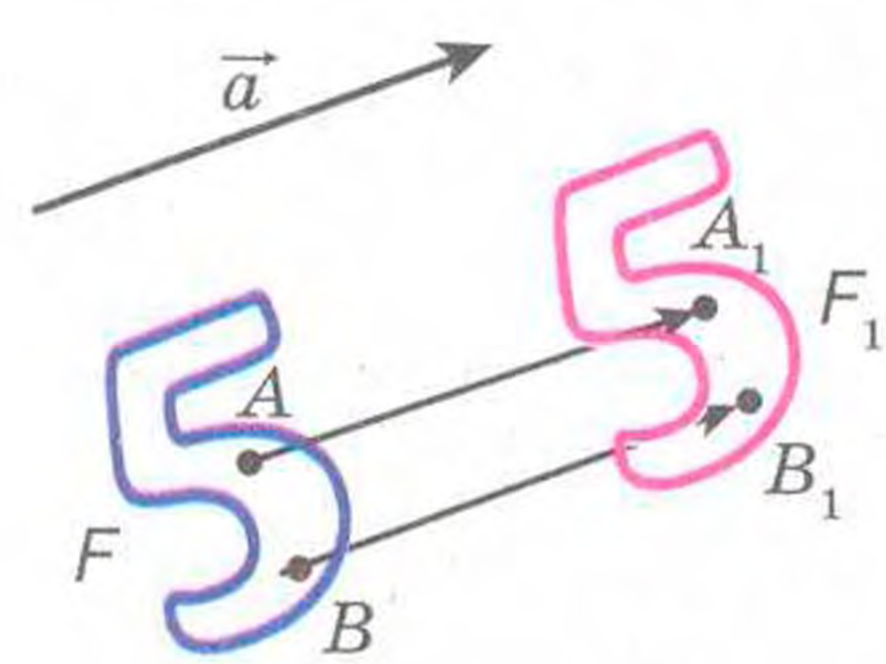


Рис. 20.4

Те, що зображені на рисунку 20.3 фігури F і F_1 рівні, зрозуміло з наочного сприйняття. Строге обґрунтування цього факту дає така теорема.

Теорема 20.6 (властивість паралельного перенесення). ***Паралельне перенесення є рухом.***

Доведення. Нехай $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ — довільні точки фігури F (рис. 20.4), точки A_1 і B_1 — їх відповідні образи при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(m; n)$, тобто $T_{\vec{a}}(A) = A_1$, $T_{\vec{a}}(B) = B_1$. Тоді вектори $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$ мають координати $(m; n)$. Отже, координатами точок A_1 і B_1 є відповідно пари чисел $(x_1 + m; y_1 + n)$ і $(x_2 + m; y_2 + n)$.

Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Отже, ми показали, що $AB = A_1B_1$, тобто паралельне перенесення зберігає відстань між точками. ▲

Наслідок. ***Якщо фігура F_1 — образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.***

Цю властивість використовують при створенні малюнків на тканинах, шпалерах, покриттях для підлоги тощо (рис. 20.5).

Рис. 20.5

Якщо фігура F_1 є образом фігури F при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$, то фігура F є образом фігури F_1 при паралельному перенесенні на вектор $-\vec{a}$ (рис. 20.6). Паралельні перенесення фігури F на вектор $\vec{a}$ і фігури F_1 на вектор $-\vec{a}$ є взаємно оберненими перетвореннями.

Задача. Кожній точці $X(x; y)$ фігури F поставлено у відповідність точку $X_1(x + m; y + n)$, де m і n — задані числа. Доведіть, що таке перетворення фігури F є паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}(m; n)$.

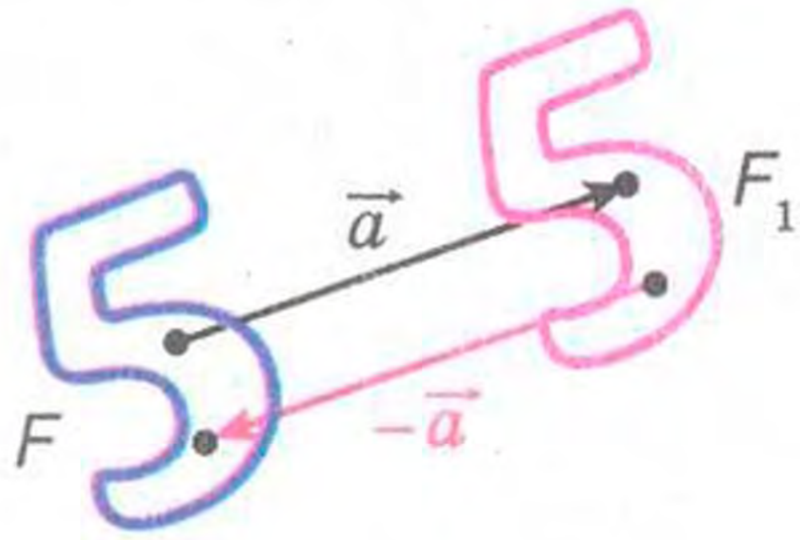


Рис. 20.6

Розв'язання. Розглянемо вектор $\vec{a}(m; n)$. Зауважимо, що координати вектора $\overrightarrow{XX_1}$ дорівнюють $(m; n)$, тобто $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Отже, описане перетворення фігури F — паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$.

Приклад 1. Точка A_1 $(-2; 3)$ є образом точки A $(-1; 2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$ і координати образу точки B $(-7; -3)$.

Розв'язання. З умови випливає, що $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Звідси $\vec{a}(-1; 1)$. Нехай B_1 $(x; y)$ — образ точки B $(-7; -3)$. Тоді $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, тобто $x + 7 = -1$ і $y + 3 = 1$. Звідси $x = -8$, $y = -2$.

Приклад 2. Дано кут ABC і пряму p, не паралельну жодній із сторін цього кута (рис. 20.7). Побудуйте пряму p_1, паралельну прямій p, так, щоб сторони кута відтинали на ній відрізок заданої довжини a.

Розв'язання. Розглянемо вектор $\overrightarrow{MN}$ такий, що $MN \parallel p$ і $|\overrightarrow{MN}| = a$ (рис. 20.8). Побудуємо промінь B_1A_1, який є образом променя BA при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$, так, щоб промені BC і B_1A_1 перетиналися в деякій точці E. Нехай точка F — прообраз точки E при паралельному перенесенні, що розглядається. Тоді $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, тобто $|\overrightarrow{FE}| = a$ і $FE \parallel p$.

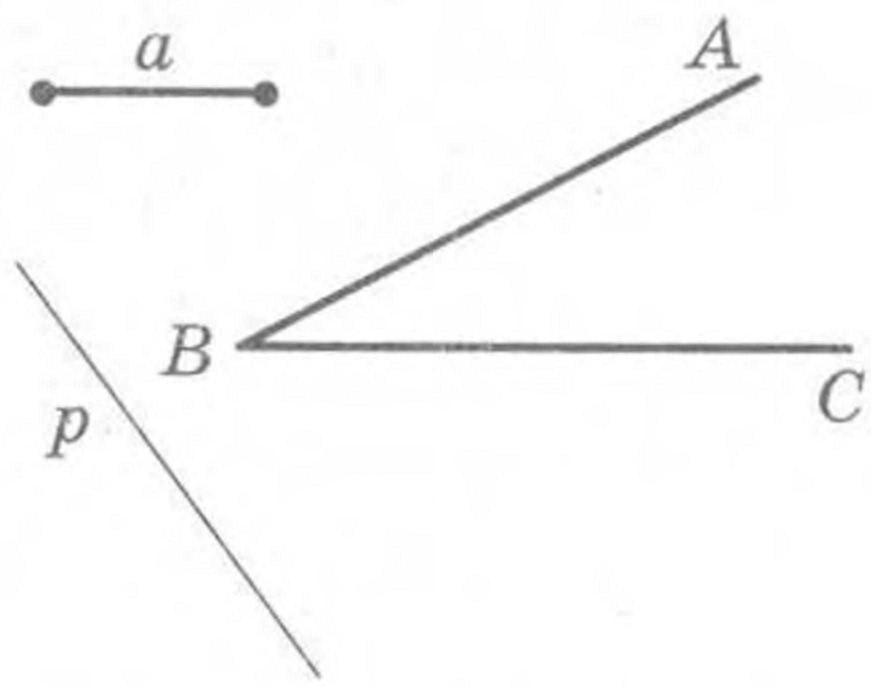


Рис. 20.7

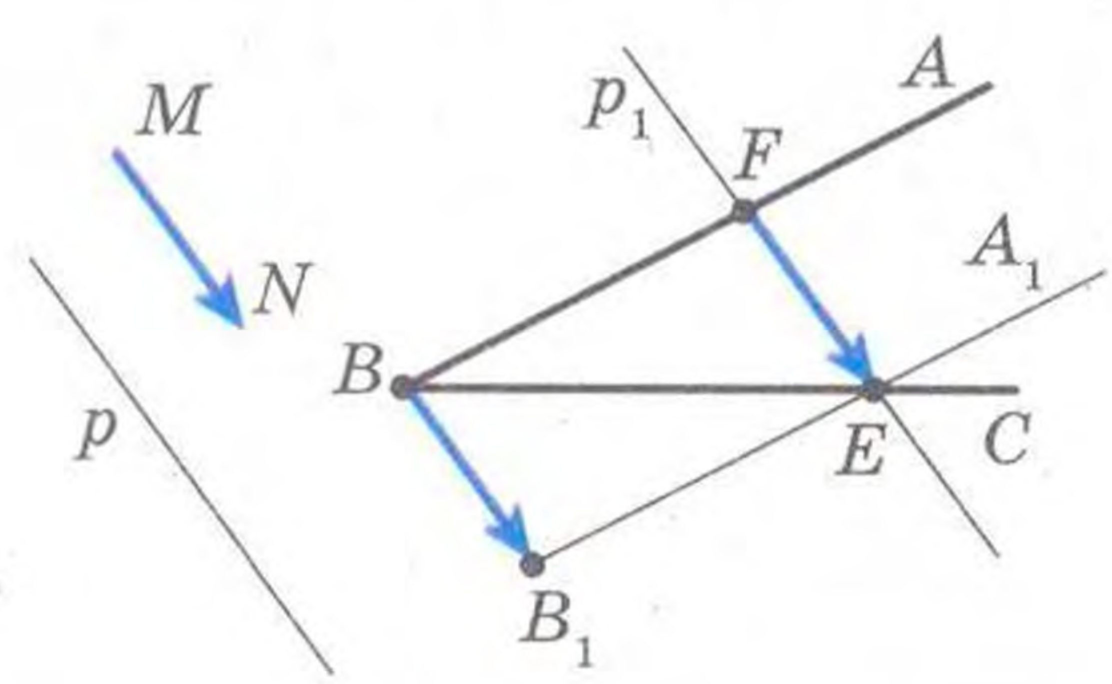


Рис. 20.8

Наведені міркування підказують такий алгоритм побудови:

1) знайти образ променя BA при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$;

2) позначити точку перетину променя BC з побудованим образом;

3) через знайдену точку провести пряму p_1, паралельну прямій p. Пряма p_1 буде шуканою.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

20.1.° Побудуйте образи відрізка AB і променя OM при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 20.9).

20.2.° На рисунку 20.10 пряма a є образом деякої прямої при паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}$. Побудуйте прообраз прямої a.

20.3.° Коло з центром O_1 є образом кола з центром O при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 20.11). Відкладіть вектор $\vec{a}$ від точки M.

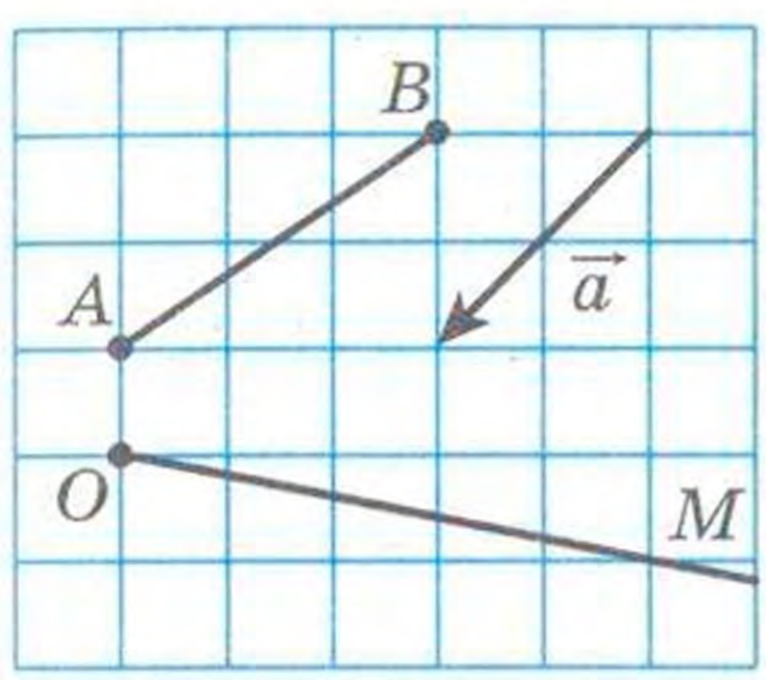


Рис. 20.9

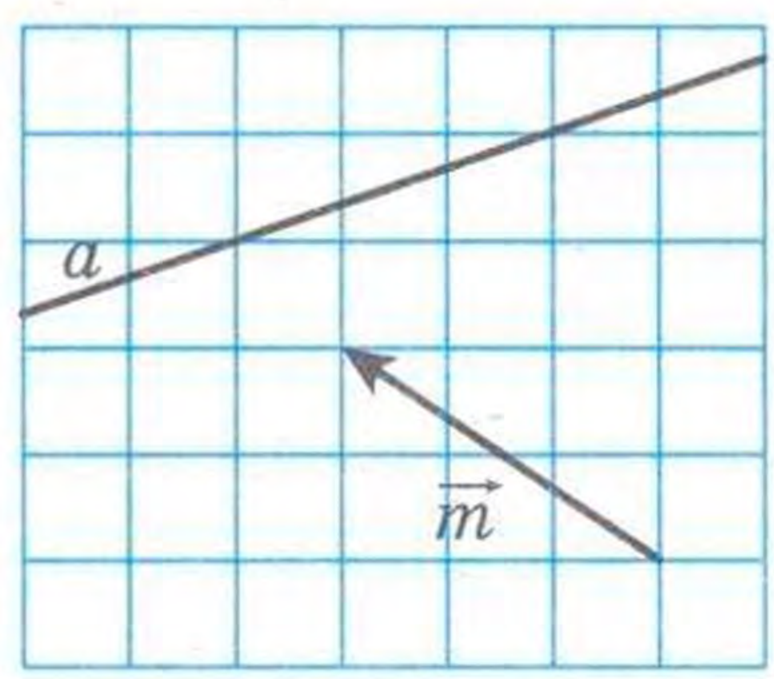


Рис. 20.10

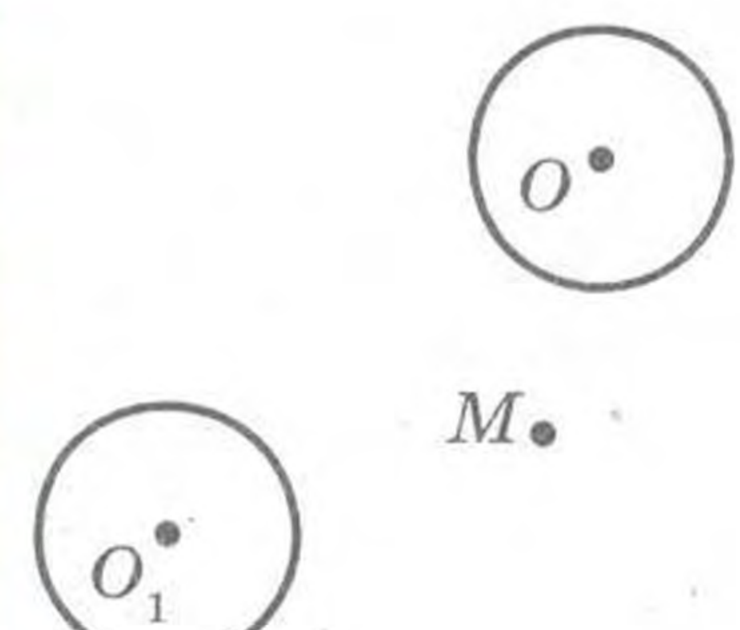


Рис. 20.11

ВПРАВИ

20.4.° Розглянемо коло з центром у точці O радіуса r. Кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1, яка належить радіусу OX, таку, що $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Чи є рухом описане перетворення?

20.5.° Дано кут AOB (рис. 20.12). Кожній точці X сторони OA поставимо у відповідність точку X_1, яка належить стороні OB і лежить на колі з центром O радіуса OX (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Доведіть, що описане перетворення є рухом.

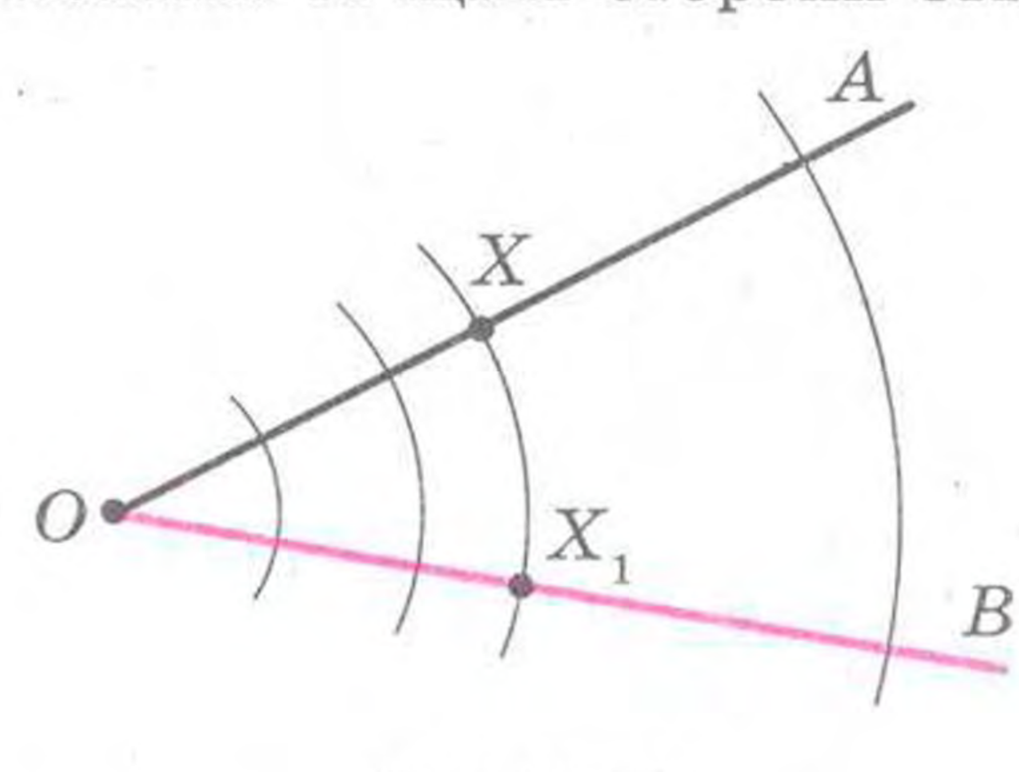


Рис. 20.12

20.6.° Дано кут MON. Кожній точці X сторони OM ставиться у відповідність така точка X_1 сторони ON, що пряма XX_1 перпендикулярна бісектрисі кута MON (точці O відповідає сама точка O). Доведіть, що описане перетворення є рухом.

20.7.° Дано пряму a і відрізок AB, який не має з нею спільних точок. Кожній точці X відрізка AB ставиться у відповідність основа перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму a. При якому взаємному розміщенні прямої a і відрізка AB описане перетворення є рухом?

20.8.° Точки A_1 і B_1 не належать прямій AB і є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні прямої AB. Доведіть, що чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм.

20.9.° Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні відрізка AB. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB = 5$ см.

20.10.° Вектор $\vec{m}$ паралельний прямій a. Яка фігура є образом прямої a при її паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}$?

20.11.° Дано паралелограм $ABCD$. Який вектор задає паралельне перенесення паралелограма, при якому сторона AD є образом сторони BC?

20.12.° Чи існує паралельне перенесення рівностороннього трикутника ABC, при якому сторона AB є образом сторони BC?

20.13.° Знайдіть точки, які є образами точок $A\ (-2;\ 3)$ і $B\ (1;\ -4)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\,(-1; -3)$.

20.14.° Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки $A\ (1;\ 3)$ є точка $A_1\ (4;\ 0)$, а образом точки $B\ (-2;\ 1)$ — точка $B_1\ (1;\ 4)$?

20.15.° При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\,(2; -1)$ образом точки A є точка $A_1(-3;\ 4)$. Знайдіть координати точки A.

20.16.° Точка $M_1\ (x;\ 2)$ є образом точки $M\ (3;\ y)$ при паралельному перенесенні, при якому точка $A\ (2;\ 3)$ є образом початку координат. Знайдіть x і y.

20.17.• Скільки існує паралельних перенесень прямої a, при яких її образом є пряма a?

20.18.• Дано точки $A\ (3;\ -2)$ і $B\ (5;\ -4)$. При паралельному перенесенні відрізка AB образом його середини є точка $M_1\ (-4;\ 3)$. Знайдіть образи точок A і B.

20.19.$^{\bullet}$ Точки A (1; 3), B (2; 6), C (−3; 1) є вершинами паралелограма $ABCD$. При паралельному перенесенні паралелограма $ABCD$ образом точки перетину його діагоналей є точка O_1 (−2; −4). Знайдіть образи точок A, B, C і D.

20.20.$^{\bullet}$ Знайдіть рівняння кола, яке є образом кола $x^2 + y^2 = 1$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\,(-3; 4)$.

20.21.$^{\bullet}$ Знайдіть рівняння параболи, яка є образом параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\,(2; -3)$.

20.22.$^{\bullet}$ Усередині прямокутника $ABCD$ позначено точку M. Доведіть, що існує опуклий чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні і дорівнюють AB і BC, а сторони дорівнюють MA, MB, MC і MD.

20.23.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.

20.24.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трапецію за чотирма сторонами.

20.25.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте відрізок, рівний і паралельний даному відрізку AB, так, щоб один його кінець належав даній прямій, а другий — даному колу.

20.26.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте хорду даного кола, яка дорівнює і паралельна даному відрізку AB.

20.27.$^{\bullet\bullet}$ Два кола радіуса R дотикаються в точці M. На одному з них позначено точку A, на другому — точку B так, що $\angle AMB = 90°$. Доведіть, що $AB = 2R$.

20.28.* Побудуйте чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно непаралельні, за чотирма кутами і двома протилежними сторонами.

20.29.* У якому місці слід побудувати міст MN через річку, яка розділяє два населені пункти A і B (рис. 20.13), щоб шлях $AMNB$ був найкоротшим (береги річки вважаємо паралельними прямими, міст перпендикулярний берегам річки)?

20.30.* Усередині прямокутника $ABCD$ обрано точку M так, що $\angle BMC + \angle AMD = 180°$. Знайдіть суму кутів BCM і MAD.

20.31.* Усередині паралелограма $ABCD$ обрано точку M так, що $\angle MAD = \angle MCD$. Доведіть, що $\angle MBC = \angle MDC$.

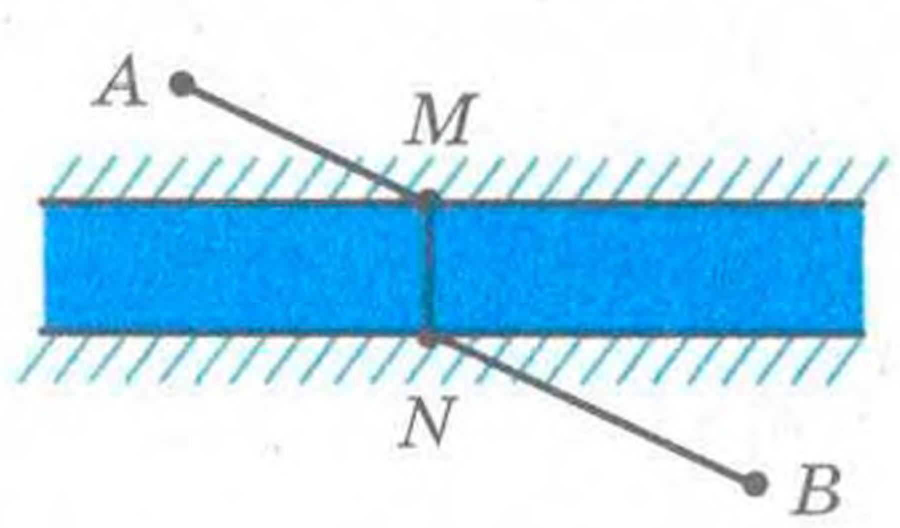


Рис. 20.13

21. Осьова симетрія

Означення. Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої l, якщо пряма l є серединним перпендикуляром відрізка AA_1 (рис. 21.1). **Якщо точка A належить прямій l, то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l.**

Наприклад, точки A і A_1, у яких ординати рівні, а абсциси — протилежні числа, симетричні відносно осі ординат (рис. 21.2).

Розглянемо фігуру F і пряму l. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно прямої l точку X_1. У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 21.3). Таке перетворення фігури F називають **осьовою симетрією відносно прямої l**. Перетворення, яке є осьовою симетрією відносно прямої l, позначають так: S_l. Пишуть $S_l\,(F) = F_1$. Пряму l називають **віссю симетрії**. Також говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно прямої l**.

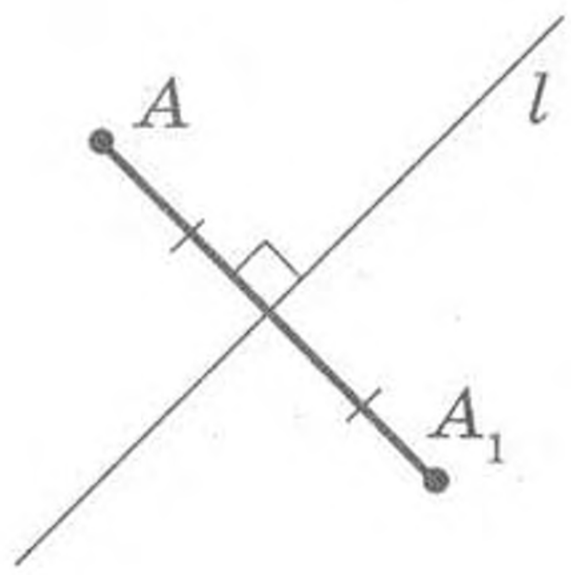


Рис. 21.1

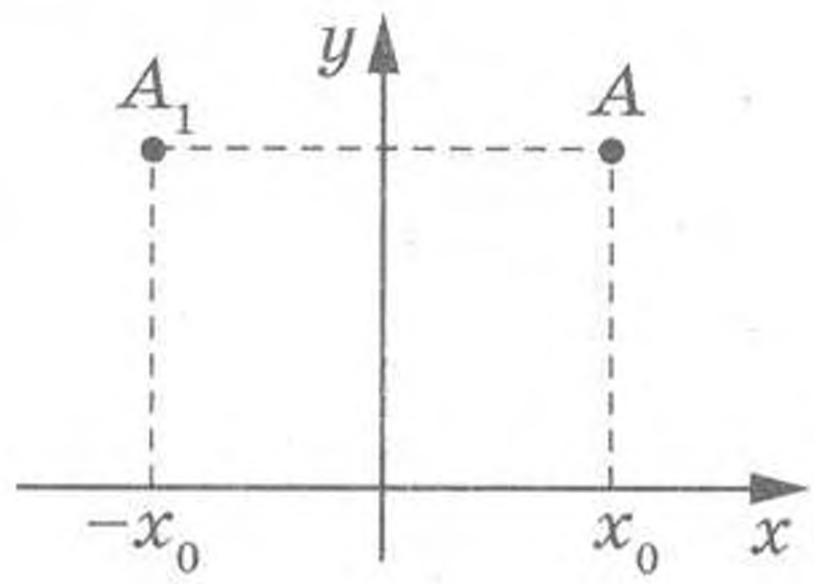


Рис. 21.2

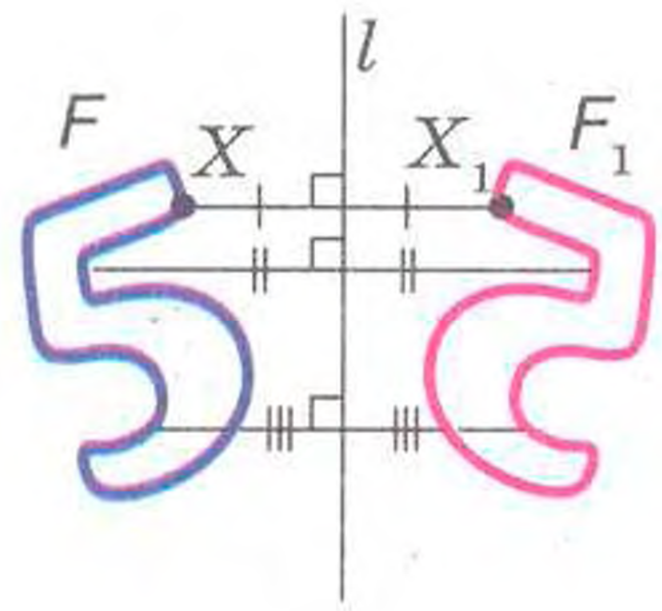


Рис. 21.3

Теорема 21.1 (властивість осьової симетрії). ***Осьова симетрія є рухом.***

Доведення. Оберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю ординат.

Нехай $A\,(x_1;\,y_1)$ і $B\,(x_2;\,y_2)$ — довільні точки фігури F. Очевидно, що точки $A_1\,(-x_1;\,y_1)$ і $B_1\,(-x_2;\,y_2)$ — їх відповідні образи при осьовій симетрії фігури F відносно осі ординат.

Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Отже, $AB = A_1B_1$, тобто осьова симетрія зберігає відстань між точками. ▲

Наслідок 1. *Якщо $S_l\,(F) = F_1$, то $F = F_1$.*

Наслідок 2. ***Осьова симетрія є оборотним перетворенням. Якщо $S_l(F) = F_1$, то $S_l(F_1) = F$, тобто $S_l \circ S_l(F) = F$.***

Доведення. Перша частина теореми випливає з оборотності руху.

Нехай X — довільна точка фігури F і $S_l(X) = X_1$. Тоді $S_l(X_1) = X$. Звідси $S_l \circ S_l(X) = X$, тобто $S_l \circ S_l(F) = F$. ▲

Означення. Фігуру F називають симетричною відносно прямої l, якщо $S_l(F) = F$.

Пряму l називають **віссю симетрії фігури F**. Також кажуть, що **фігура F має вісь симетрії.**

Наведемо приклади фігур, які мають вісь симетрії.

На рисунку 21.4 зображено рівнобедрений трикутник. Пряма, яка містить його висоту, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.

Будь-який кут має вісь симетрії — це пряма, яка містить його бісектрису (рис. 21.5).

Рівносторонній трикутник має три осі симетрії (рис. 21.6).

Рис. 21.4

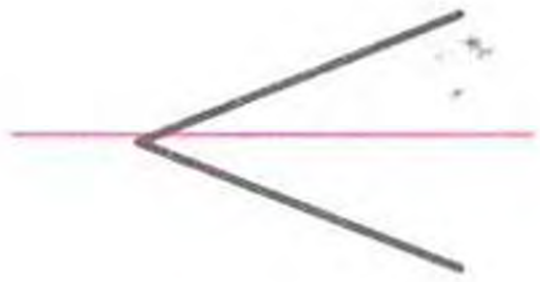


Рис. 21.5

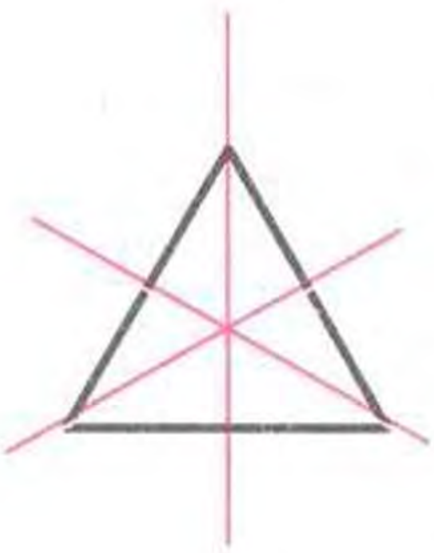


Рис. 21.6

Дві осі симетрії має відрізок: це його серединний перпендикуляр і пряма, яка містить цей відрізок (рис. 21.7).

Квадрат має чотири осі симетрії (рис. 21.8).

Прямокутник і ромб, які відмінні від квадрата, мають рівно по дві осі симетрії (рис. 21.9, 21.10). Ці осі перпендикулярні. Узагалі, справедлива така теорема.

Рис. 21.7

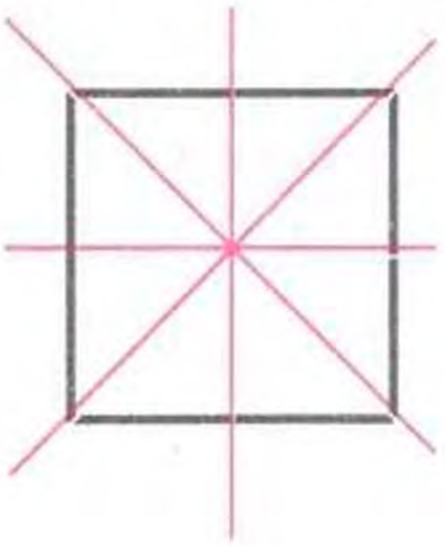


Рис. 21.8

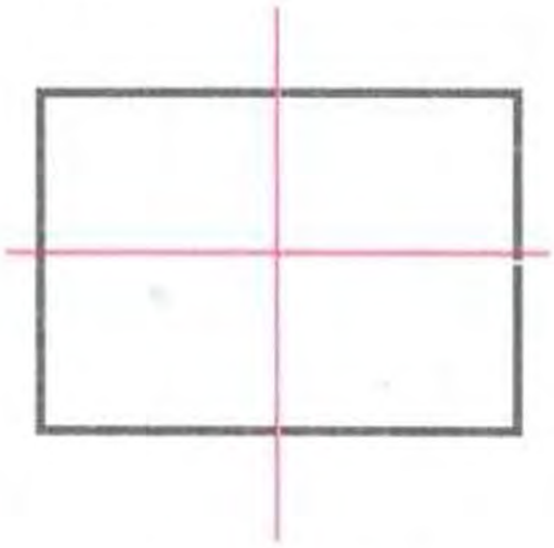


Рис. 21.9

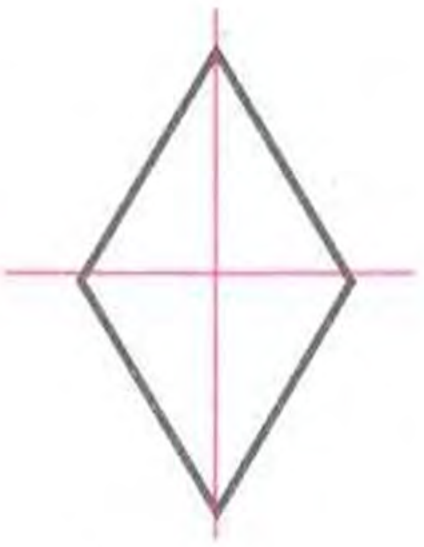


Рис. 21.10

Теорема 21.2. ***Якщо фігура має рівно дві осі симетрії, то ці осі перпендикулярні.***

Цю теорему ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Існують фігури, які мають безліч осей симетрії, наприклад коло. Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, є його віссю симетрії (рис. 21.11). Безліч осей симетрії має й пряма: сама пряма і будь-яка пряма, перпендикулярна до неї, є її осями симетрії.

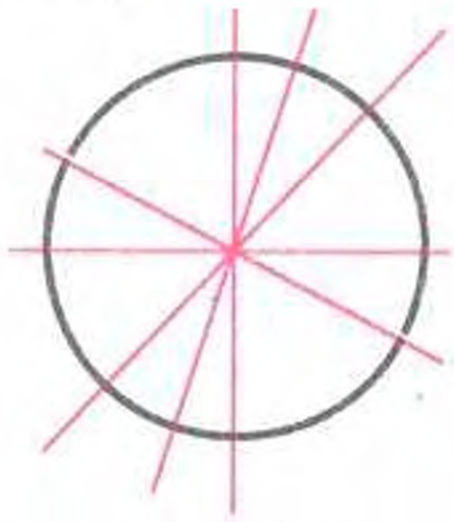


Рис. 21.11

Ми бачимо, що осі симетрії рівностороннього трикутника, прямокутника, ромба, квадрата перетинаються в одній точці. Узагалі, справедлива така теорема.

Теорема 21.3. ***Якщо многокутник має дві або більше осей симетрії, то всі вони перетинаються в одній точці.***

Цю теорему ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Нехай $l_1 \parallel l_2$ і $S_{l_1}(F)=F_1$, $S_{l_2}(F_1)=F_2$ (рис. 21.12). Наочні міркування показують, що фігура F_2 — це образ фігури F при деякому паралельному перенесенні.

Строге обґрунтування цього факту дає така теорема.

Теорема 21.4. ***Якщо дві осі симетрії паралельні, то композиція симетрій відносно цих осей є паралельним перенесенням.***

Складемо план доведення, який ви зможете реалізувати самостійно.

Нехай прямі l_1 і l_2 паралельні і $T_{\vec{a}}(l_1)=l_2$, де $\vec{a} \perp l_1$. Покажіть, що $S_{l_2} \circ S_{l_1} = T_{2\vec{a}}$.

Для цього введіть систему координат так, як показано на рисунку 21.13. Нехай X — довільна точка фігури F, $S_{l_1}(X)=X_1$, $S_{l_2}(X_1)=X_2$. Доведіть, що $\overrightarrow{XX_2}=2\vec{a}$.

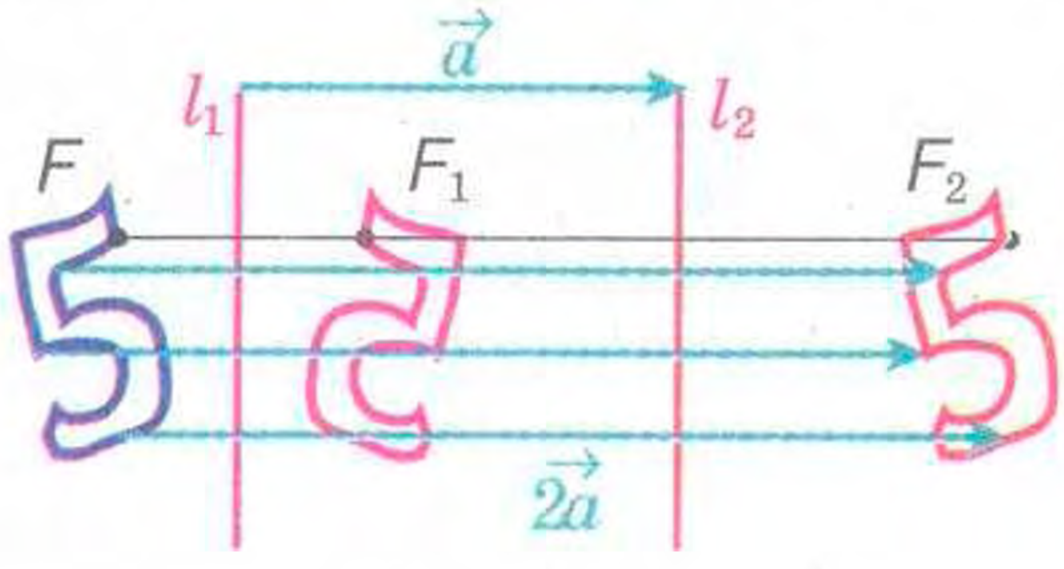


Рис. 21.12

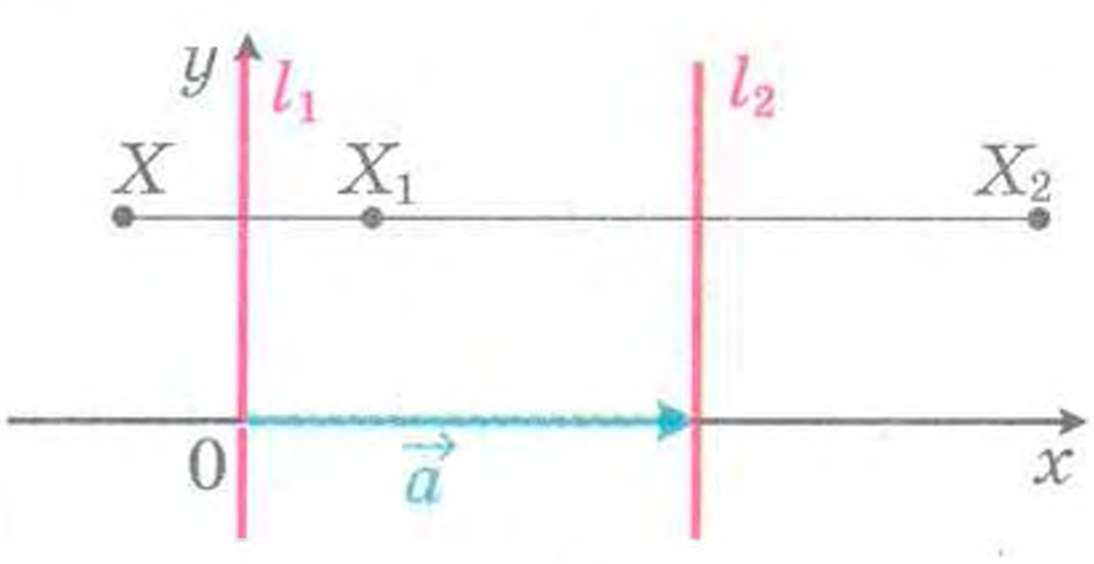


Рис. 21.13

Приклад 1. Дано нерівнобедрений трикутник ABC. Провели пряму l, яка містить бісектрису кута C. Потім увесь рисунок витерли, залишивши лише точки A і B та пряму l. Відновіть трикутник ABC.

Розв'язання. Оскільки пряма l є віссю симетрії кута ACB, то точка A_1, де $A_1 = S_l(A)$, належить променю CB. Тоді перетином прямих l і BA_1 є вершина C шуканого трикутника ABC (рис. 21.14).

Приклад 2. Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоб сума $AX + XB$ була найменшою.

Розв'язання. Нехай $S_a(A) = A_1$. Покажемо, що шукана точка X — це точка перетину прямих A_1B і a.

Нехай Y — довільна точка прямої a, яка відмінна від точки X (рис. 21.15), відрізки A_1X і A_1Y — образи відрізків AX і AY при симетрії відносно прямої a відповідно. Тоді $AX = A_1X$, $AY = A_1Y$.

Маємо $AX + BX = A_1X + BX = A_1B < A_1Y + YB = AY + YB$.

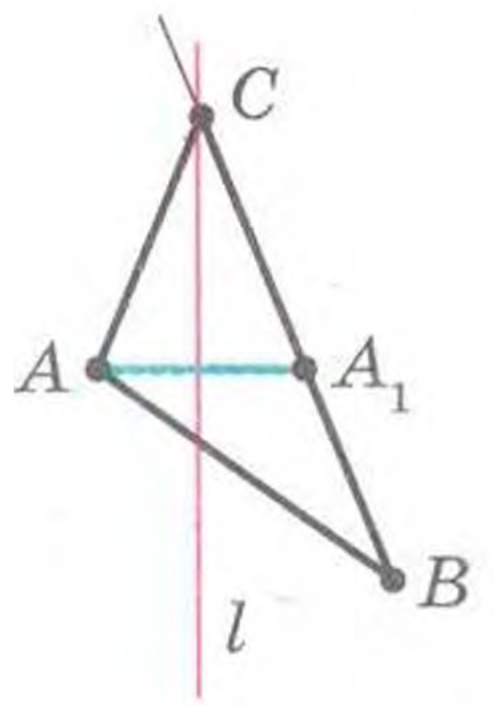


Рис. 21.14

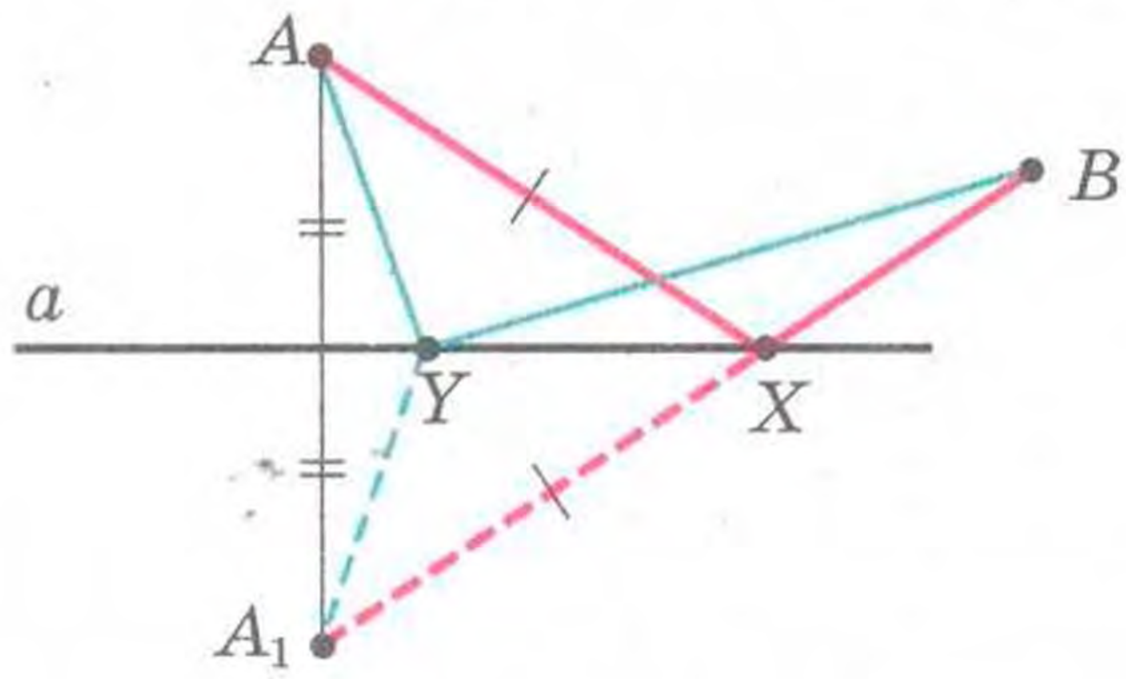


Рис. 21.15

Приклад 3. Точка O належить гострому куту ABC (рис. 21.16). На сторонах BA і BC кута знайдіть такі точки E і F, щоб периметр трикутника OEF був найменшим.

Розв'язання. Нехай $S_{BA}(O) = O_1$, $S_{BC}(O) = O_2$ (рис. 21.17)

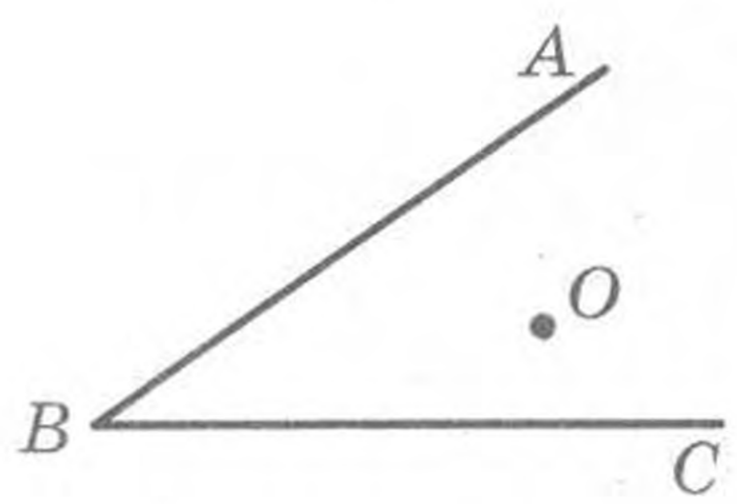


Рис. 21.16

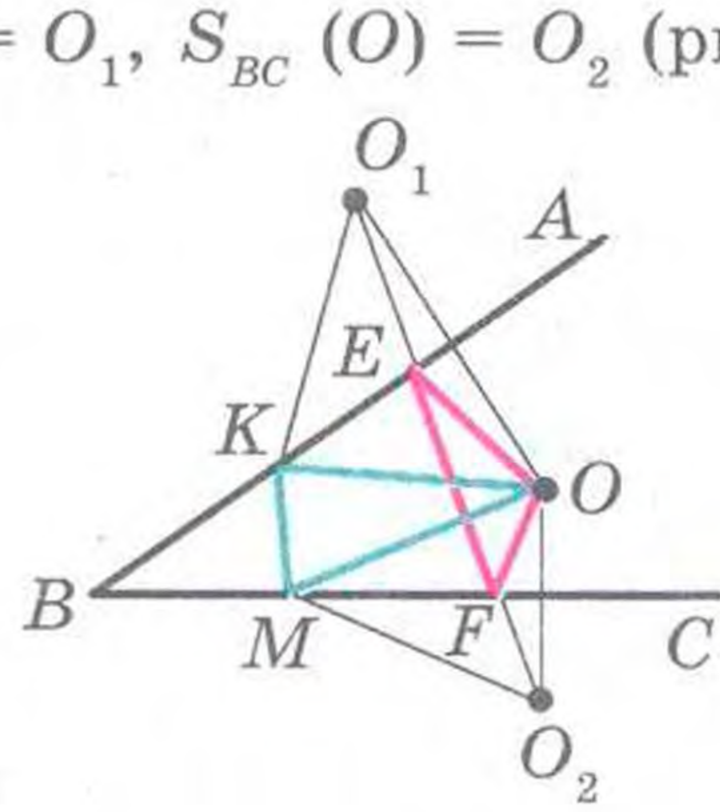


Рис. 21.17

і пряма O_1O_2 перетинає сторони BA і BC у точках E і F відповідно. Доведемо, що точки E і F — шукані.

Зауважимо, що відрізки EO_1 і EO симетричні відносно прямої BA. Отже, $EO_1 = EO$. Аналогічно $FO = FO_2$. Тоді периметр трикутника OEF дорівнює довжині відрізка O_1O_2.

Нехай K і M — довільні точки променів BA і BC, які відмінні від точок E і F відповідно. Зрозуміло, що $KO = KO_1$ і $MO = MO_2$. Тоді периметр трикутника KOM дорівнює сумі $O_1K + KM + MO_2$. Проте $O_1K + KM + MO_2 > O_1O_2$.

Задача. На сторонах AB, BC і CA гострокутного трикутника ABC знайдіть такі точки M, N і P відповідно, щоб периметр трикутника MNP був найменшим.

Розв'язання. Нехай P — довільна точка відрізка AC трикутника ABC, $S_{AB}(P) = P_1$, $S_{BC}(P) = P_2$ (рис. 21.18). Пряма P_1P_2 перетинає сторони AB і BC відповідно в точках M і N. У прикладі 3 ми показали, що периметр трикутника MNP є найменшим з усіх трикутників, для яких точка P фіксована, а точки M і N належать сторонам AB і BC. Цей периметр дорівнює довжині відрізка P_1P_2.

Зауважимо, що EF — середня лінія трикутника PP_1P_2. Тоді $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Оскільки $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, то точки P, E, B, F лежать на одному колі з діаметром BP. Звідси $EF = BP \cdot \sin B$. Отже, довжина відрізка EF буде найменшою при найменшій довжині відрізка BP, тобто тоді, коли BP — висота трикутника ABC.

На рисунку 21.19 відрізок BP — висота трикутника ABC. Будуємо шуканий трикутник MNP за відомим алгоритмом.

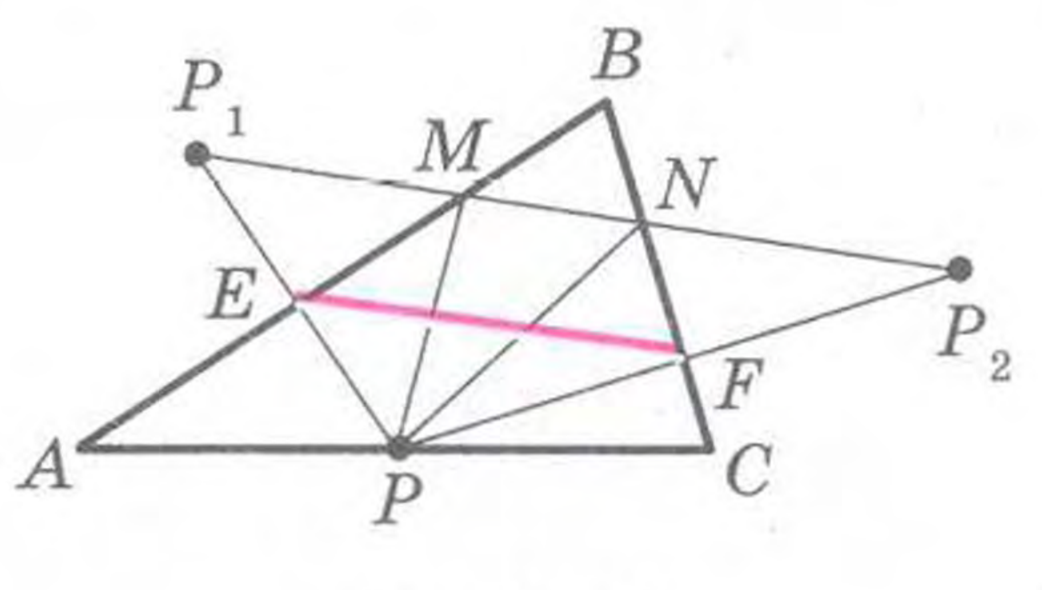


Рис. 21.18

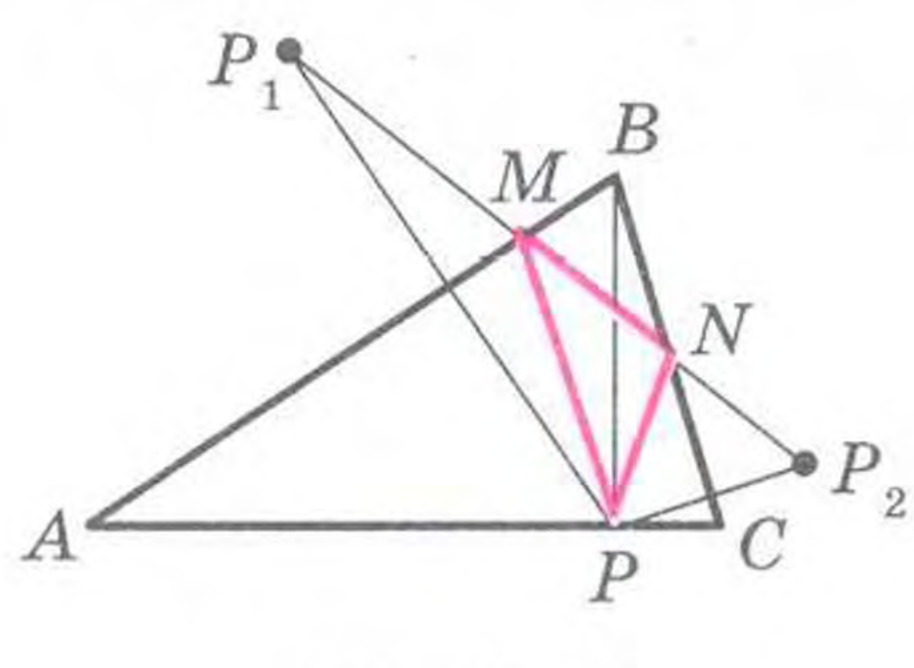


Рис. 21.19

Із побудови випливає, що будь-який інший трикутник, вершини якого лежать на сторонах трикутника ABC, має периметр, більший за периметр трикутника MNP. Отже, шуканий трикутник є єдиним — це побудований трикутник MNP.

Цей самий трикутник можна отримати, провівши висоти з вершин A і C.

Отже, вершини шуканого трикутника — це основи висот даного трикутника ABC. Такий трикутник називають **ортоцентричним**.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

21.1.° Побудуйте образи фігур, зображених на рисунку 21.20, при симетрії відносно прямої l.

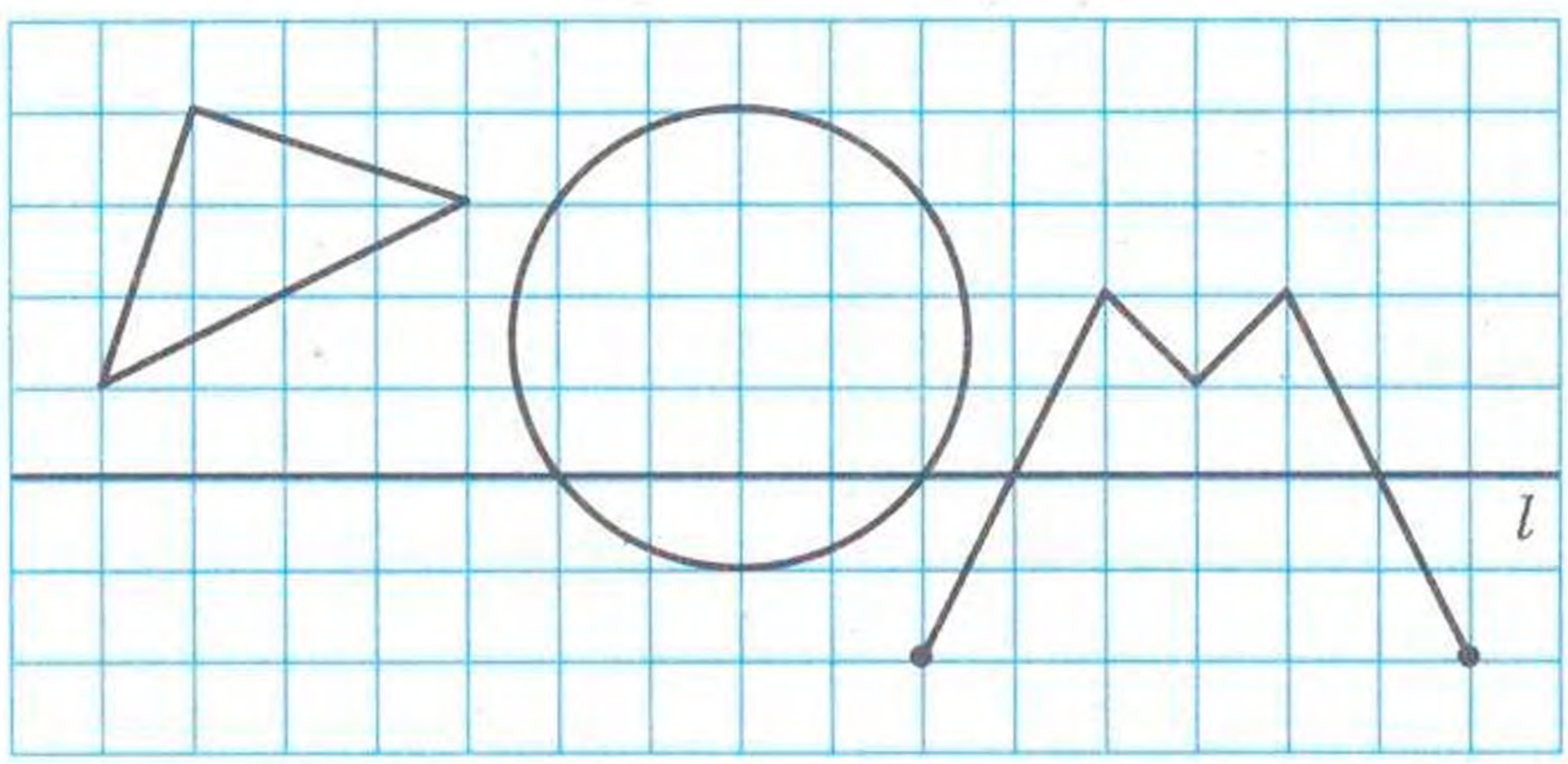


Рис. 21.20

21.2.° Накресліть трикутник. Побудуйте трикутник, симетричний йому відносно прямої, яка містить одну з його середніх ліній.

21.3.° Точки A і B симетричні відносно прямої l (рис. 21.21). Побудуйте пряму l.

Рис. 21.21

21.4.° Проведіть прямі a і a_1, які перетинаються. Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетрична прямій a. Скільки розв'язків має задача?

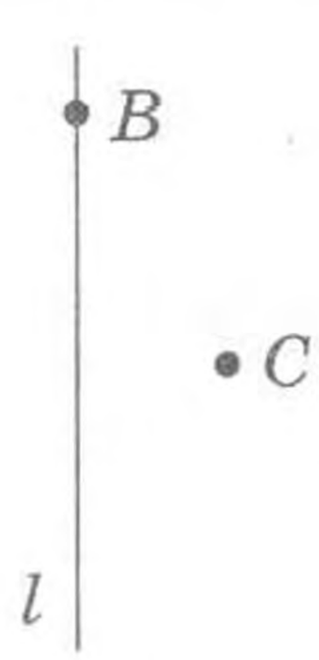


Рис. 21.22

21.5.° Проведіть паралельні прямі a і a_1. Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетричною прямій a.

21.6.° Відновіть ромб $ABCD$ за його вершинами B і C та прямою l, яка містить його діагональ BD (рис. 21.22).

21.7.° Відновіть рівнобедрений трикутник ABC за вершиною A, точкою K, яка належить бічній стороні BC, і прямою, яка містить висоту, проведену до основи AB (рис. 21.23).

21.8.° Кола з центрами O_1 і O_2 мають дві спільні точки (рис. 21.24). За допомогою тільки циркуля побудуйте кола, симетричні даним відносно прямої AB.

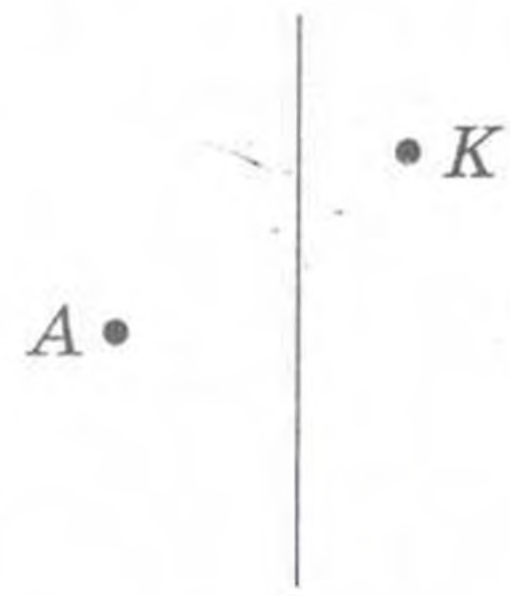


Рис. 21.23

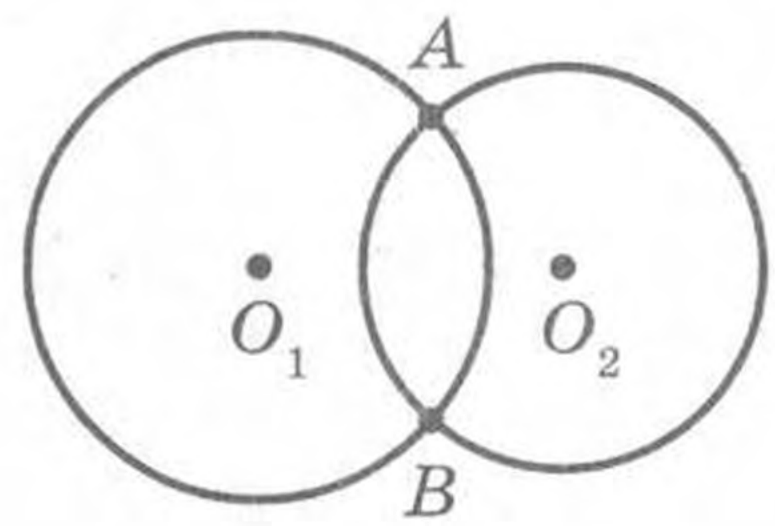


Рис. 21.24

ВПРАВИ

21.9.° Пряма l проходить через середину відрізка AB. Чи обов'язково точки A і B є симетричними відносно прямої l?

21.10.° На рисунку 21.25 зображено рівнобедрений трикутник ABC і пряму l, яка містить його висоту, проведену до основи AC. Відрізки AM і CN — його медіани. Укажіть образи точок A і B, медіани CN і сторони AC при симетрії відносно прямої l.

21.11.° На рисунку 21.26 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$ і пряму l, яка проходить через середини її основ. Укажіть образи точок B і D, діагоналі AC і основи BC при симетрії відносно прямої l.

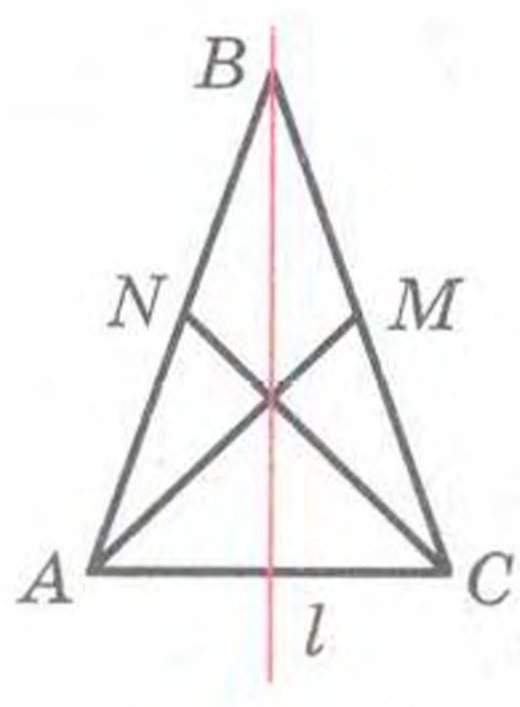


Рис. 21.25

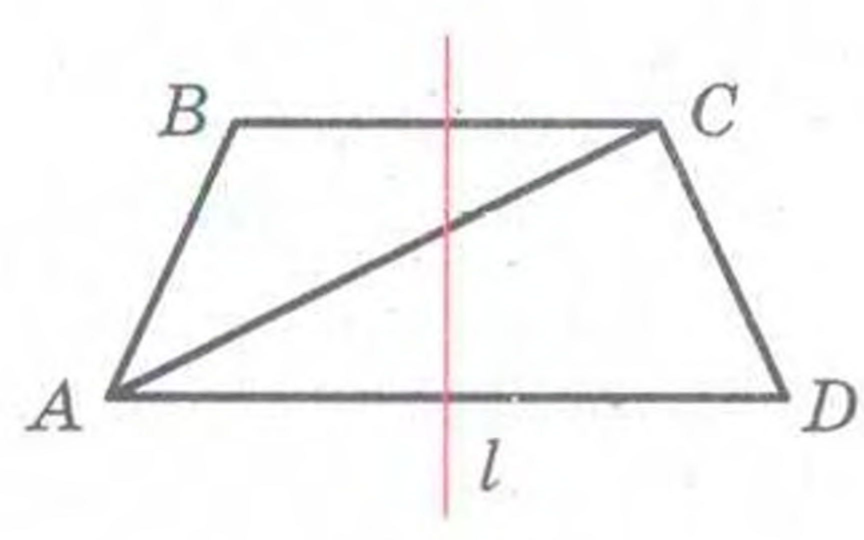


Рис. 21.26

21.12.° Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

21.13.° Доведіть, що пряма, яка містить медіану рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є його віссю симетрії.

21.14.° Доведіть, що прямі, які містять діагоналі ромба, є його осями симетрії.

21.15.° Доведіть, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін прямокутника, є його осями симетрії.

21.16.° Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.

21.17.° Кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що точки A і B симетричні відносно прямої O_1O_2.

21.18.° Знайдіть координати точок, симетричних точкам A $(-2; 1)$ і B $(0; -4)$ відносно осей координат.

21.19.° Точки A $(x; 3)$ і B $(-2; y)$ симетричні відносно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат. Знайдіть x і y.

21.20.• Образом прямої a при симетрії відносно прямої l є сама пряма a. Яке взаємне розміщення прямих a і l?

21.21.• Доведіть, що трикутник, який має вісь симетрії, є рівнобедреним.

21.22.• Доведіть, що трикутник, який має дві осі симетрії, є рівностороннім. Чи може трикутник мати рівно дві осі симетрії?

21.23.• Доведіть, що коли паралелограм має рівно дві осі симетрії, то він є або прямокутником, або ромбом.

21.24.• Доведіть, що коли чотирикутник має чотири осі симетрії, то він є квадратом.

21.25.• Точка M належить прямому куту ABC (рис. 21.27). Точки M_1 і M_2 — образи точки M при симетрії відносно прямих BA і BC відповідно. Доведіть, що точки M_1, B, M_2 лежать на одній прямій.

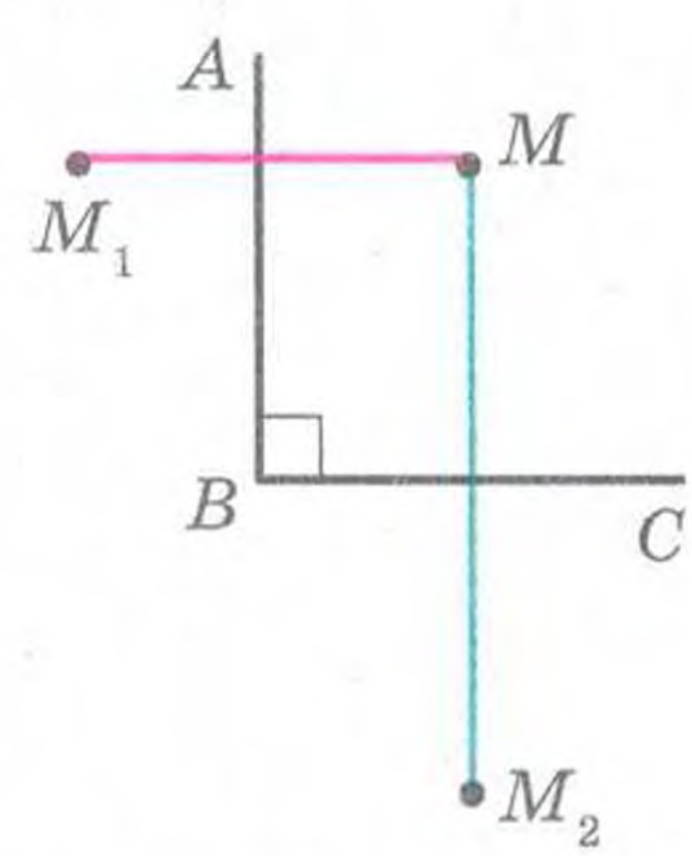


Рис. 21.27

21.26.• Знайдіть координати точок, симетричних точкам A $(-2; 0)$ і B $(3; -1)$ відносно прямої, яка містить бісектриси: 1) першого і третього координатних кутів; 2) другого і четвертого координатного кутів.

21.27.• Точки A $(x; -1)$ і B $(y; 2)$ симетричні відносно прямої, яка містить бісектриси першого і третього координатних кутів. Знайдіть x і y.

21.28.$^{\bullet}$ Центр кола, вписаного в чотирикутник, лежить на його діагоналі. Доведіть, що цей чотирикутник має вісь симетрії.

21.29.$^{\bullet}$ Доведіть, що опуклий чотирикутник, який має вісь симетрії, є або вписаним в коло, або описаним навколо кола.

21.30.$^{\bullet}$ Доведіть, що точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно прямих, які містять його сторони, лежать на описаному колі цього трикутника.

21.31.$^{\bullet\bullet}$ У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана AM, проведена до меншого катета, утворює з більшим катетом кут $15°$. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AM = m$.

21.32.$^{\bullet\bullet}$ Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої a. На прямій a знайдіть таку точку X, щоб пряма a містила бісектрису кута AXB.

21.33.$^{\bullet\bullet}$ Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоб промені XA і XB утворювали з цією прямою рівні кути.

21.34.$^{\bullet\bullet}$ Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоб величина $|AX - XB|$ була найбільшою.

21.35.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що з усіх трикутників зі сталою основою і сталою висотою, проведеною до цієї основи, рівнобедрений має найменший периметр.

21.36.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N належать куту ABC. Знайдіть на сторонах цього кута такі точки E і F, щоб периметр чотирикутника $EMNF$ був найменшим.

21.37.$^{\bullet\bullet}$ Через вершину A трикутника ABC і точку D, яка лежить на стороні BC, проведено пряму. Відомо, що $\angle ADB \neq 90°$. Знайдіть на цій прямій таку точку X, з якої відрізки BD і DC було б видно під однаковими кутами.

21.38.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник ABC, якщо дано пряму AB і серединні перпендикуляри до сторін BC і CA.

21.39.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник ABC, якщо дано вершину A і прямі, на яких лежать бісектриси кутів B і C.

21.40.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте паралелограм $ABCD$ за вершиною D і серединними перпендикулярами до сторін AB і BC.

21.41.$^{\bullet\bullet}$ На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M, відмінну від точки C. Доведіть, що $MA + MB > CA + CB$.

21.42.** Точки A, B і C є вершинами нерівнобедреного трикутника. Скільки існує таких точок D, що чотирикутник з вершинами A, B, C і D має хоча б одну вісь симетрії?

21.43.* Побудуйте трикутник ABC за двома сторонами AB і AC ($AB < AC$) і різницею кутів B і C.

21.44.* Побудуйте трапецію за бічними сторонами, основою і різницею кутів при цій основі.

21.45.* Точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB (рис. 21.28). На прямій AB знайдіть таку точку X, що $\angle AXC = \frac{1}{2}\angle DXB$.

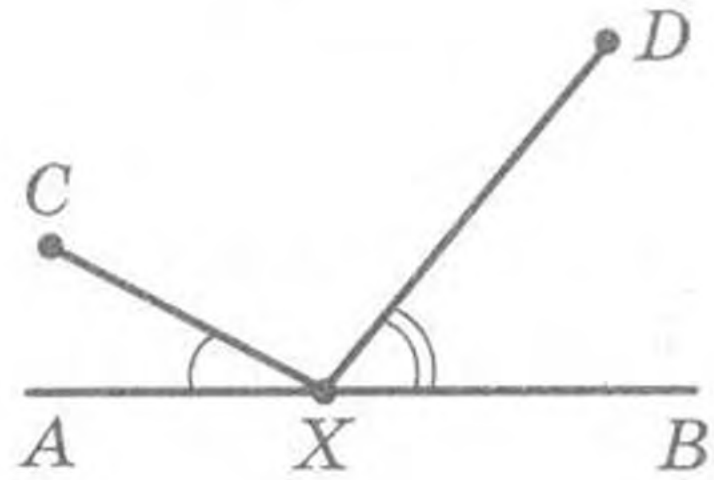


Рис. 21.28

21.46.* Точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB. На прямій AB знайдіть таку точку X, що $|\angle AXC - \angle BXD| = 90°$.

21.47.* Доведіть, що площа опуклого чотирикутника $ABCD$ не перевищує $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

21.48.* Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за чотирма його сторонами, якщо відомо, що його діагональ AC є бісектрисою кута A.

21.49.* У коло вписано гострокутний трикутник. Побудуйте шестикутник, вписаний в це коло, площа якого вдвічі більша за площу даного трикутника.

21.50.* В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кут BAD дорівнює $60°$. Відомо, що точки, симетричні точці A відносно прямих CB і CD, лежать на прямій BD. Знайдіть кут BCD.

21.51.* У прямокутній трапеції $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$) бісектриса кута ADC перетинає сторону AB в точці M. Знайдіть кут CMD, якщо $CD = AD + BC$.

21.52.* Точка M — середина сторони BC опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що $\angle AMD = 120°$. Доведіть, що $AB + \frac{1}{2}BC + CD \geqslant AD$.

21.53.* Сторони опуклого п'ятикутника $ABCDE$ рівні. Відомо, що $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle BCD$. Знайдіть кут ACE.

22. Центральна симетрія

Означення. Точки A і A_1 називають симетричними відносно точки O, якщо точка O є серединою відрізка AA_1 (рис. 22.1). **Точку O вважають симетричною самій собі.**

Наприклад, точки A і A_1, у яких відповідні абсциси й ординати — протилежні числа, симетричні відносно початку координат (рис. 22.2).

Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно точки O точку X_1. У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 22.3). Таке перетворення фігури F називають **центральною симетрією відносно точки O** і позначають так: S_O. Пишуть $S_O(F) = F_1$. Точку O називають **центром симетрії**. Також говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно точки O**.

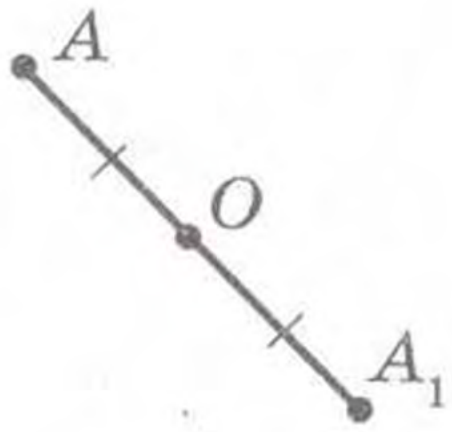


Рис. 22.1

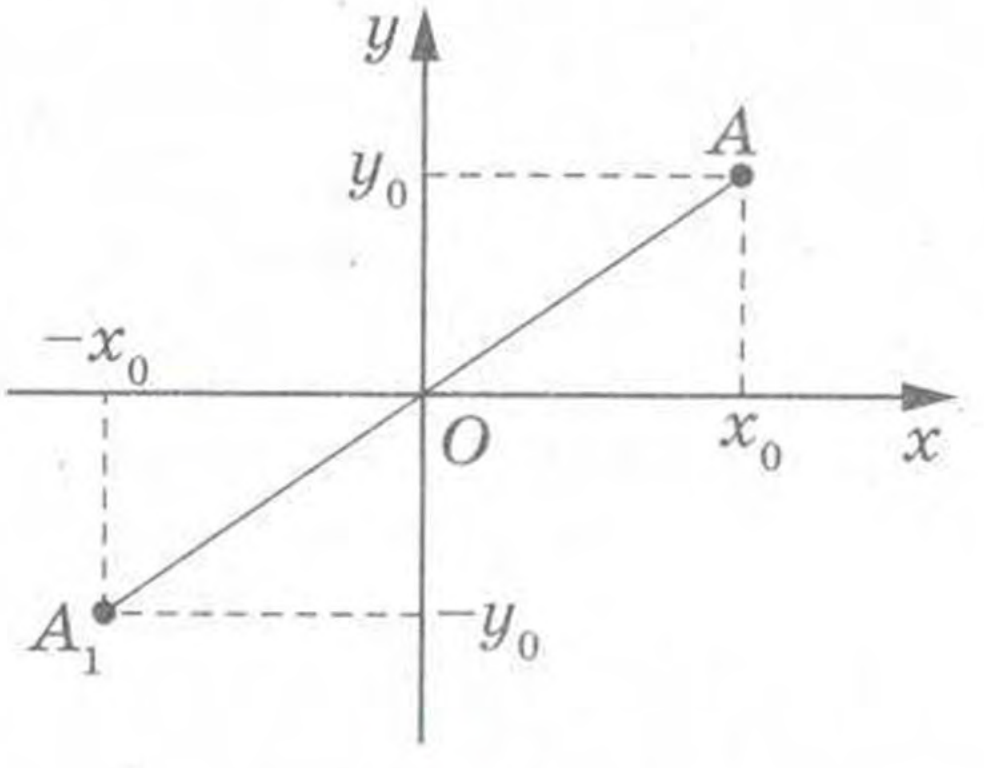


Рис. 22.2

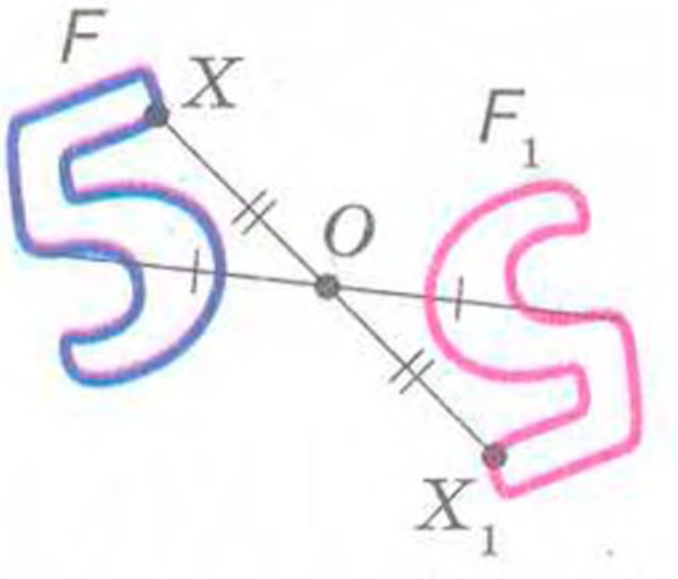


Рис. 22.3

Теорема 22.1 (властивість центральної симетрії). *Центральна симетрія є рухом.*

Доведення. Оберемо систему координат так, щоб центр симетрії збігався з початком координат. Нехай точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ належать фігурі F. Точки $A_1(-x_1; -y_1)$ і $B_1(-x_2; -y_2)$ — відповідно їх образи при центральній симетрії відносно початку координат.

Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Отже, $AB = A_1B_1$, тобто центральна симетрія зберігає відстань між точками. ▲

Наслідок 1. *Якщо $S_O(F) = F_1$, то $F = F_1$.*

Наслідок 2. *Центральна симетрія є оборотним перетворенням. Якщо $S_O(F) = F_1$, то $S_O(F_1) = F$, тобто*

$$S_O \circ S_O(F) = F.$$

Означення. **Фігуру F називають симетричною відносно точки O, якщо $S_O(F) = F$.**

Точку O називають **центром симетрії фігури.** Також кажуть, що **фігура має центр симетрії.**

Наведемо приклади фігур, які мають центр симетрії.

Центром симетрії відрізка є його середина (рис. 22.4).

Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії (рис. 22.5).

Рис. 22.4

Існують фігури, які мають безліч центрів симетрії. Наприклад, кожна точка прямої є її центром симетрії.

Також безліч центрів симетрії має фігура, яка складається з двох паралельних прямих. Будь-яка точка прямої, рівновіддаленої від двох даних, є центром симетрії фігури, яку ми розглядаємо (рис. 22.6).

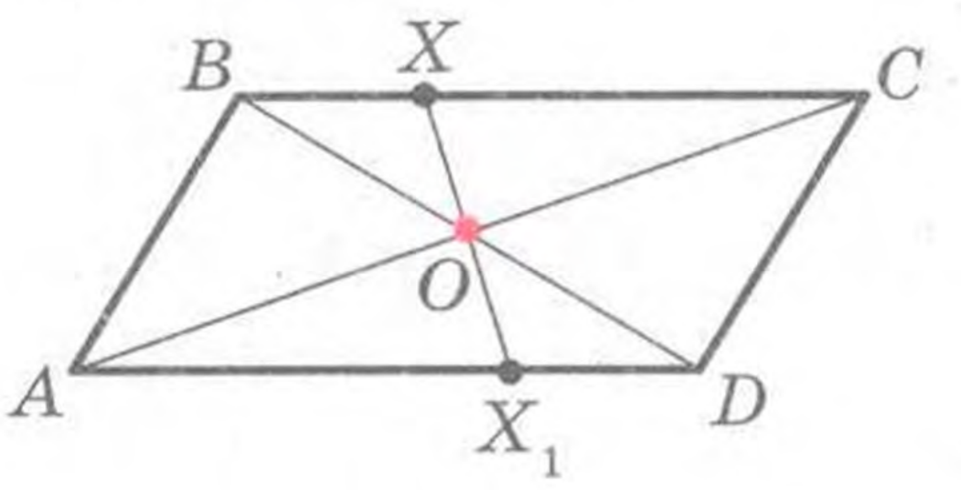


Рис. 22.5

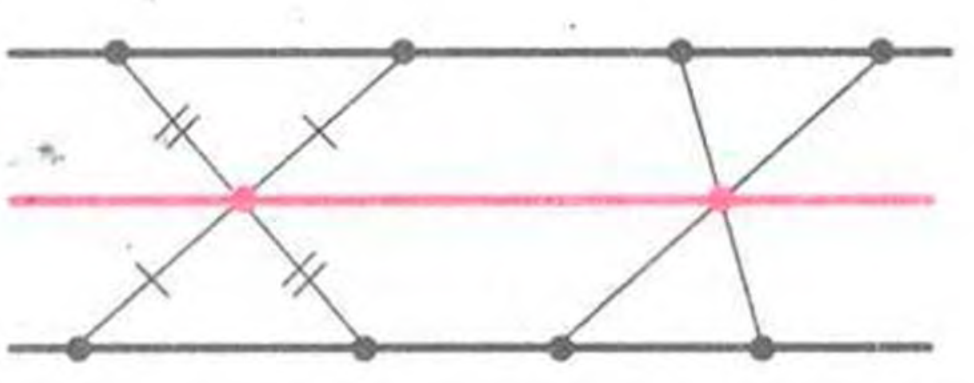


Рис. 22.6

Задача 1. Доведіть, що образом даної прямої l при симетрії відносно точки O, яка не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

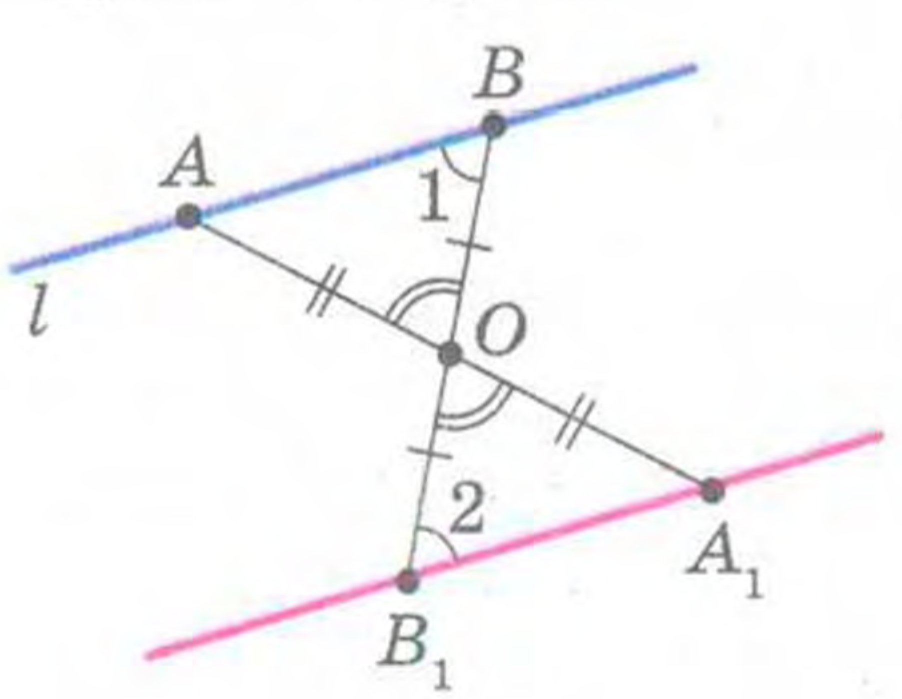


Рис. 22.7

Розв'язання. Оскільки центральна симетрія — це рух, то образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знати дві будь-які її точки.

Оберемо на прямій l довільні точки A і B (рис. 22.7). Нехай точки A_1 і B_1 — їх образи при центральній симетрії відносно точки O, тобто

$S_O(A) = A_1$, $S_O(B) = B_1$. Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої l.

Оскільки $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, $\angle AOB$ і $\angle A_1OB_1$ рівні як вертикальні, то трикутники AOB і A_1OB_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 22.7). Отже, $l \parallel A_1B_1$.

Ми навели приклади фігур, які мають рівно один центр симетрії або безліч центрів симетрії. Виникає природне запитання: чи може фігура мати рівно два, рівно три і взагалі будь-яку скінченну, відмінну від 1, кількість центрів симетрії? Відповідь на це запитання заперечна. Ви можете довести цей факт на заняттях математичного гуртка.

Приклад 1. Точка M належить куту ABC (рис. 22.8). На сторонах BA і BC кута знайдіть такі точки E і F, щоб точка M була серединою відрізка EF.

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при центральній симетрії відносно точки M (рис. 22.9). Позначимо F — точку перетину прямих A_1B_1 і BC.

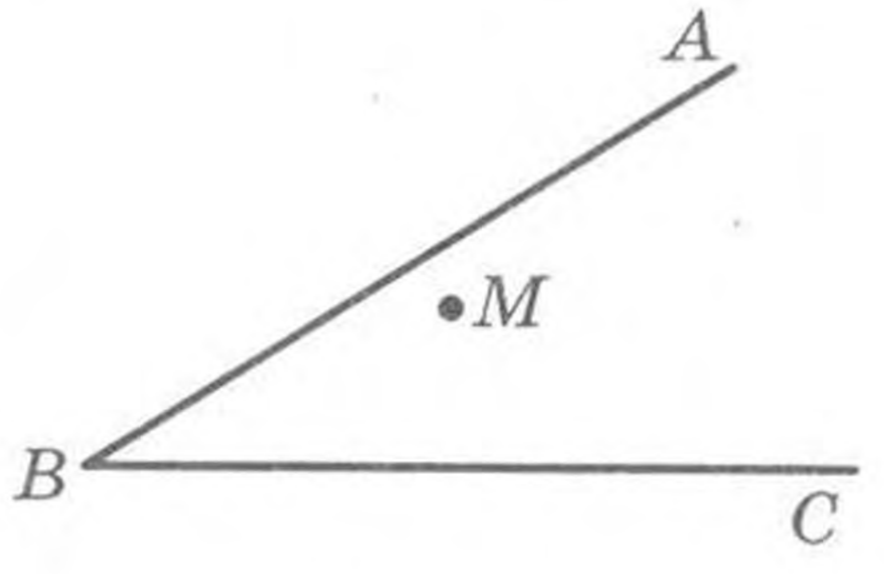


Рис. 22.8

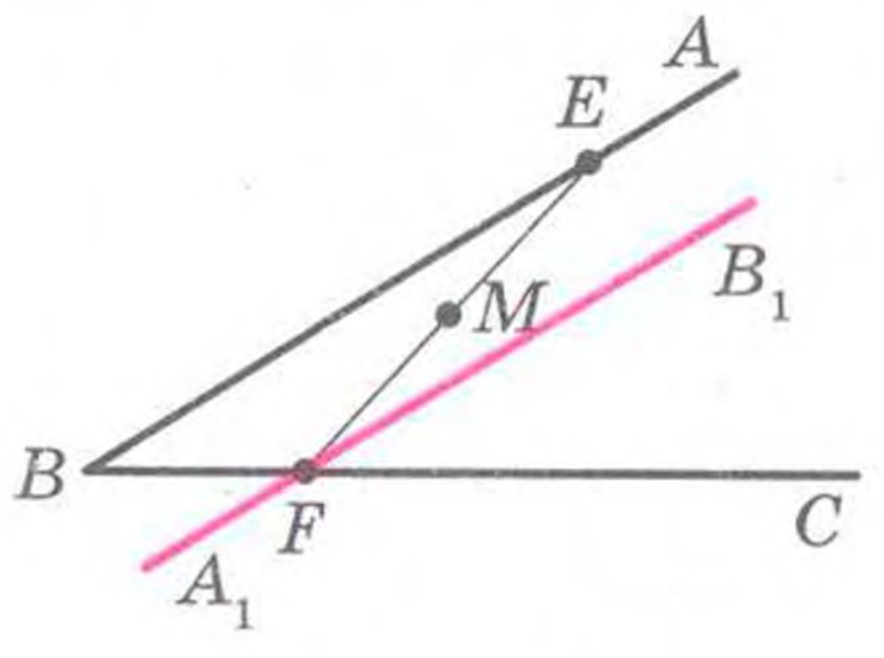


Рис. 22.9

Знайдемо прообраз точки F. Очевидно, що він лежить на прямій AB. Тому достатньо знайти точку перетину прямих FM і AB. Позначимо цю точку E. Тоді зрозуміло, що E і F — шукані точки.

Задача 2. Доведіть, що:

1) композиція двох центральних симетрій є паралельним перенесенням;

2) композиція центральної симетрії і паралельного перенесення є центральною симетрією;

3) композиція парної кількості центральних симетрій є паралельним перенесенням;

4) композиція непарної кількості центральних симетрій є центральною симетрією.

Розв'язання

1) Розглянемо дві центральні симетрії з центрами O_1 $(a_1; b_1)$ і O_2 $(a_2; b_2)$. Нехай A $(x; y)$ — довільна точка площини і $S_{O_1}(A)=A_1$, $S_{O_2}(A_1)=A_2$. Легко показати, що A_1 $(2a_1 - x; 2b_1 - y)$ і A_2 $(2a_2 - 2a_1 + x; 2b_2 - 2b_1 + y)$. Звідси отримуємо, що вектор $\overrightarrow{AA_2}$ при заданих точках O_1 і O_2 має сталі координати. Отже, точка A_2 є образом точки A при паралельному перенесенні на вектор з координатами $(2a_2 - 2a_1; 2b_2 - 2b_1)$.

2) Розглянемо композицію $T_{\vec{a}} \circ S_O$. Оберемо систему координат так, щоб центр симетрії, точка O, мав координати (0; 0). Нехай при цьому вектор $\vec{a}$ має координати $(a; b)$. Розглянемо довільну точку A $(x; y)$ координатної площини.

Маємо $S_O(A) = A_1$ $(-x; -y)$; $T_{\vec{a}}(A_1)=A_2(-x+a; -y+b)$. Отже, точка A_2 є образом точки A при центральній симетрії з центром $O_1\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. Аналогічно можна показати, що композиція $S_O \circ T_{\vec{a}}$ є центральною симетрією з центром $O_2\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.

Використовуючи пункти 1 і 2 задачі, доведіть пункти 3 і 4 самостійно.

Приклад 2. Побудуйте п'ятикутник $ABCDE$, якщо задано точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, які є серединами його сторін AB, BC, CD, DE, EA відповідно.

Розв'язання. Маємо: $S_{M_1}(A)=B$, $S_{M_2}(B)=C$, $S_{M_3}(C)=D$, $S_{M_4}(D)=E$, $S_{M_5}(E)=A$. Отже, $S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1}(A)=A$. Але композиція непарної кількості центральних симетрій є центральною симетрією. А при центральній симетрії лише одна точка збігається зі своїм образом — це центр симетрії. Отже, $S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1} = S_A$.

Тепер вершину A шуканого п'ятикутника можна побудувати таким чином. Нехай X — довільна точка. Побудуємо точки X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 такі, що $X_1 = S_{M_1}(X)$, $X_2 = S_{M_2}(X_1)$, $X_3 = S_{M_3}(X_2)$, $X_4 = S_{M_4}(X_3)$, $X_5 = S_{M_5}(X_4)$. Точка A є серединою відрізка XX_5. Подальша побудова є очевидною.

Вивчаючи навколишній світ, ми часто бачимо симетрію. Приклади прояву симетрії в природі показано на рисунку 22.10, *а*, *б*. Об'єкти, які мають вісь або центр симетрії, легко сприймаються

а)

б)

в)

Рис. 22.10

Рис. 22.11

і приємні для ока. Недарма в Стародавній Греції слово «симетрія» слугувало синонімом слів «гармонія», «краса».

Ідея симетрії широко використовується в образотворчому мистецтві, архітектурі (22.10, *в*) й техніці (рис. 22.11). Хіміки й фізики говорять про симетрію явищ. Можна знайти прояви симетрії в музиці й поезії.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

22.1.° Накресліть трикутник ABC і позначте точку O, яка не належить йому. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно точки O.

22.2.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно середини сторони AB.

22.3.° Накресліть коло і позначте на ньому точку. Побудуйте коло, симетричне даному відносно позначеної точки.

22.4.° Відновіть паралелограм $ABCD$ за його вершинами A і B та точкою O перетину його діагоналей (рис. 22.12).

22.5.° Дано дві паралельні прямі a і b (рис. 22.13). Знайдіть точку, відносно якої пряма a буде симетричною прямій b. Скільки розв'язків має задача?

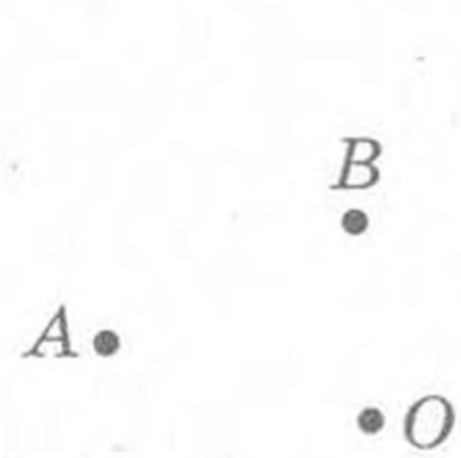


Рис. 22.12

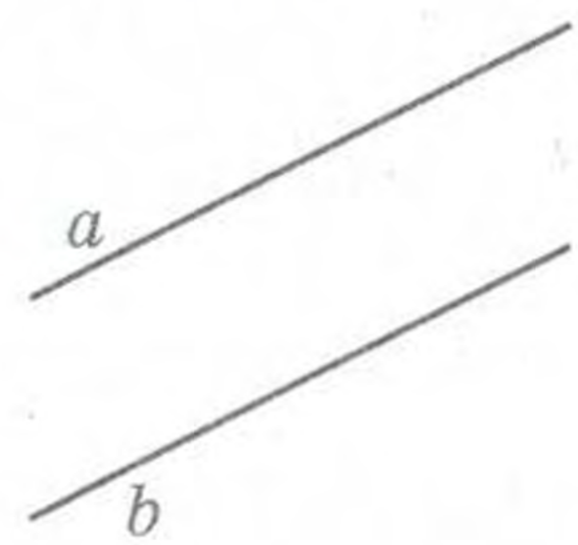


Рис. 22.13

ВПРАВИ

22.6.° Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 22.14). Точка M — середина сторони BC. Укажіть образи точок A, D і M, сторони CD, діагоналі BD при симетрії відносно точки O.

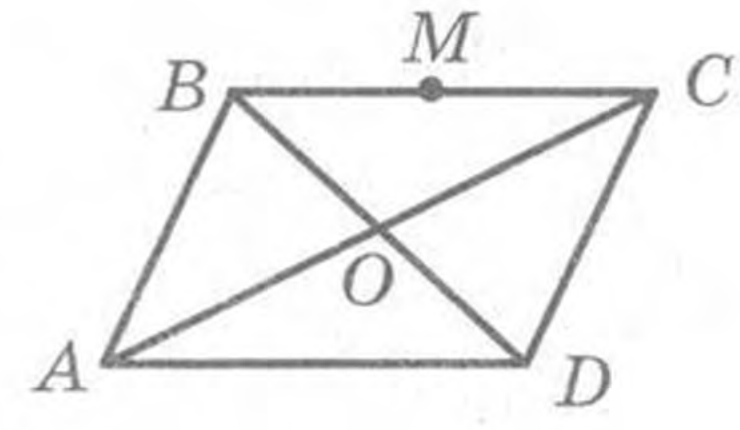


Рис. 22.14

22.7.° Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

22.8.° Доведіть, що коло має центр симетрії.

22.9.° Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при симетрії відносно точки, яка не належить прямій AB. Доведіть, що чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм.

22.10.° Знайдіть координати точок, симетричних точкам A (3; −1) і B (0; −2) відносно: 1) початку координат; 2) точки M (2; −3).

22.11.° Доведіть, що образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма.

22.12.° Точки A (x; −2) і B (1; y) симетричні відносно: 1) початку координат; 2) точки M (−1; 3). Знайдіть x і y.

22.13.• Доведіть, що трикутник не має центра симетрії.

22.14.• Доведіть, що промінь не має центра симетрії.

22.15.• Доведіть, що фігура, яка складається з двох рівних паралельних відрізків, має центр симетрії.

22.16.• Доведіть, що коли чотирикутник має центр симетрії, то він є паралелограмом.

22.17.• Вершини одного паралелограма лежать на сторонах другого: по одній вершині на кожній стороні. Доведіть, що точки перетину діагоналей цих паралелограмів збігаються.

22.18.• Кола з центрами O_1 і O_2 симетричні відносно точки O (рис. 22.15). Пряма, яка проходить через центр симетрії, перетинає перше коло в точках A_1 і B_1, а друге — в точках A_2 і B_2. Доведіть, що $A_1B_1 = A_2B_2$.

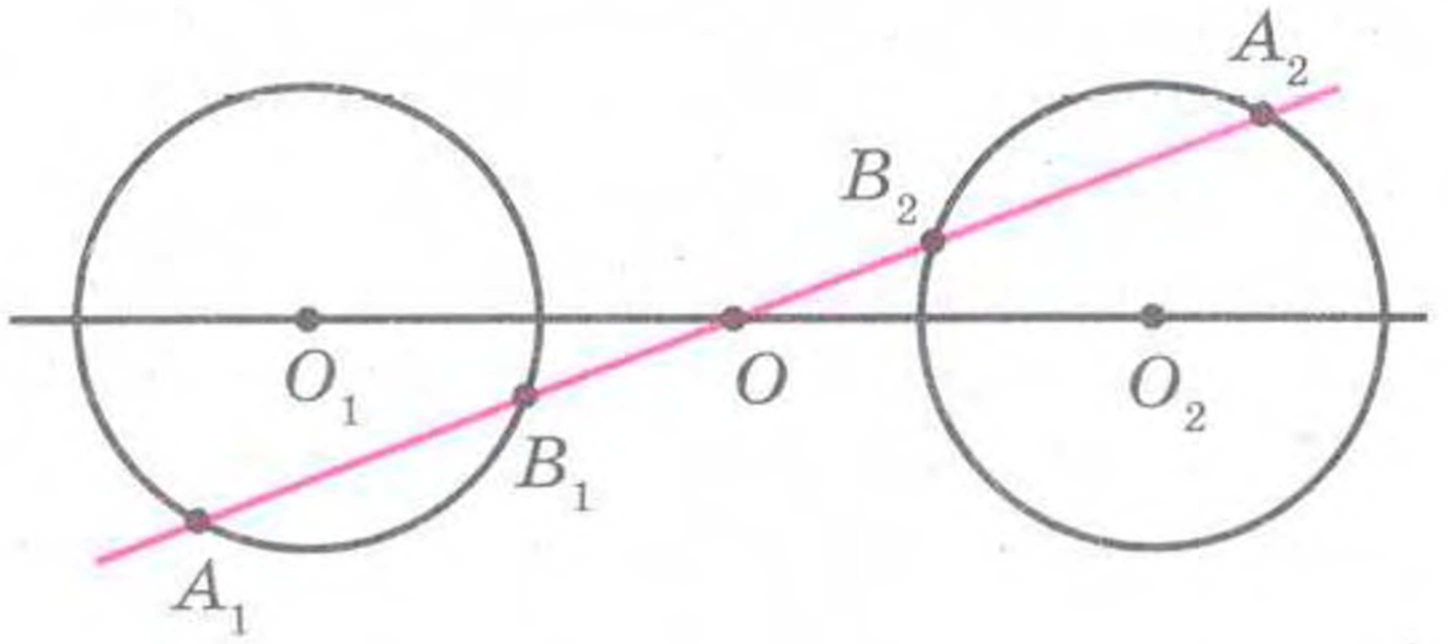


Рис. 22.15

22.19.* Дано коло, пряму і точку. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці, один з кінців якого належить даному колу, а другий — даній прямій.

22.20.* Дано два кола і точку. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці, кінці якого належать даним колам.

22.21.* Дано пряму a і два кола по різні боки від неї. На прямій взято відрізок CD. Побудуйте трикутник ABC так, щоб точки A і B лежали на колах, а відрізок CD був медіаною.

22.22.* На протилежних сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ як на сторонах побудовано поза ним рівносторонні трикутники BMC і AND. Доведіть, що точки M, O і N, де O — точка перетину діагоналей, лежать на одній прямій.

22.23.* На протилежних сторонах паралелограма як на сторонах поза ним побудовано квадрати. Доведіть, що пряма, яка з'єднує центри квадратів, проходить через точку перетину діагоналей паралелограма.

22.24.* Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Доведіть, що описані кола трикутників BOC і AOD дотикаються.

22.25.** Доведіть, що коли фігура має дві перпендикулярні осі симетрії, то точка їх перетину є центром симетрії фігури.

22.26.** Точки A і C належать гострому куту, але не лежать на його сторонах. Побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб точки B і D лежали на сторонах кута.

22.27.** Побудуйте квадрат з центром у даній точці O і даними точками M і N на двох протилежних сторонах або їх продовженнях.

22.28.** Побудуйте ромб, точкою перетину діагоналей якого є дана точка, а три вершини належать трьом даним попарно непаралельним прямим.

22.29.** Дано точку і три кола. Побудуйте ромб, точкою перетину діагоналей якого є дана точка, а три вершини лежать на трьох даних колах.

22.30.** Дано паралелограм $ABCD$ і точку M. Через точки A, B, C і D проведено прямі, паралельні прямим MC, MD, MA і MB відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

22.31.** Два кола перетинаються в точці M. Проведіть через точку M пряму, яка вдруге перетинає дані кола в точках A і B так, що $AM = MB$.

22.32.** Точка C — середина відрізка AB. На промені CQ позначили точки P і M такі, що $PM = MQ$ (рис. 22.16). Доведіть, що $AP + BQ > 2CM$.

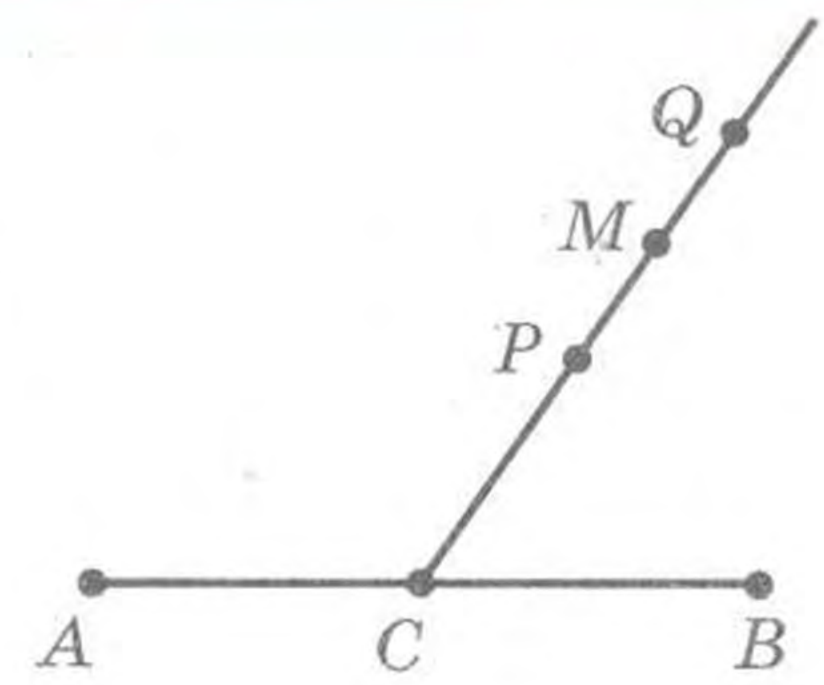


Рис. 22.16

22.33.* Доведіть, що прямі, проведені через середини сторін вписаного чотирикутника перпендикулярно до протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

22.34.* Коло перетинає сторони BC, CA, AB трикутника ABC у точках A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 відповідно. Доведіть, що коли перпендикуляри до сторін трикутника, проведені через точки A_1, B_1 і C_1, перетинаються в одній точці, то й перпендикуляри до сторін, проведені через точки A_2, B_2 і C_2, також перетинаються в одній точці.

22.35.* Довжина висоти AB прямокутної трапеції $ABCD$ дорівнює сумі довжин основ AD і BC. У якому відношенні бісектриса кута ABC ділить сторону CD?

22.36.* Дано два концентричні кола. Проведіть пряму, на якій ці кола відтинають три рівні відрізки.

23. Поворот

Розглянемо перетворення фігури, для якого центральна симетрія є окремим випадком.

На рисунку 23.1 зображено точки O, X, X_1 і X_2 такі, що $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорять, що точка X_1 є образом точки X при **повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут** α. Також говорять, що точка X_2 — це образ точки X при **повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут** α.

Точку O називають **центром повороту**, кут α — **кутом повороту**.

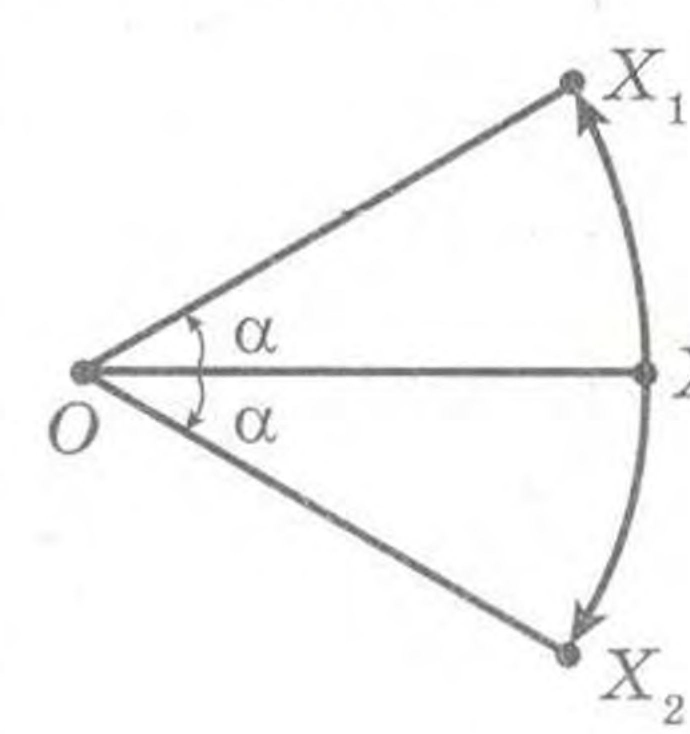


Рис. 23.1

Розглянемо фігуру F, точку O і кут α. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α (якщо точка O належить фігурі F, то їй співставляється вона сама). У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 23.2). Таке перетворення фігури F називають **поворотом навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α** і позначають так: R_o^α. Пишуть: $R_o^\alpha(F)=F_1$. Точку O називають **центром повороту**.

Аналогічно означають перетворення повороту фігури F за годинниковою стрілкою на кут α (рис. 23.3).

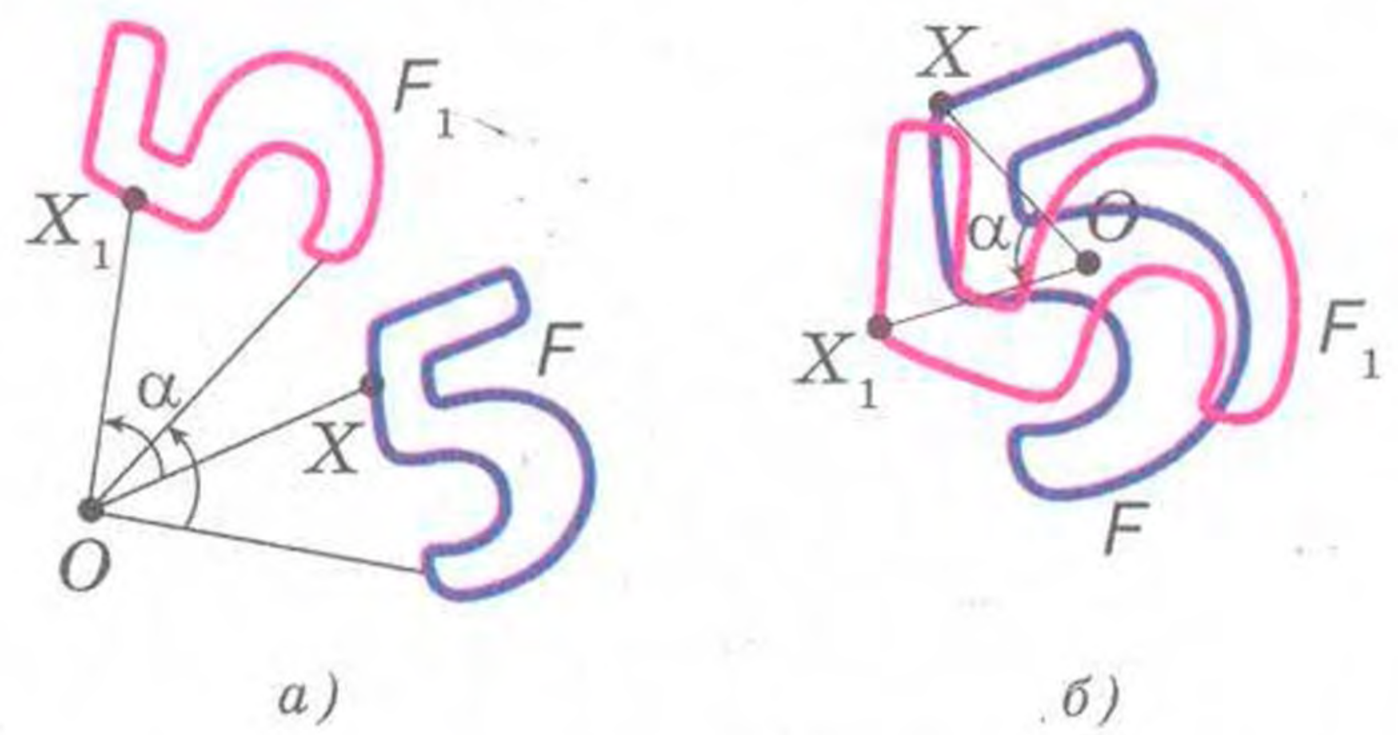


Рис. 23.2

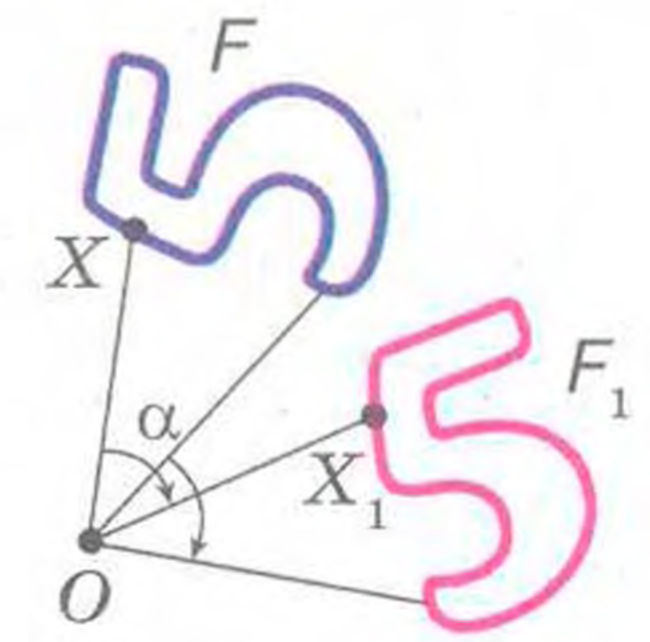


Рис. 23.3

Поворот за годинниковою стрілкою позначають так: $R_o^{-\alpha}$. Пишуть: $R_o^{-\alpha}(F)=F_1$. Очевидно, що повороти R_o^α і $R_o^{-\alpha}$ є взаємно оберненими перетвореннями.

Зауважимо, що центральна симетрія є поворотом навколо центра симетрії на кут 180° у будь-якому з напрямів.

Теорема 23.1 (властивість повороту). ***Поворот є рухом.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок. ***Якщо фігура F_1 — образ фігури F при повороті, то $F = F_1$.***

Нехай прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці O і $S_{l_1}(F)=F_1$, $S_{l_2}(F_1)=F_2$ (рис. 23.4). Наочні міркування підказують, що фігура F_2 — це образ фігури F при деякому повороті навколо точки O.

Строге обґрунтування цього факту дає така теорема.

Теорема 23.2. ***Якщо осі симетрії не паралельні, то композицією двох осьових симетрій є поворот навколо точки перетину осей.***

Складемо план доведення, який ви зможете реалізувати самостійно.

Нехай $l_1 \cap l_2 = O$ і кут між прямими l_1 і l_2 дорівнює α (рис. 23.5). Доведіть, що $S_{l_2} \circ S_{l_1} = R_O^{-2\alpha}$.

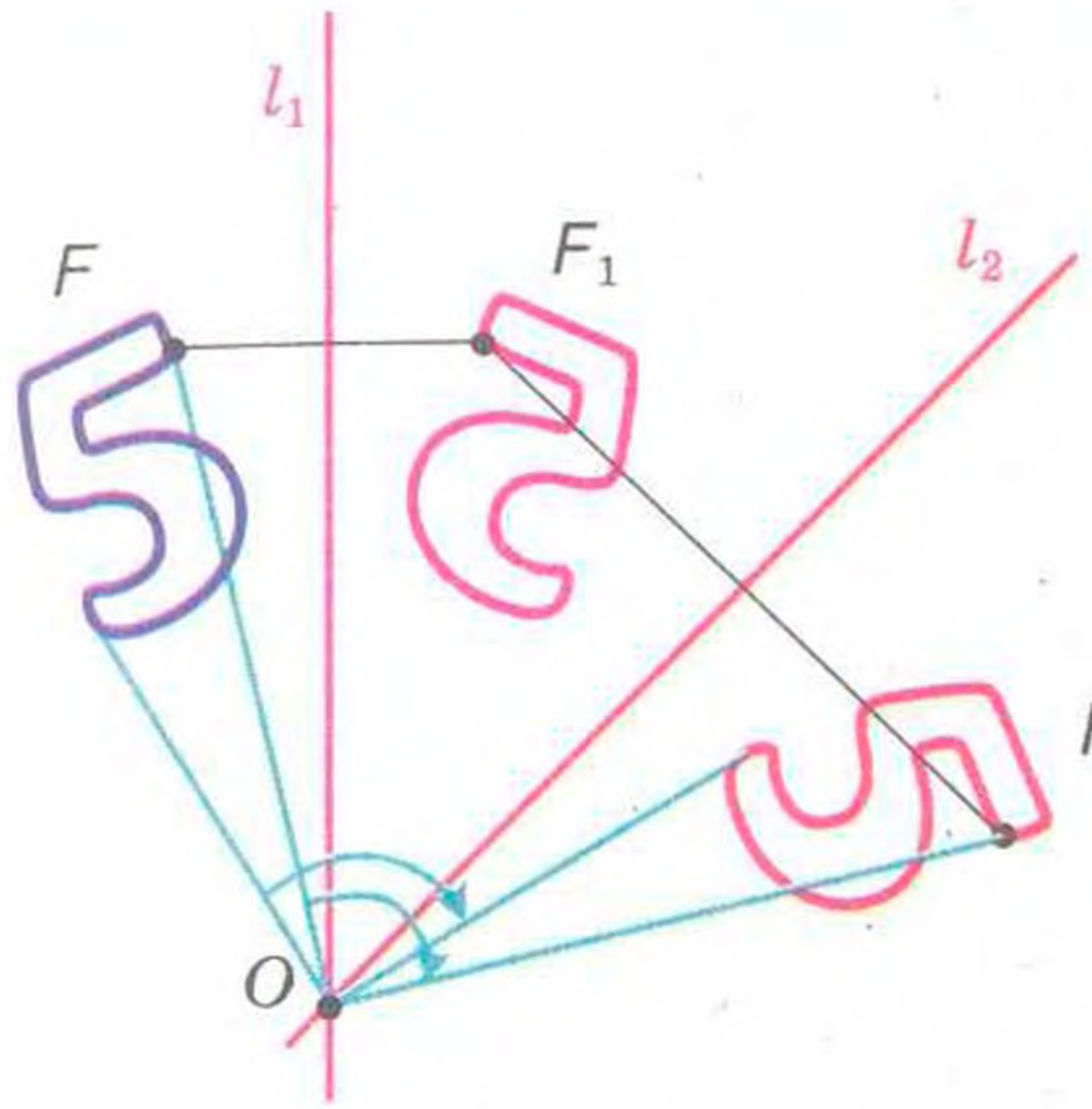


Рис. 23.4

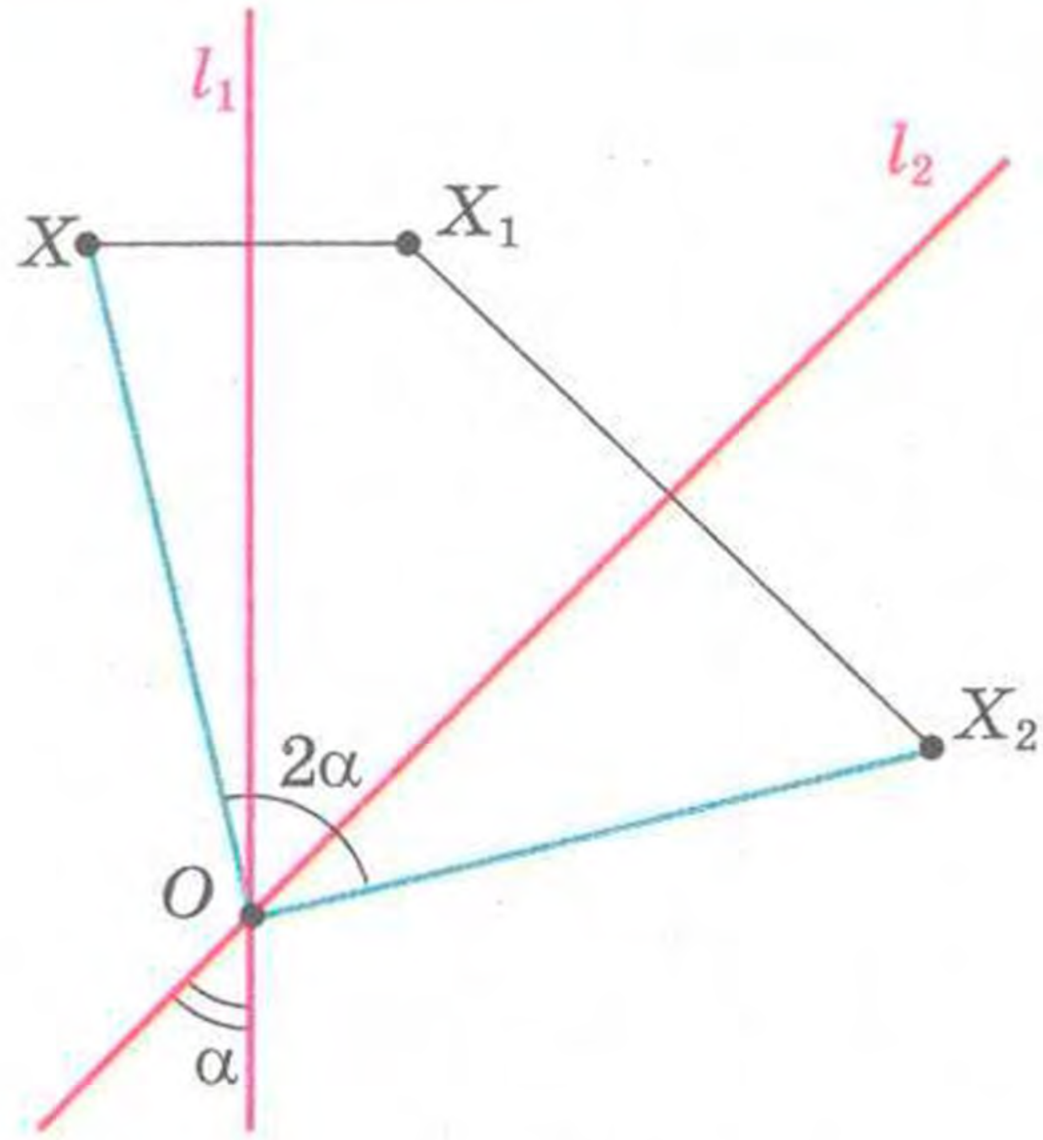


Рис. 23.5

Для цього розгляньте довільну точку X фігури F. Нехай $S_{l_1}(X)=X_1$, $S_{l_2}(X_1)=X_2$. Доведіть, що $XO = X_2O$ і $\angle XOX_2 = 2\alpha$.

Теореми 21.4 і 23.2 показують, що паралельне перенесення, поворот, а отже, і центральну симетрію можна подати у вигляді композиції осьових симетрій. Таким чином, осьова симетрія відіграє роль базового руху для всіх відомих вам видів рухів фігур. Більше того, справедливою є така теорема.

Теорема 23.3 (теорема Шаля[1]). ***Будь-який рух фігури є композицією не більше ніж трьох осьових симетрій.***

Приклад 1. На рисунку 23.6 зображено пряму a і точку O. Побудуйте образ прямої a при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $45°$.

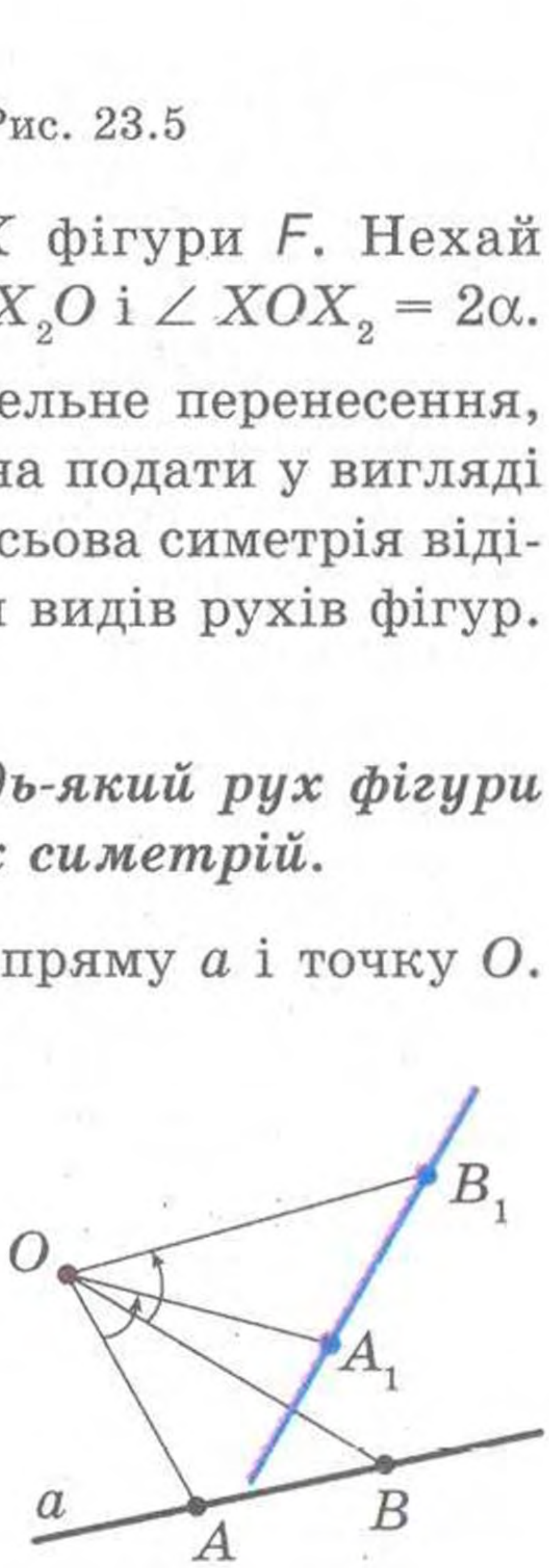


Рис. 23.6

Розв'язання. Оскільки поворот — це рух, то образом прямої a буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Оберемо на прямій a довільні точки A і B (рис. 23.6). Нехай точки A_1 і B_1 — їх образи при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $45°$. Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої a.

[1] Мішель Шаль (1793–1880) — французький математик.

Приклад 2. Точка P належить куту ABC (рис. 23.7). Побудуйте рівносторонній трикутник, однією з вершин якого є точка P, а дві інші належать сторонам BA і BC.

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут $60°$. Позначимо F — точку перетину прямих A_1B_1 і BC.

Знайдемо прообраз точки F при виконаному повороті. Очевидно, що він лежить на прямій AB. Тому достатньо побудувати кут MPF, рівний $60°$. Нехай прямі MP і AB перетинаються в точці E. Ця точка і є прообразом точки F.

Маємо: $PF = PE$ і $\angle FPE = 60°$. Отже, ΔEPF — рівносторонній, а точки F і E — шукані.

Приклад 3. У трикутнику ABC, кожний з кутів якого менший від $120°$, знайдіть таку точку T, щоб сума $TA + TB + TC$ була найменшою.

Розв'язання. Нехай T — довільна точка даного трикутника ABC (рис. 23.8). Розглянемо поворот з центром A на кут $60°$ за годинниковою стрілкою. Нехай точки T_1 і C_1 — образи точок T і C відповідно. Оскільки поворот є рухом, то $T_1C_1 = TC$. Очевидно, що трикутник ATT_1 є рівностороннім. Тоді $AT = TT_1$.

Маємо: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

Зрозуміло, що сума $TT_1 + TB + T_1C_1$ є найменшою, якщо точки B, T, T_1, C_1 лежать на одній прямій. Оскільки $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, то ця умова виконуватиметься тоді, коли $\angle 3 = \angle 4 = 120°$.

Оскільки кут AT_1C_1 — образ кута ATC при вказаному повороті, то має виконуватись умова $\angle ATC = 120°$.

Отже, точки B, T, T_1 і C_1 належатимуть одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Звідси $\angle BTC = 120°$.

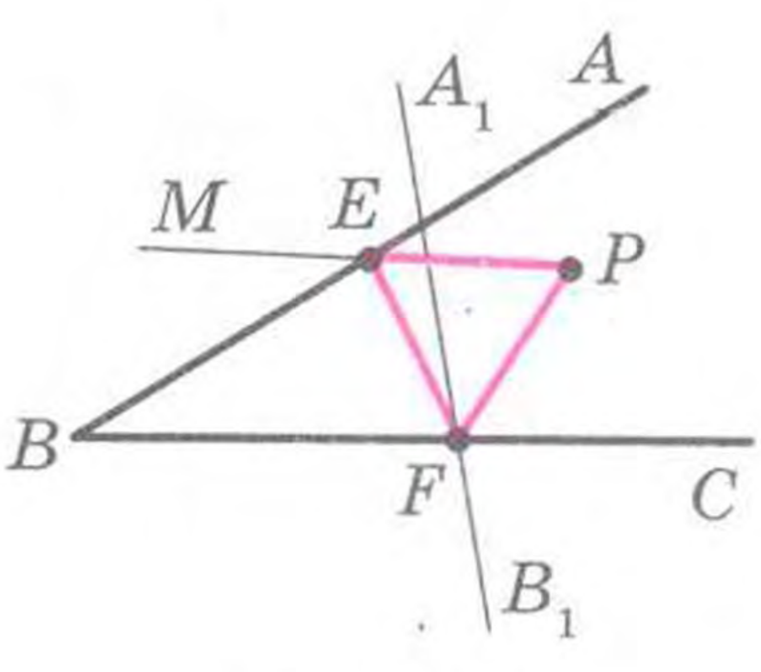


Рис. 23.7

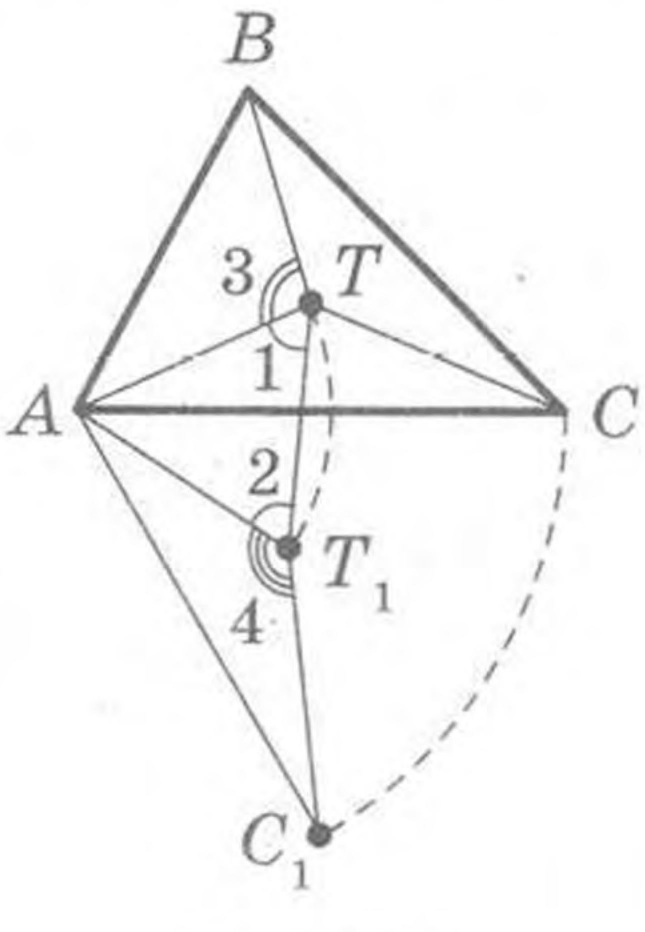


Рис. 23.8

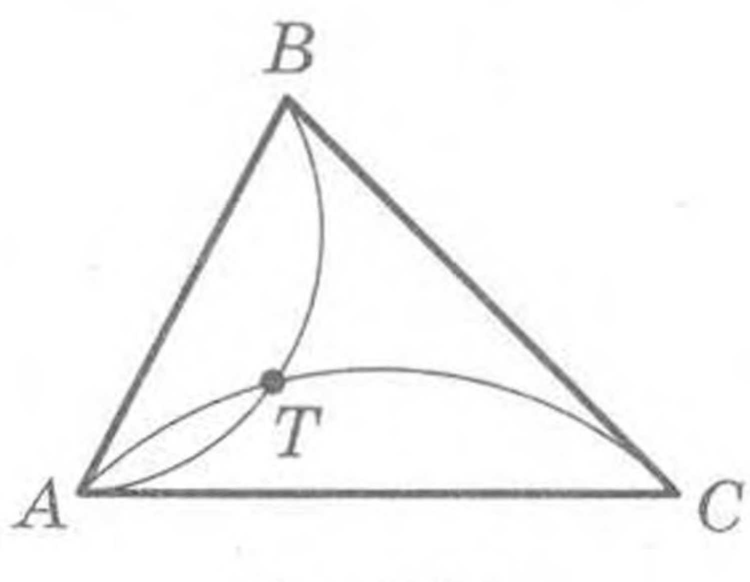


Рис. 23.9

Таким чином, сума $TA + TB + TC$ буде найменшою, якщо $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

Знайти точку T можна, побудувавши ГМТ, з яких, наприклад, відрізки AB і AC видно під кутами $120°$ (рис. 23.9).

Зрозуміло, що коли один з кутів трикутника ABC не менший від $120°$, то точка перетину побудованих дуг не буде розміщена всередині трикутника. Можна показати, що в трикутнику з кутом, не меншим від $120°$, точка T, сума відстаней від якої до вершин трикутника є найменшою, збігається з вершиною тупого кута.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

23.1.° Побудуйте образ відрізка AB при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут $45°$ (рис. 23.10).

23.2.° Побудуйте образ трикутника ABC при повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут $90°$ (рис. 23.11).

23.3.° На рисунку 23.12 зображено два рівні відрізки AB і BC такі, що $\angle ABC = 60°$. Знайдіть точку O таку, щоб відрізок AB був образом відрізка BC при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $120°$.

23.4.° На рисунку 23.13 зображено два рівні відрізки MN і NK такі, що $\angle MNK = 90°$. Знайдіть точку O таку, щоб відрізок NK був образом відрізка MN при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут $90°$.

23.5.• Побудуйте фігуру, яка не має осей симетрії і образом якої є ця сама фігура при повороті навколо деякої точки: 1) на кут $90°$; 2) на кут $120°$.

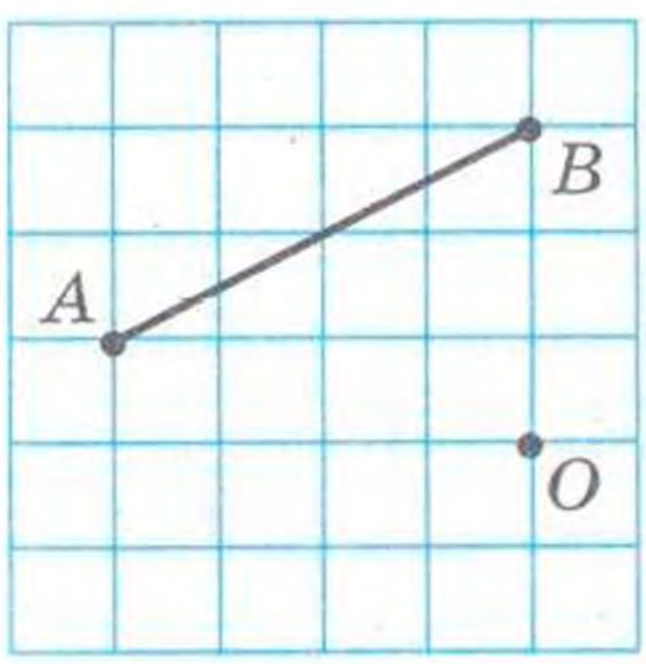


Рис. 23.10

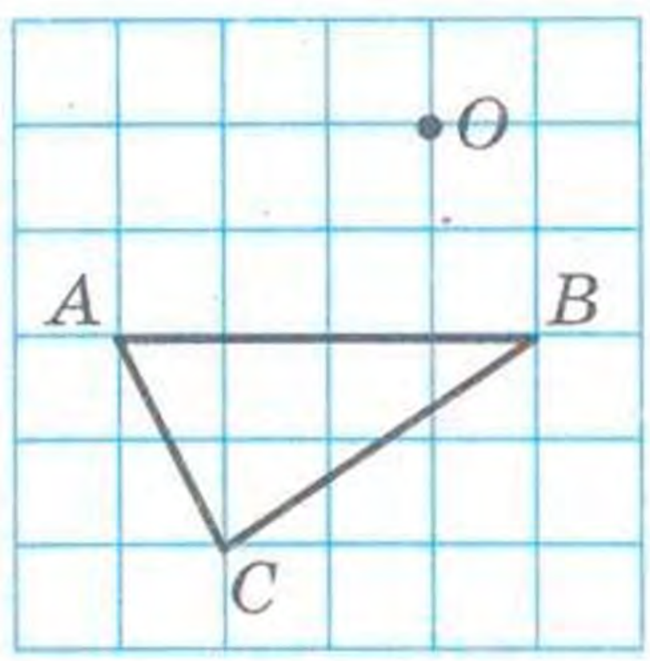


Рис. 23.11

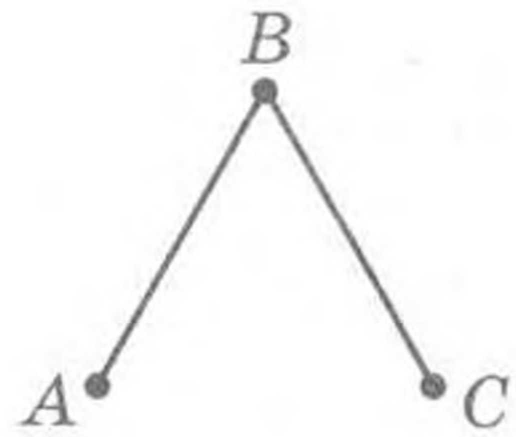


Рис. 23.12

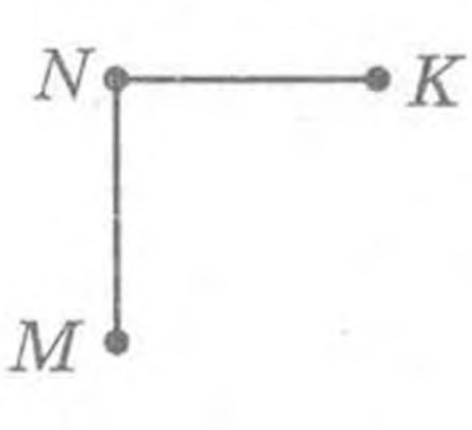


Рис. 23.13

ВПРАВИ

23.6.° На рисунку 23.14 зображено фігури, які складено з рівних півкругів. Які з цих фігур при певному повороті навколо точки O збігаються зі своїми образами?

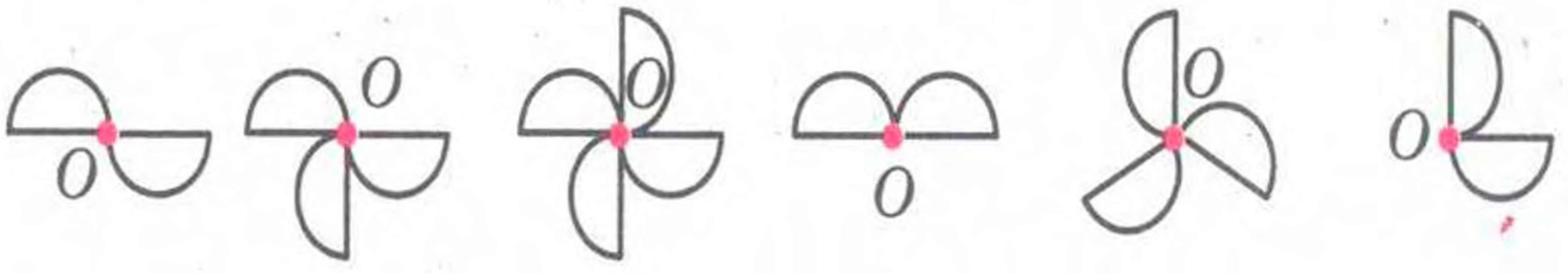


Рис. 23.14

23.7.° Медіани рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O (рис. 23.15). Укажіть образи точок C, C_1 і O, сторони BC, медіани BB_1, відрізка OC_1, трикутника $A_1B_1C_1$ при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $120°$.

23.8.° Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$ (рис. 23.16). Укажіть образи сторони AF, діагоналі BF, діагоналі AD, шестикутника $ABCDEF$ при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут: 1) $60°$; 2) $120°$.

23.9.° Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 23.17). Укажіть образи точок A, O і C, сторони AD, діагоналі BD при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут $90°$.

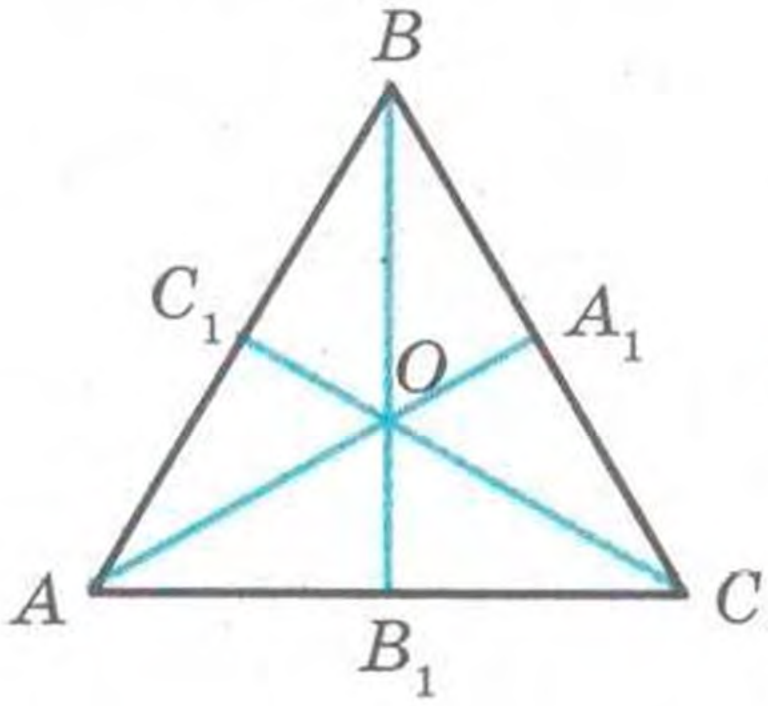


Рис. 23.15

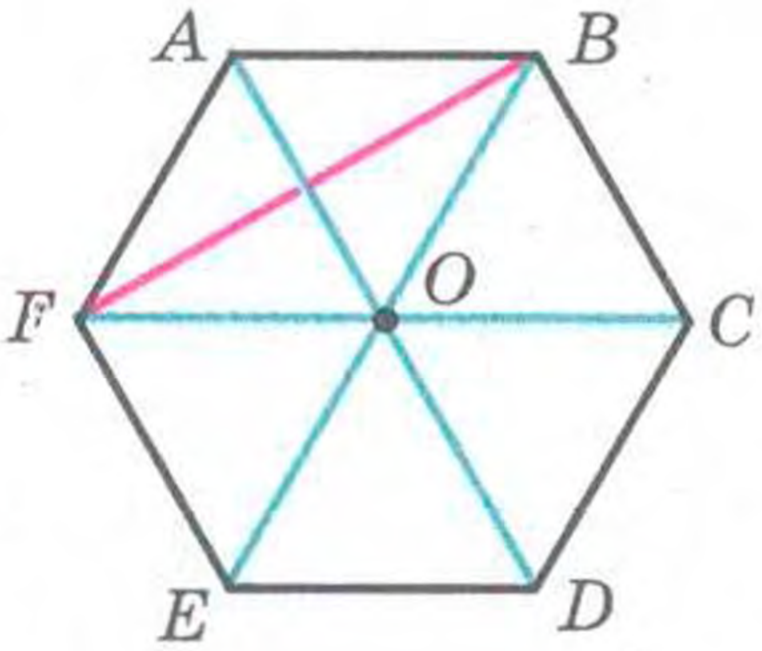


Рис. 23.16

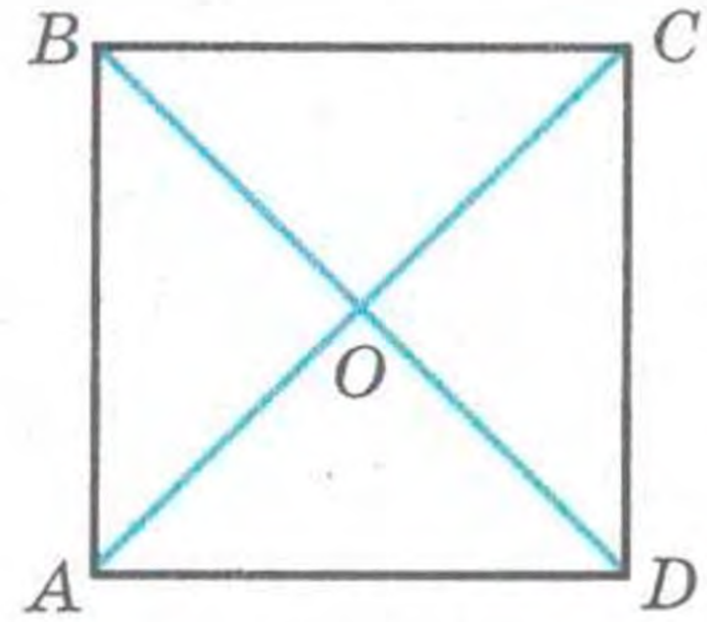


Рис. 23.17

23.10.• Точка O — центр правильного n-кутника $A_1A_2...A_n$ (рис. 23.18). Доведіть, що $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

23.11.• Нехай вершина A рівностороннього трикутника ABC є центром повороту на кут $120°$. Знайдіть довжину відрізка BC_1, де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см.

23.12.° Нехай вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту проти годинникової стрілки на кут $90°$. Знайдіть довжину відрізка CC_1, де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см.

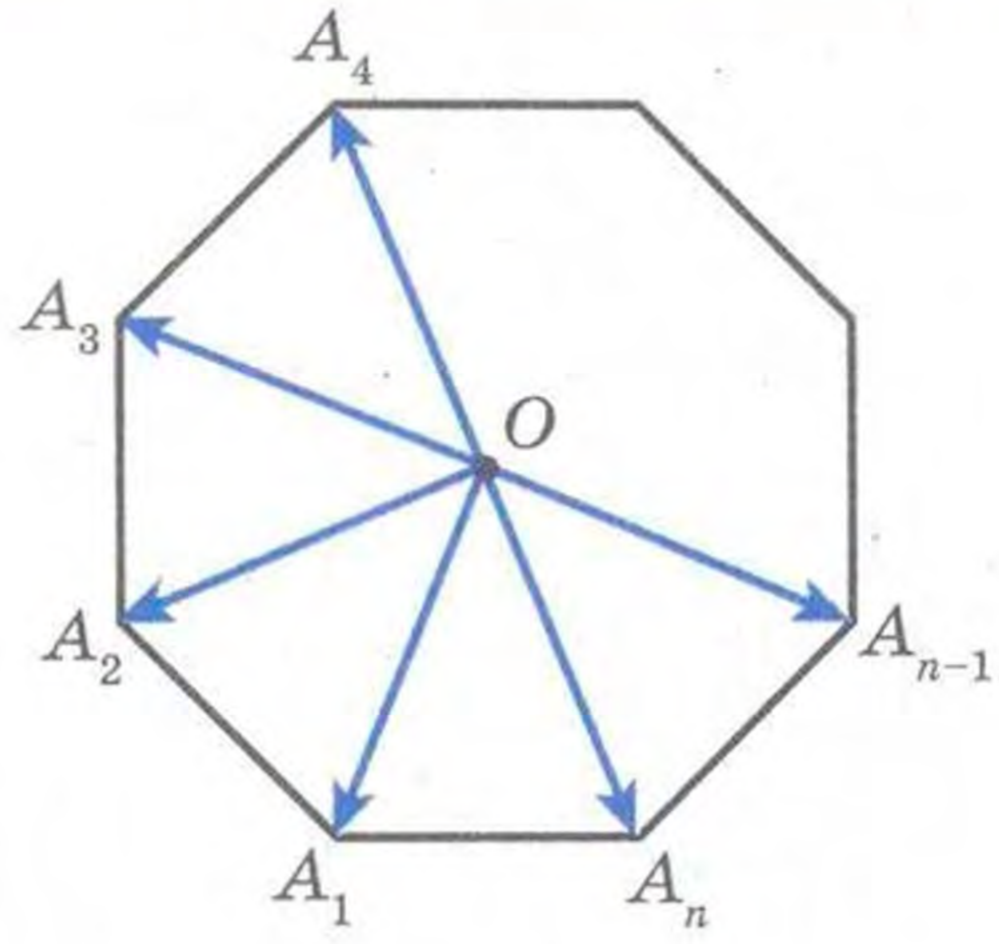


Рис. 23.18

23.13.•• Точка M належить куту ABC і не належить його сторонам. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершиною прямого кута якого є точка M, а дві інші належать сторонам BA і BC відповідно.

23.14.•• У даний квадрат впишіть рівносторонній трикутник так, щоб одна з його вершин збігалася з вершиною квадрата, а дві інші належали сторонам квадрата.

23.15.•• Дано два кола і точку M поза цими колами. Побудуйте прямокутний рівнобедрений трикутник з вершиною в точці M так, щоб дві інші вершини лежали на даних колах.

23.16.•• На сторонах AB і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABNM$ і $ACQP$. Доведіть, що $MC = BP$, $MC \perp BP$.

23.17.•• На сторонах BC і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники BCK і CAM. Знайдіть кут між прямими BM і AK і доведіть, що $BM = AK$.

23.18.•• На сторонах AB і AD квадрата $ABCD$ позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де точка O — центр квадрата.

23.19.•• На сторонах AB і AC рівностороннього трикутника ABC позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де точка O — центр трикутника.

23.20.•• У рівнобічній трапеції $ABCD$ на бічних сторонах AB і CD позначено точки K і M відповідно так, що $AK = CM$. Менша основа BC трапеції дорівнює бічній стороні, а гострий кут трапеції дорівнює $60°$. Знайдіть кут KOM, де точка O — середина AD.

23.21.•• У ромбі $ABCD$ з тупим кутом A, що дорівнює $120°$, на сторонах AB і AD позначено точки K і M відповідно так, що $BK = AM$. Знайдіть кут KCM.

23.22.** Усередині квадрата $ABCD$ взято точку K і на відрізку AK як на стороні побудовано квадрат $AKEM$, сторона KE якого перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $BK = DM$.

23.23.** На прямій l взято послідовно точки A, B і C, а на відрізках AB і AC у різних півплощинах відносно прямої l побудовано рівносторонні трикутники ABD і ACN. Доведіть, що середини K і L відповідно відрізків DC і BN і точка A є вершинами рівностороннього трикутника.

23.24.** На прямій l взято послідовно точки A, C, E. На відрізках AC і CE в одну півплощину відносно прямої l побудовано рівносторонні трикутники ABC і CDE. Точки K і M — середини відрізків AD і BE відповідно. Доведіть, що трикутник CKM — рівносторонній.

23.25.* Дано опуклий чотирикутник $ABCD$ і точку O всередині нього. Відомо, що $\angle AOB = \angle COD = 90°$, $OA = OB$, $OC = OD$. Нехай точки K, L і M — середини відрізків AB, BC і CD відповідно. Доведіть, що трикутник KLM — рівнобедрений і прямокутний.

23.26.* Побудуйте рівносторонній трикутник так, щоб його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

23.27.* Побудуйте квадрат так, щоб три його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

23.28.* На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC у точці F. Доведіть, що $AE = BF + ED$.

23.29.* У рівносторонньому трикутнику ABC обрано точку P так, що $\angle APB = 150°$. Доведіть, що існує прямокутний трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам PA, PB і PC.

23.30.* Усередині рівностороннього трикутника ABC обрано точку P таку, що $AP^2 + BP^2 = CP^2$. Доведіть, що $\angle APB = 150°$.

23.31.* У рівносторонньому трикутнику ABC обрано точку M таку, що $\angle AMB = 120°$, $MA = 1$, $MB = 2$. Знайдіть MC.

23.32.* Поза рівностороннім трикутником ABC обрали точку M так, що $\angle AMB = 120°$, $MA = 1$, $MB = 2$. Знайдіть MC.

23.33.* Точка P розміщена всередині квадрата $ABCD$, причому $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Знайдіть кут APB.

23.34.* В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = AD$, $BC + DC = AC = 1$, $\angle BAD = 60°$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

23.35.* На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABDE$ і $CBLK$. Точки M_1 і M_2 — середини відрізків DL і AC відповідно. Доведіть, що центри квадратів і точки M_1 і M_2 є вершинами квадрата.

24. Гомотетія. Подібність фігур

На рисунку 24.1 зображено точки O, X і X_1 такі, що $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$. Говорять, що точка X_1 — це образ точки X при **гомотетії з центром** O і **коефіцієнтом** 2.

На рисунку 24.2 зображено точки O, X і X_1 такі, що $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $-\frac{1}{2}$.

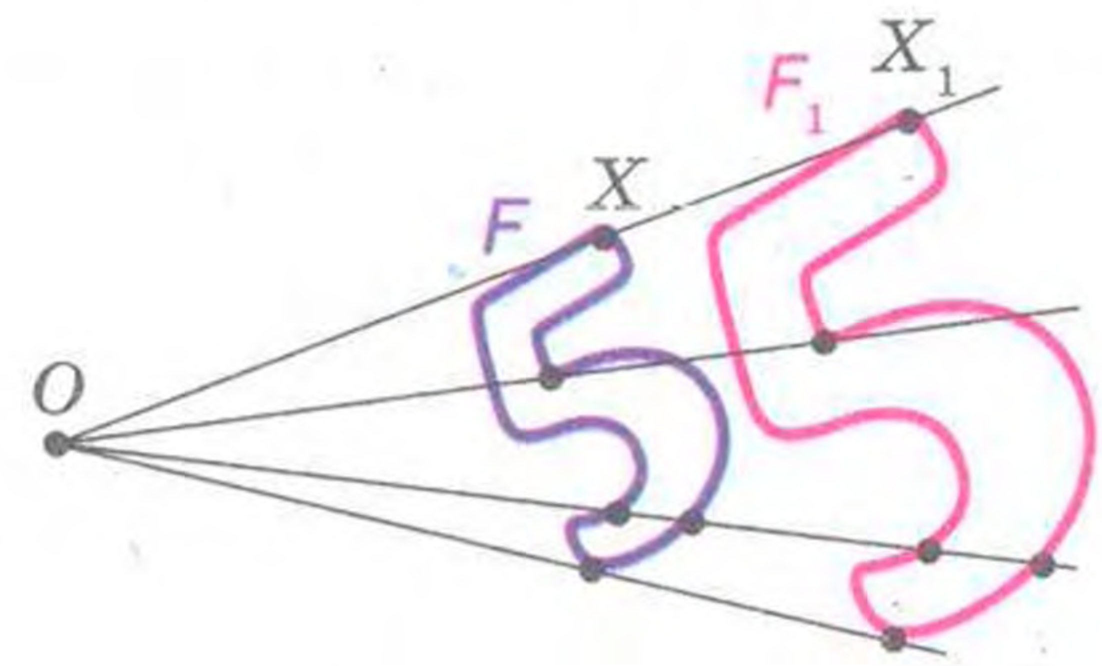
Рис. 24.1

Рис. 24.2

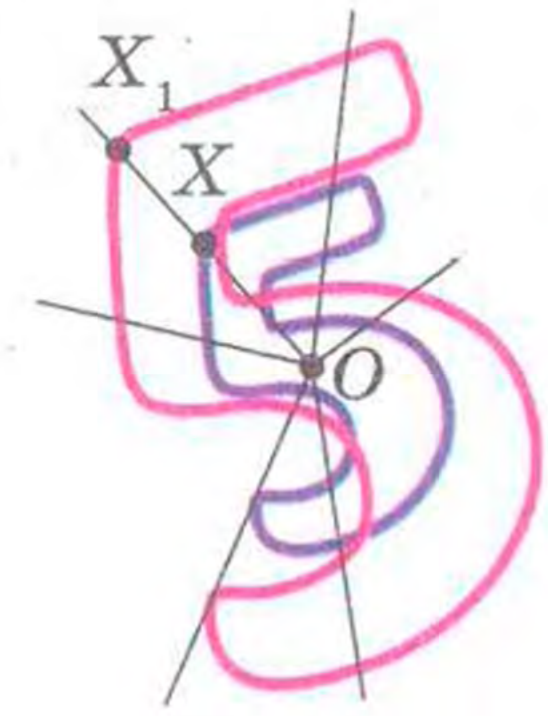
Узагалі, якщо точки O, X і X_1 такі, що $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при **гомотетії з центром O і коефіцієнтом k**.

Точку O називають **центром гомотетії**, число k — **коефіцієнтом гомотетії**, $k \neq 0$.

Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при гомотетії з центром O і коефіцієнтом k (якщо точка O належить фігурі F, то їй співставляється вона сама). У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 24.3).



а)



б)

Рис. 24.3

Таке перетворення називають **гомотетією** фігури F **з центром** O **і коефіцієнтом** k і позначають так: H_O^k. Пишуть: $H_O^k(F) = F_1$. Також говорять, що фігура F_1 **гомотетична** фігурі F з центром O і коефіцієнтом k.

Наприклад, на рисунку 24.4 трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC з центром O і коефіцієнтом, який дорівнює −3. Пишуть: $H_O^{-3}(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.

Також можна сказати, що трикутник ABC гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ з тим самим центром, але коефіцієнтом, який дорівнює $-\frac{1}{3}$. Пишуть:

$$H_O^{-\frac{1}{3}}(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta ABC.$$

Очевидно, що гомотетії H_O^k і $H_O^{\frac{1}{k}}$ є взаємно оберненими перетвореннями.

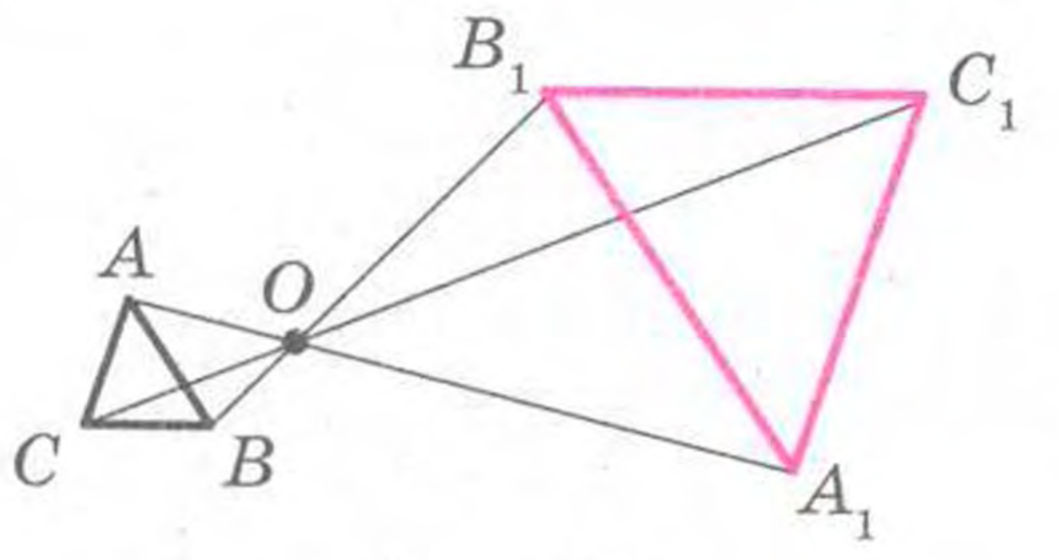


Рис. 24.4

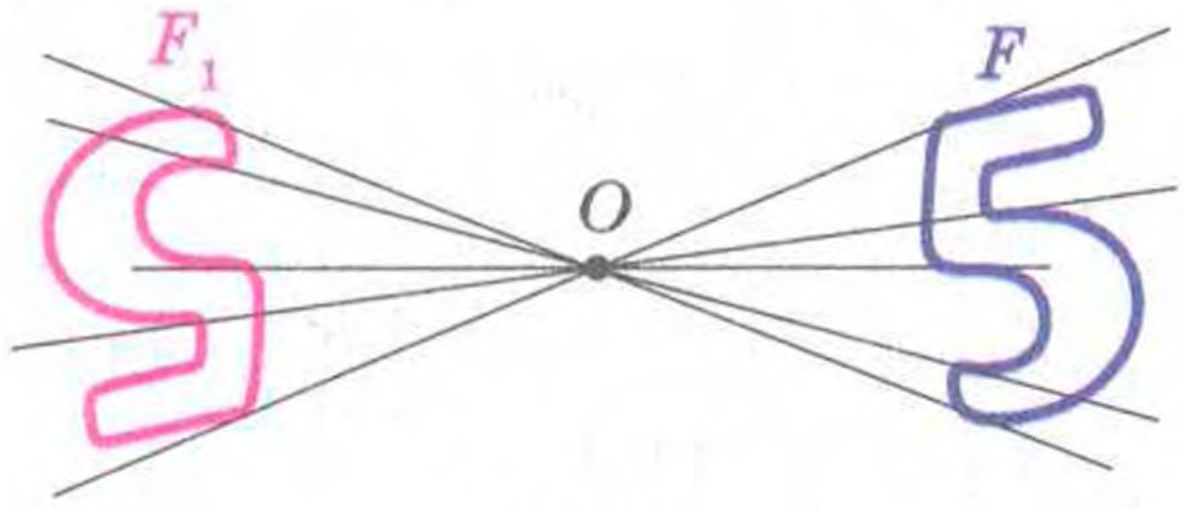


Рис. 24.5

Зазначимо, що при $k = -1$ гомотетія є центральною симетрією відносно центра O (рис. 24.5). Якщо $k = 1$, то гомотетія є тотожним перетворенням.

Очевидно, що при $k \neq 1$ і $k \neq -1$ гомотетія не є рухом.

Теорема 24.1. ***При гомотетії фігури F з коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в | k | разів, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F, а A_1 і B_1 — їх відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k, то $A_1B_1 = |k|\,AB$.***

Доведення. Нехай точка O — центр гомотетії. Тоді $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$.

Маємо: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB}$, тобто $A_1B_1 = |k|\,AB$. ▲

Наслідок. ***Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC з коефіцієнтом гомотетії k, то $\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \Delta ABC$.***

Для доведення цієї теореми достатньо скористатися теоремою 24.1 і третьою ознакою подібності трикутників.

Гомотетія має низку інших властивостей.

Теорема 24.2. ***При гомотетії фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.***

Скориставшись теоремою 24.1 та ідеєю доведення теореми 20.1, доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок. ***При гомотетії відрізка, променя, прямої образами є відповідно відрізок, промінь, пряма. При гомотетії кута образом є кут, рівний даному. При гомотетії трикутника образом є трикутник, подібний даному.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Зазначені властивості гомотетії вказують на те, що це перетворення може змінити розміри фігури, але не змінює її форму, тобто при гомотетії образ і прообраз є подібними фігурами.

Зауважимо, що у 8 класі, коли йшлося про подібність фігур, ми давали означення лише подібним трикутникам. Зараз означимо поняття «подібність фігур», не обмежуючись трикутниками.

На рисунку 24.6 фігура F_1 гомотетична фігурі F, а фігура F_2 симетрична фігурі F_1 відносно прямої l.

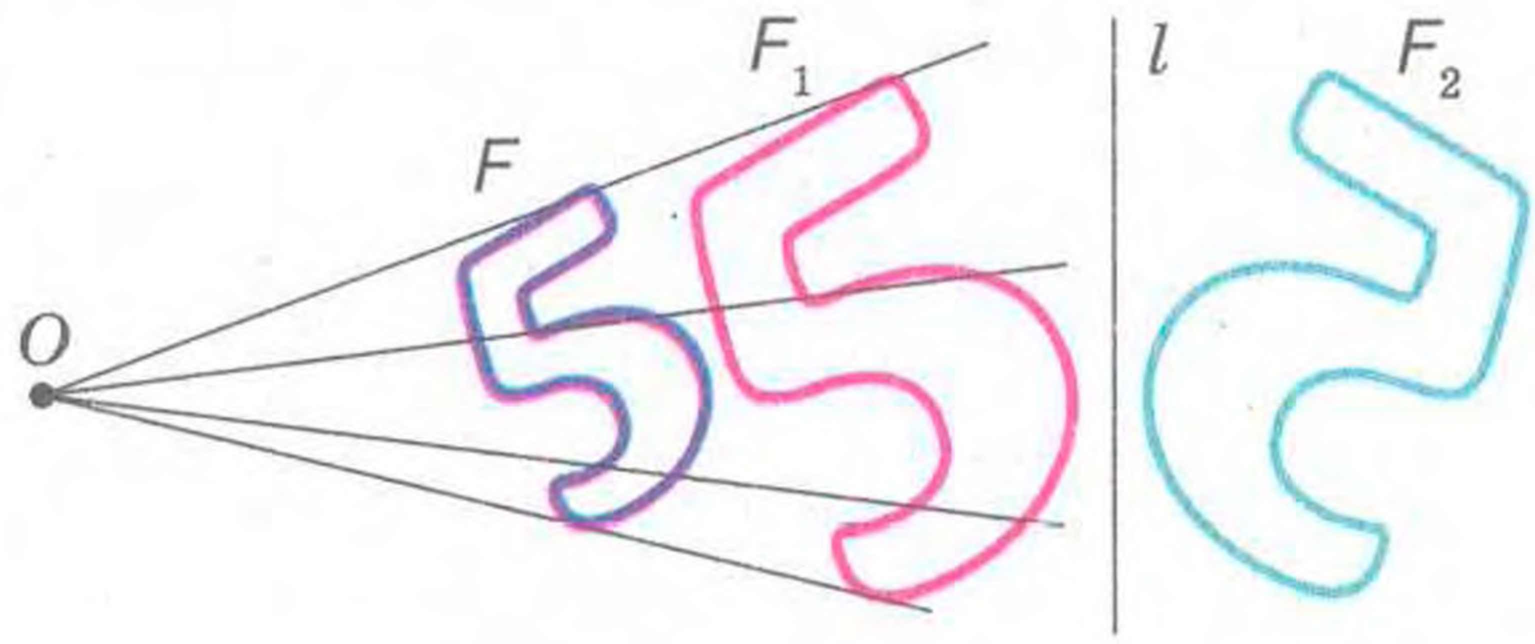


Рис. 24.6

Фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті композиції двох перетворень: гомотетії і осьової симетрії.

Оскільки $F_1 = F_2$, то у фігур F і F_2 однакові форми, але різні розміри, тобто вони є подібними. Говорять, що фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті **перетворення подібності** фігури F.

На рисунку 24.7 фігура F_1 гомотетична фігурі F, а фігура F_2 — образ фігури F_1 при деякому русі. Міркуючи аналогічно, можна стверджувати, що фігури F і F_2 подібні.

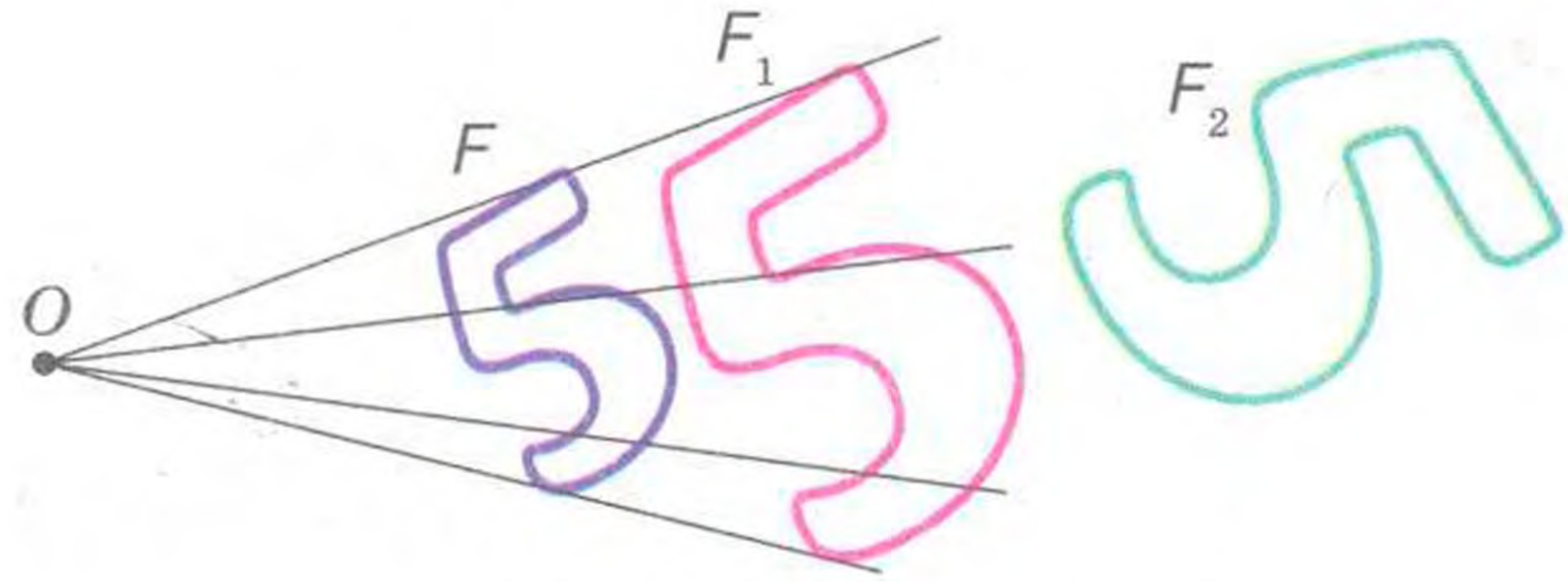


Рис. 24.7

Зі сказаного випливає, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з іншої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії і руху.

Запис $F \backsim F_1$ означає, що фігури F і F_1 подібні. Також говорять, що фігура F_1 — образ фігури F при **перетворенні подібності.**

Дане означення ілюструє схема, зображена на рисунку 24.8.

Перетворення подібності = гомотетія + рух

Рис. 24.8

Із наведеного означення випливає, що *при перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.*

Оскільки тотожне перетворення є рухом, то зі схеми, зображеної на рисунку 24.8, випливає, що гомотетія — окремий випадок перетворення подібності.

Нехай A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їх образи при перетворенні подібності. Точки A_1 і B_1 належать фігурі F_1, яка подібна фігурі F. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ називають **коефіцієнтом подібності**. Говорять, що фігура F_1 подібна фігурі F з коефіцієнтом подібності k, а фігура F подібна фігурі F_1 з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{k}$.

Зауважимо, що перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$ є рухом. Звідси випливає, що рух — окремий випадок перетворення подібності.

З перетворенням подібності ми часто маємо справу в повсякденному житті. Наприклад, у результаті зміни масштабу карти отримуємо карту, подібну даній. Фотографія — це перетворення негатива в подібне зображення на фотопапері. Переносячи до свого зошита рисунок, зроблений учителем на дошці, ви також виконуєте перетворення подібності.

Теорема 24.3. ***Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.***

Цю теорему ви можете довести на заняттях математичного гуртка. Ми доведемо її для окремого випадку, розглянувши подібні трикутники.

Доведення. Нехай $\triangle A_1B_1C_1$ — образ $\triangle ABC$ при перетворенні подібності з коефіцієнтом k (рис. 24.9). Сторона A_1C_1 — образ сторони AC. Тоді $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведемо висоти BD і B_1D_1. Зрозуміло, що висота B_1D_1 — це образ висоти BD (це випливає з наслідка з теореми 24.2). Звідси $B_1D_1 = k \cdot BD$. Маємо:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{kAC \cdot kBD}{AC \cdot BD} = k^2. \ \blacktriangle$$

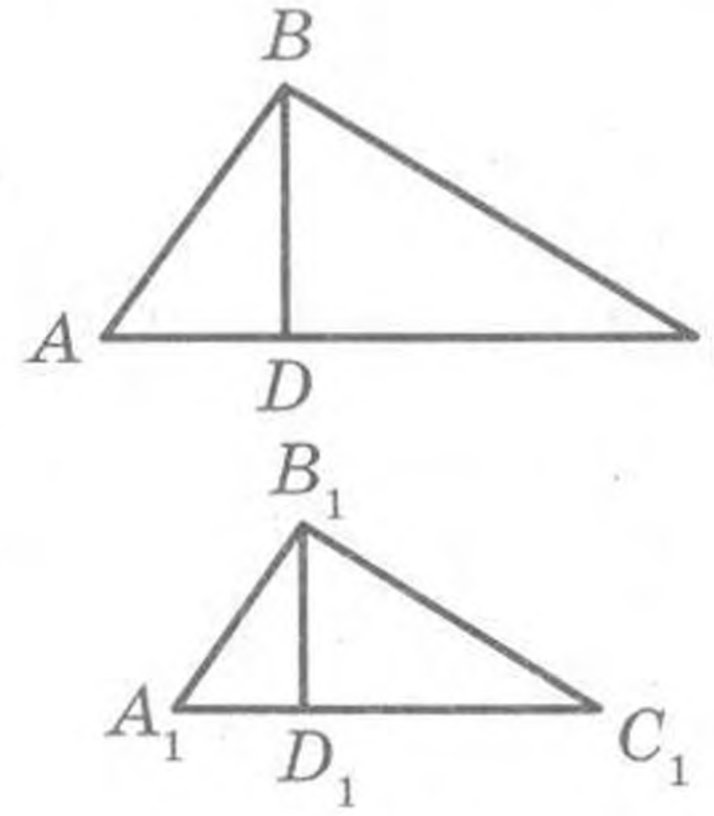


Рис. 24.9

Задача. Доведіть, що образом прямої l при гомотетії з центром O, який не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

Розв'язання. З властивостей гомотетії випливає, що образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знати дві будь-які її точки. Оберемо на прямій l довільні точки A і B

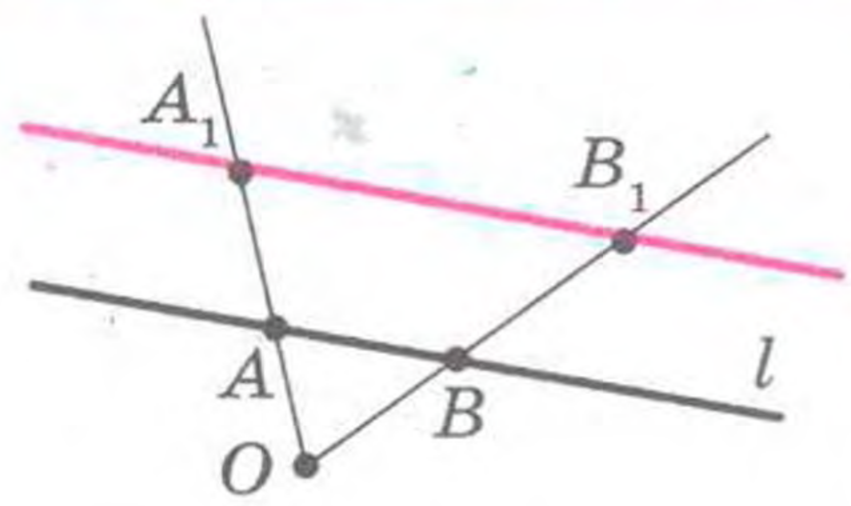


Рис. 24.10

(рис. 24.10). Нехай точки A_1 і B_1 — їх образи при гомотетії з центром O і коефіцієнтом k (рисунок 24.10 відповідає випадку, коли $k > 1$). Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої AB.

При доведенні теореми 24.1 ми показали, що $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Отже, $AB \parallel A_1B_1$.

Приклад 1. У гострокутний трикутник ABC впишіть квадрат так, щоб дві його вершини лежали відповідно на сторонах AB і BC, а дві інші — на стороні AC.

Розв'язання. Із довільної точки M сторони AB опустимо перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 24.11). Побудуємо квадрат $MQPN$ так, щоб точка P лежала на промені QC. Нехай промінь AN перетинає сторону BC у точці N_1. Розглянемо гомотетію з центром A і коефіцієнтом $k = \frac{AN_1}{AN}$. Тоді точка N_1 — образ точки N при цій гомотетії. Образом відрізка MN буде відрізок M_1N_1, де точка M_1 належить променю AB, причому $M_1N_1 \parallel MN$. Аналогічно відрізок N_1P_1 такий, що точка P_1 належить променю AC і $N_1P_1 \parallel NP$, буде образом відрізка NP. Отже, відрізки M_1N_1 і N_1P_1 — сусідні сторони шуканого квадрата. Для завершення побудови залишилося опустити перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC.

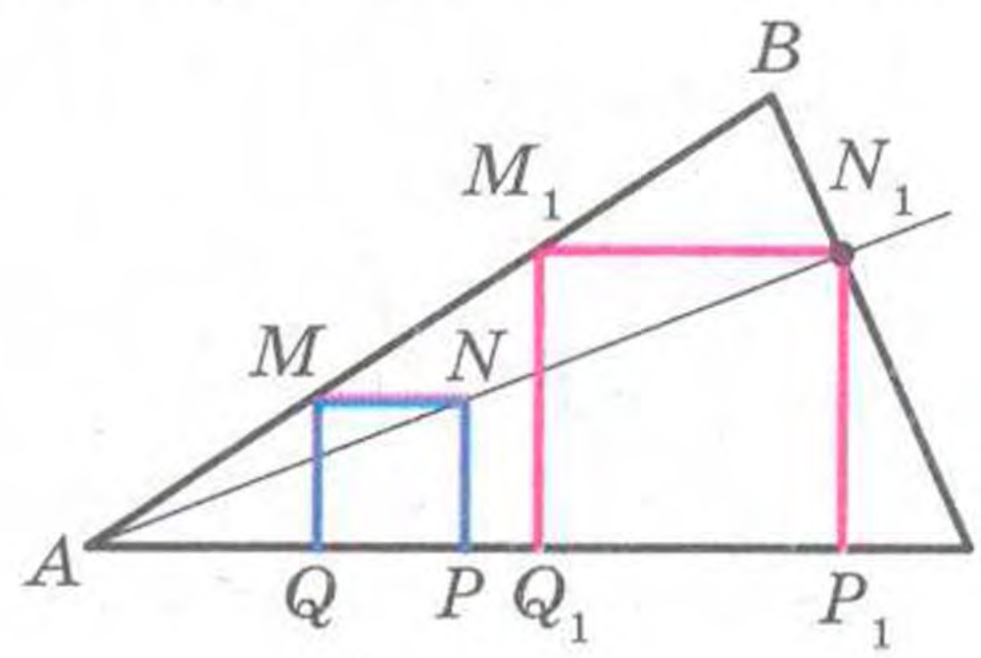


Рис. 24.11

Приклад 2. Нехай CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть радіус r вписаного кола трикутника ABC, якщо радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD, відповідно дорівнюють r_1 і r_2.

Розв'язання. Оскільки кут A — спільний для прямокутних трикутників ACD і ABC, то ці трикутники подібні (рис. 24.12). Нехай коефіцієнт подібності дорівнює k_1. Очевидно, що $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Аналогічно $\Delta\ BCD \sim \Delta\ ABC$ з коефіцієнтом $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

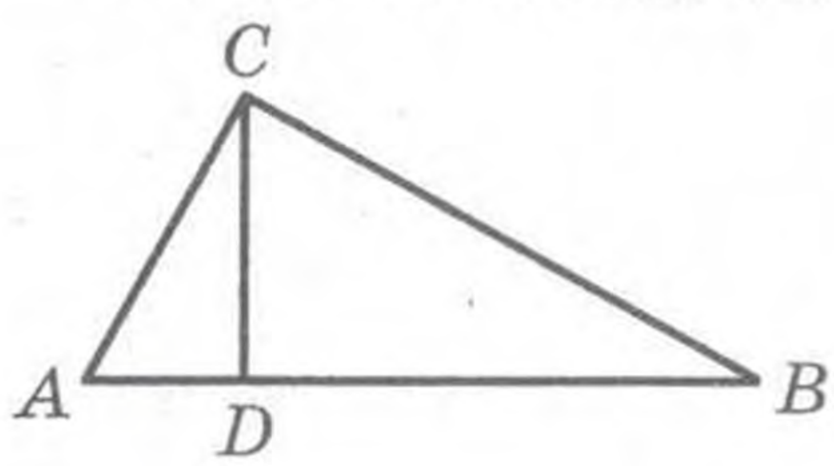


Рис. 24.12

Позначимо площі трикутників ACD, BCD і ABC відповідно S_1, S_2 і S. Маємо:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Звідси $\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 1.$

Отримуємо, що $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, тобто $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Приклад 3. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що радіус описаного кола трикутника ABC удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинають описане коло трикутника ABC відповідно в точках M, N і P (рис. 24.13). Нехай точка H — ортоцентр трикутника ABC. З ключової задачі 21.30 випливає, що $HA_1 = A_1M$, $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

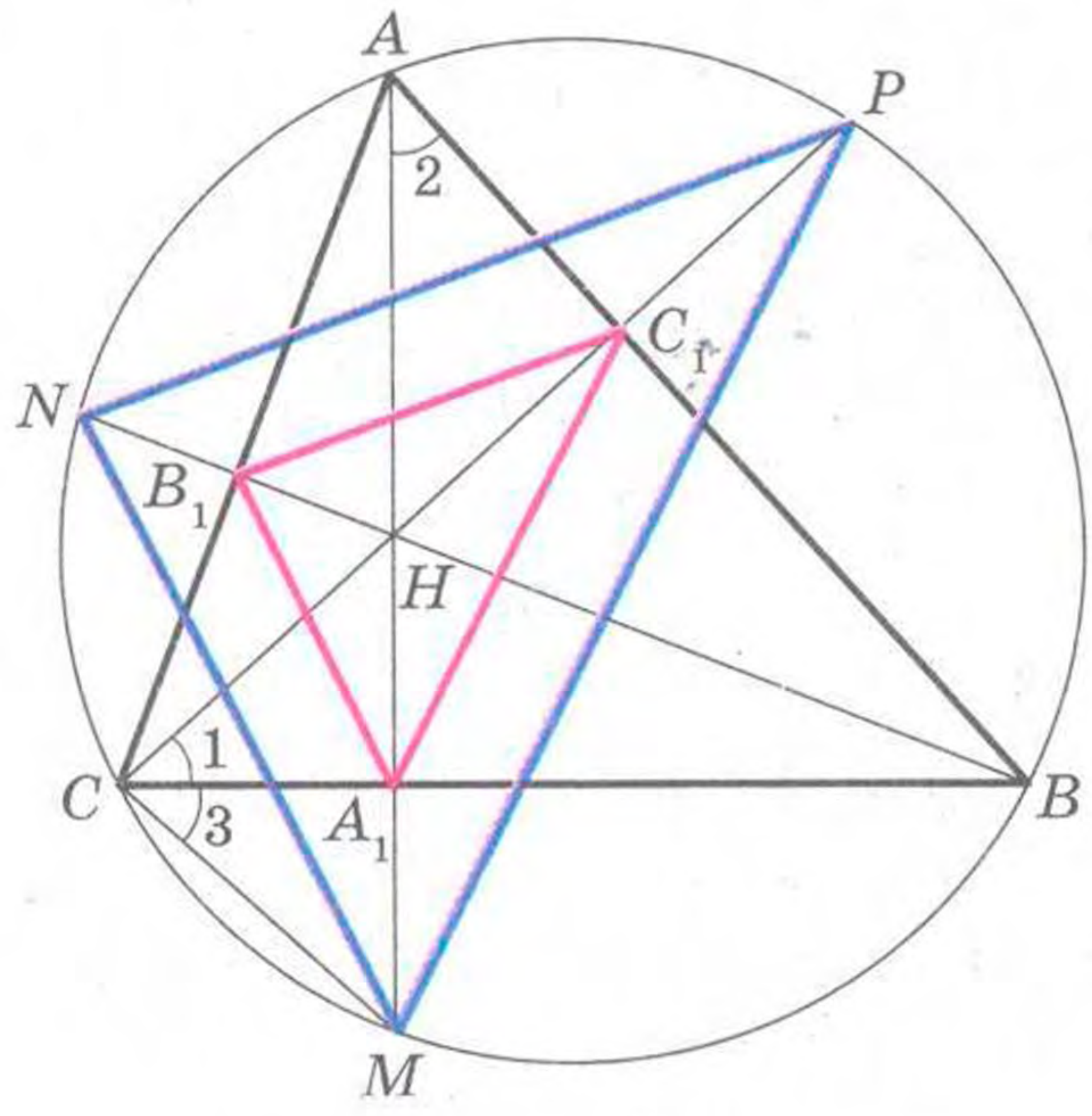


Рис. 24.13

Тепер зрозуміло, що трикутник MNP гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ з центром H і коефіцієнтом 2. Тоді радіус описаного кола трикутника MNP удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Залишилось зауважити, що трикутники MNP і ABC вписані в одне коло.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

24.1.° Побудуйте образ відрізка AB (рис. 24.14) при гомотетії з центром O і коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

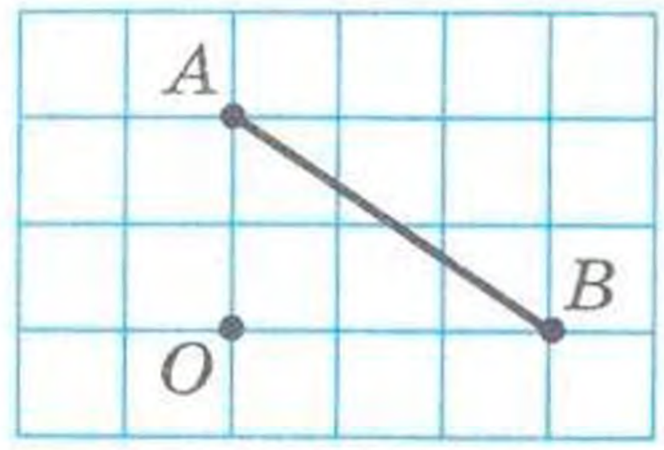


Рис. 24.14

24.2.° Накресліть відрізок AB. Побудуйте образ цього відрізка при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці A, $k = 3$;
2) у точці B, $k = -2$;
3) у середині відрізка AB, $k = 2$.

24.3.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2 см, і позначте на ньому точку A. Побудуйте образ цього кола при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у центрі кола, $k = -\frac{1}{2}$, $k = 2$;

2) у точці A, $k = 2$, $k = -\frac{1}{2}$.

24.4.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте образ цього трикутника при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці B, $k = 3$;
2) у точці C, $k = -\frac{1}{2}$;
3) у точці A, $k = \frac{1}{2}$;
4) у середині сторони AB, $k = \frac{1}{2}$;
5) у середині сторони AC, $k = -\frac{1}{3}$.

24.5.° Накресліть трикутник ABC. Знайдіть точку перетину його медіан. Побудуйте образ цього трикутника при гомотетії з центром у точці перетину його медіан і коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

24.6.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Точку перетину його діагоналей позначте O. Побудуйте образ цього паралелограма при гомотетії з центром O і коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

24.7.° Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте образ цього квадрата при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці A, $k=\frac{1}{3}$;

2) у точці B, $k = -2$;

3) у точці C, $k = 2$.

24.8.° Орієнтуючись за клітинками, накресліть п'ятикутник $ABCDE$ (рис. 24.15). Побудуйте п'ятикутник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подібний даному з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$.

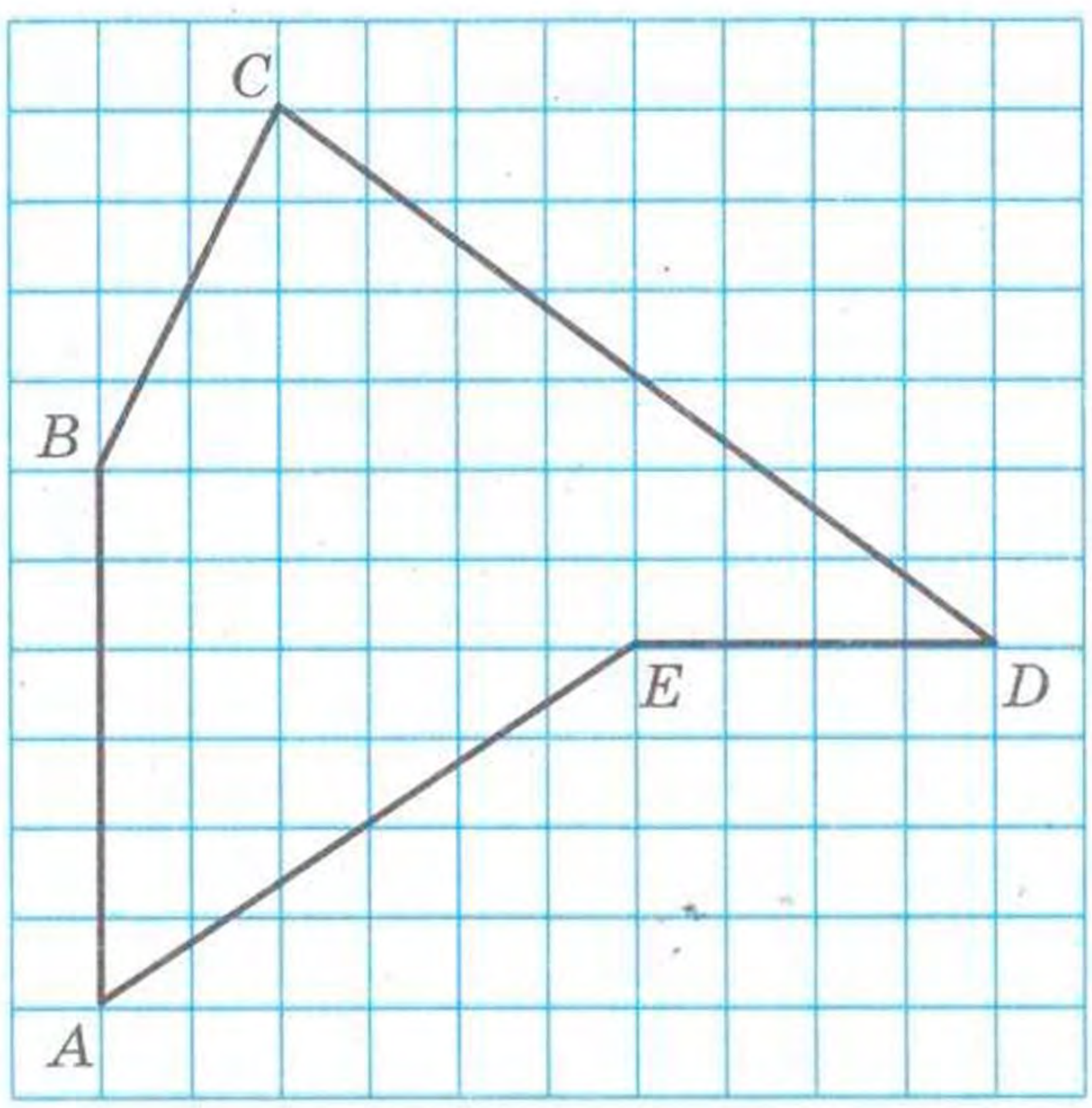


Рис. 24.15

24.9.• На рисунку 24.16 точка A_1 — образ точки A при гомотетії з центром O. Побудуйте образ точки B при цій гомотетії.

24.10.• На рисунку 24.17 точка A_1 — образ точки A при гомотетії з коефіцієнтом: 1) $k = 3$; 2) $k = -2$. Побудуйте центр гомотетії.

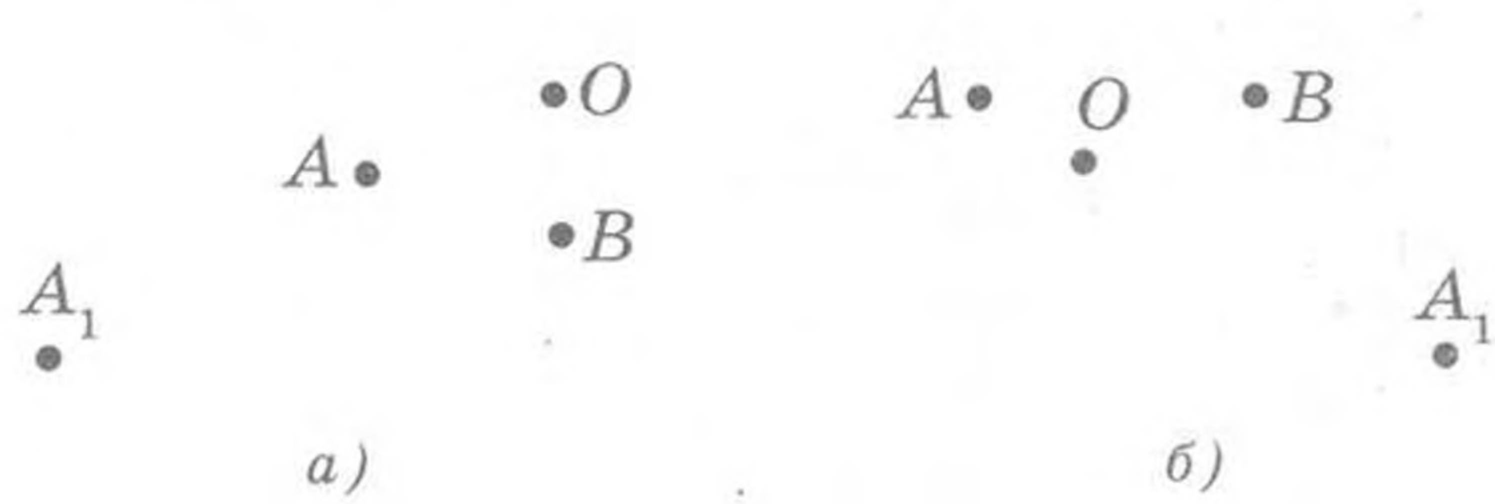


Рис. 24.16

Рис. 24.17

24.11.$^{\bullet}$ На рисунку 24.18 зображено прямокутник $ABCD$ і точки A_1 і D_1, які є образами відповідно точок A і D при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні. Скільки розв'язків має задача?

24.12.$^{\bullet}$ На рисунку 24.19 зображено прямокутник $ABCD$ і точки A_1 і C_1, які є образами відповідно точок A і C при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні. Скільки розв'язків має задача?

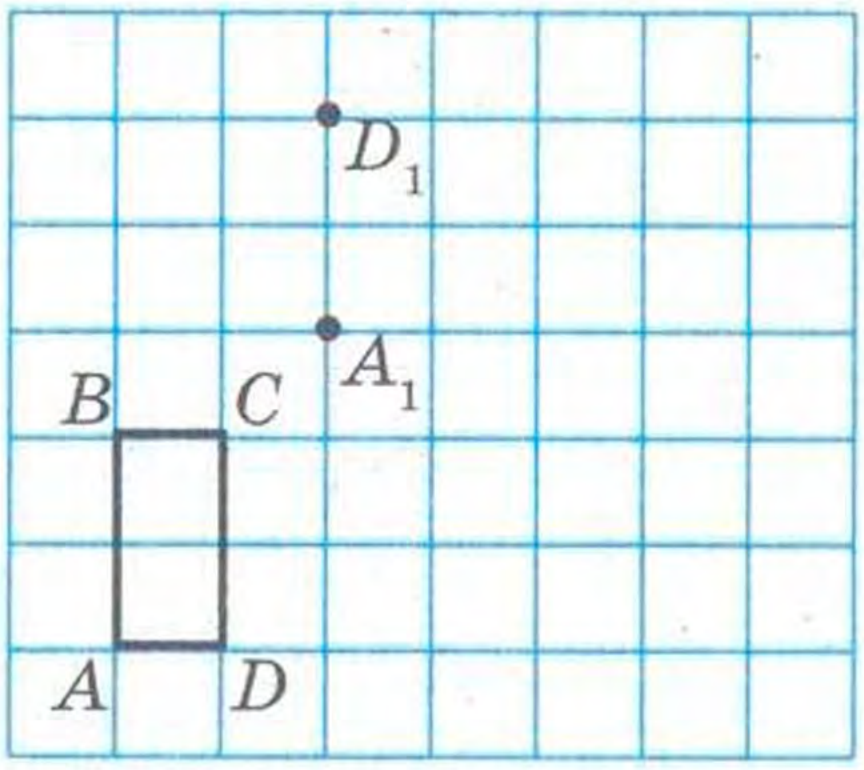


Рис. 24.18

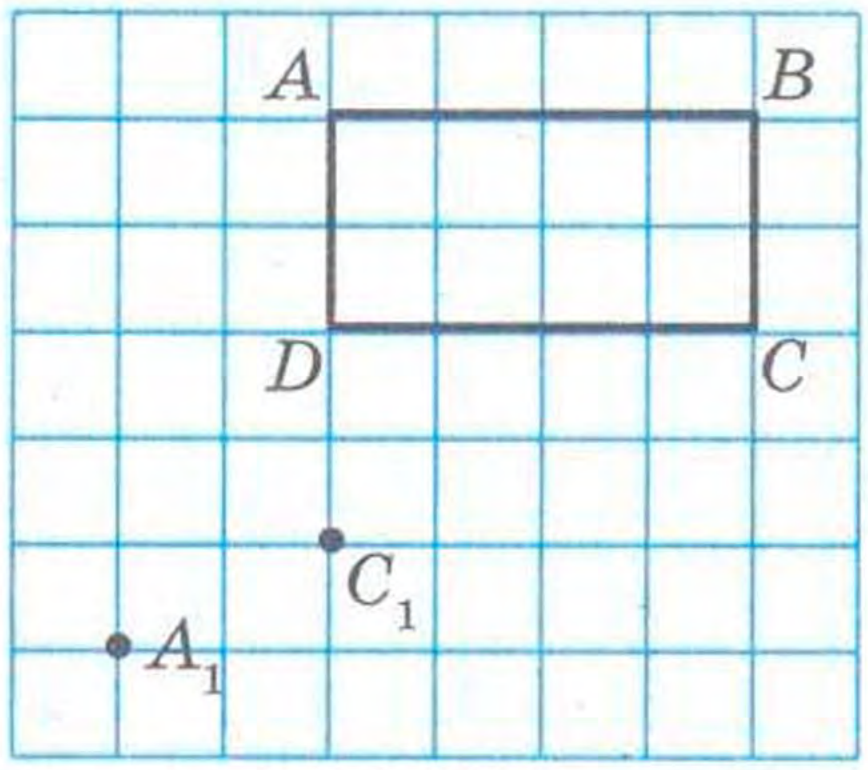


Рис. 24.19

24.13.$^{\bullet}$ Побудуйте образ трикутника ABC при перетворенні подібності, яке є композицією двох перетворень: гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k = 2$ та осьової симетрії відносно прямої l (рис. 24.20). Укажіть коефіцієнт подібності.

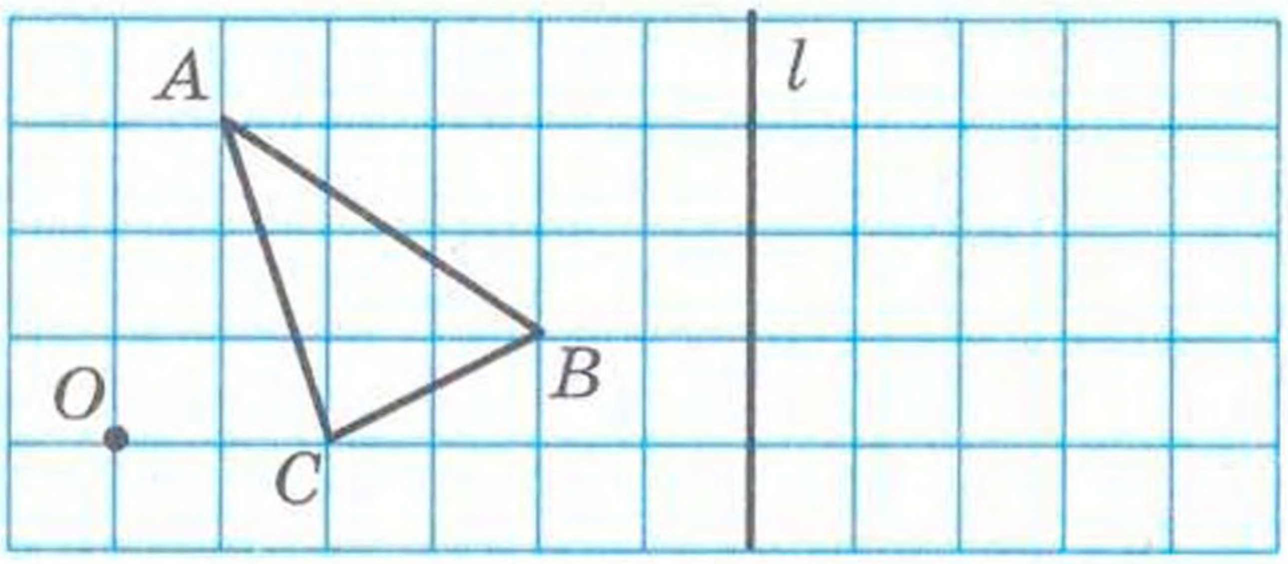


Рис. 24.20

24.14.$^{\bullet}$ Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2 см. Позначте точку O на відстані 4 см від його центра. Побудуйте образ цього кола при перетворенні подібності, яке є композицією двох перетворень: гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k=\frac{1}{2}$ і повороту з центром O за годинниковою стрілкою на кут $45°$. Укажіть коефіцієнт подібності.

24.15.$^{\bullet}$ На рисунку 24.21 зображено дві паралельні прямі a і b. Побудуйте центр гомотетії, при якому пряма b є образом прямої a

з коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k=\frac{1}{2}$; 3) $k=-\frac{1}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

24.16.$^{\bullet}$ Накресліть трапецію $ABCD$, основа BC якої вдвічі менша від основи AD. Побудуйте центр гомотетії, при якій відрізок AD є образом відрізка BC з коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

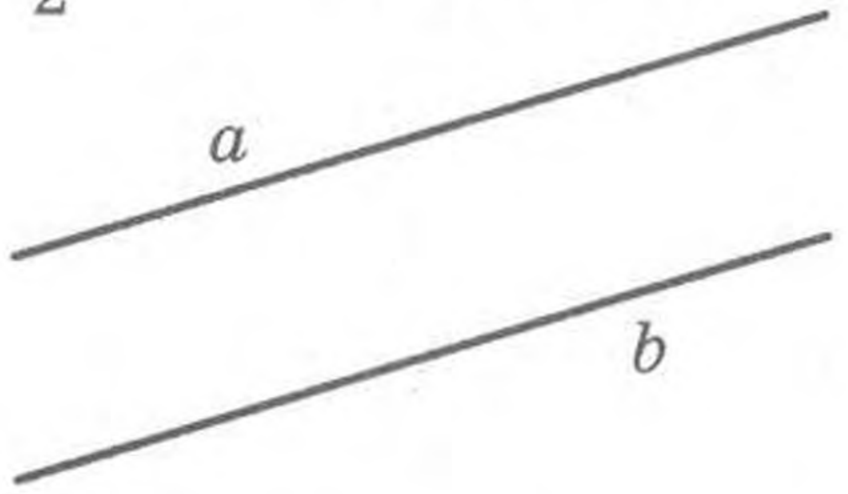


Рис. 24.21

ВПРАВИ

24.17.$^{\circ}$ У паралелограмі $ABCD$ точка D_1 — середина сторони AD. При гомотетії з центром A точка D_1 є образом точки D. Знайдіть коефіцієнт гомотетії. Укажіть, які точки є образами точок B і C при цій гомотетії.

24.18.$^{\circ}$ Які з фігур, зображених на рисунку 24.22, збігаються зі своїми образами при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k > 0$ і $k \neq 1$?

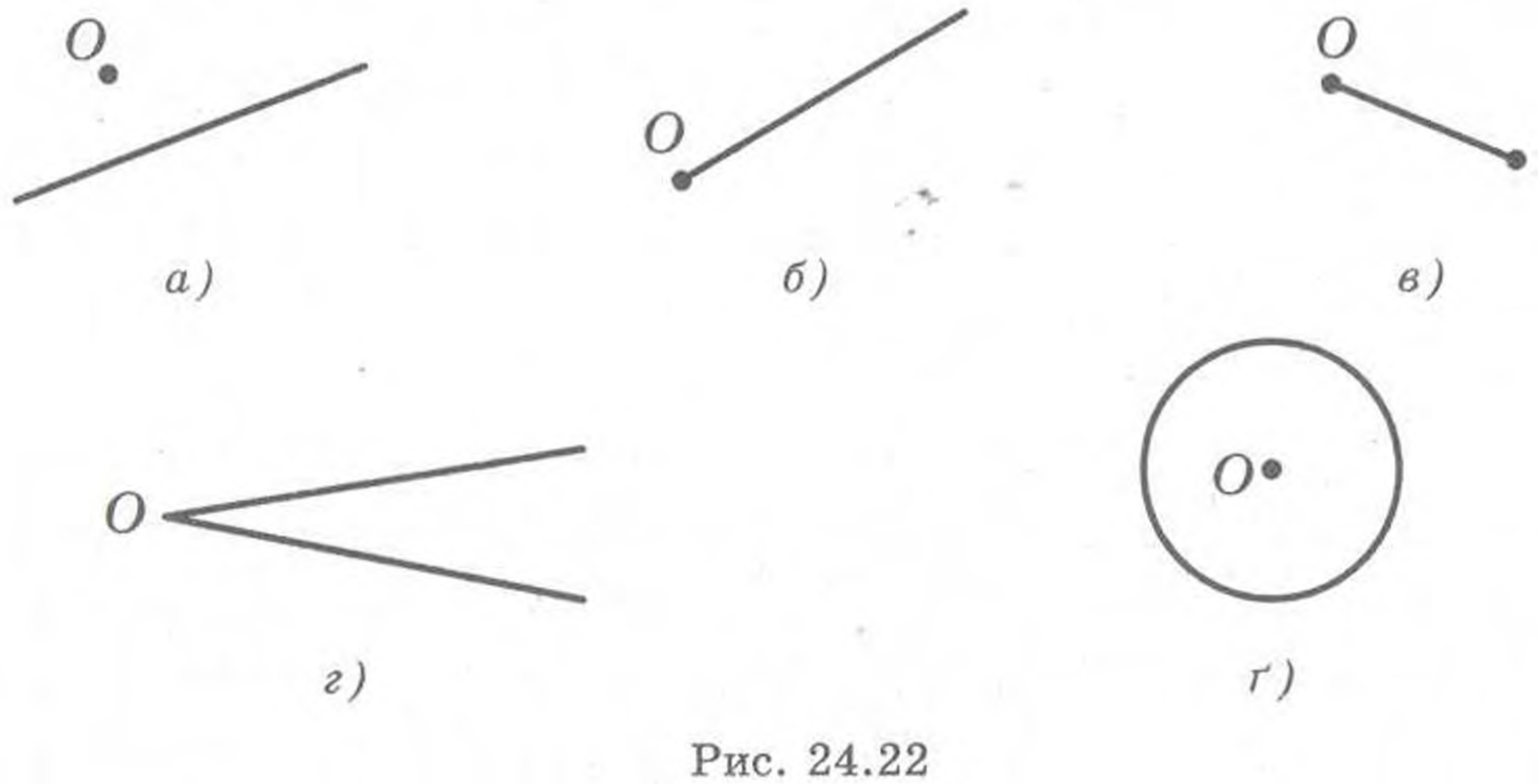


Рис. 24.22

24.19.$^{\circ}$ Які з фігур, зображених на рисунку 24.23, збігаються зі своїми образами при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k < 0$?

24.20.$^{\circ}$ Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 24.24). Знайдіть коефіцієнт гомотетії з центром: 1) у точці B, при якій точка B_1 є образом точки M; 2) у точці M, при якій точка A_1 є образом точки A; 3) у точці C, при якій точка M є образом точки C_1.

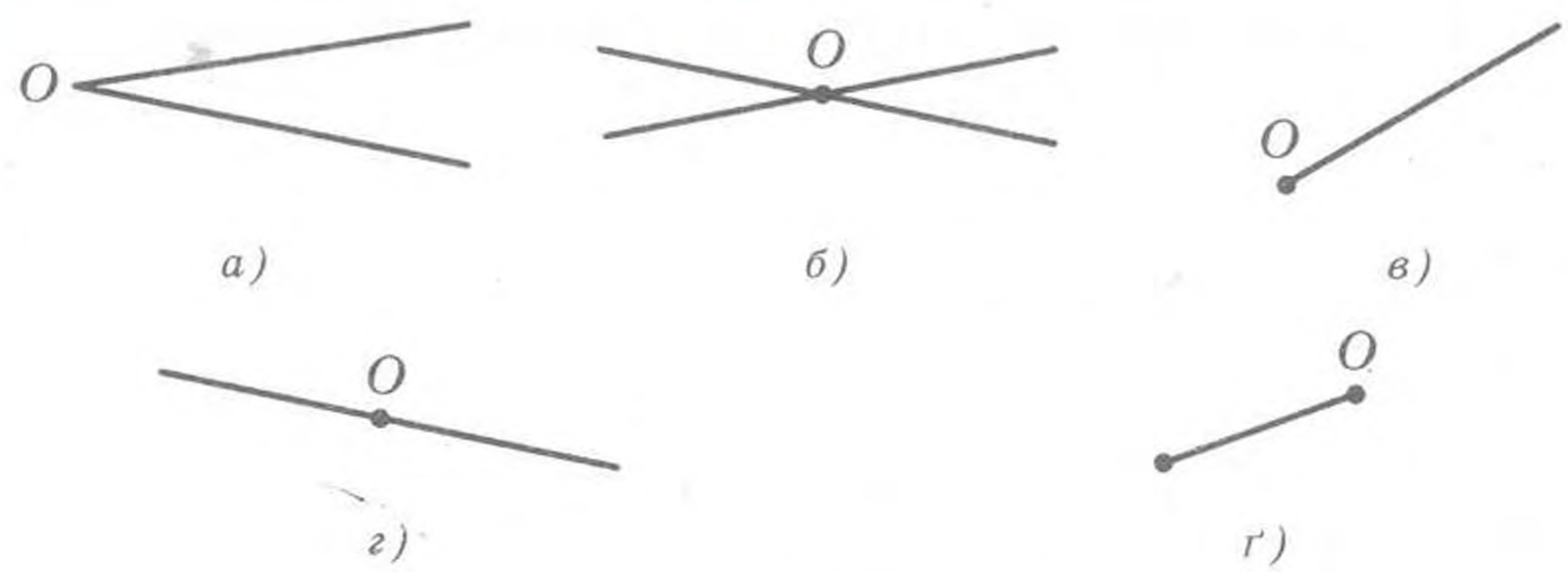


Рис. 24.23

24.21.° Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 24.24). Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій трикутник $A_1B_1C_1$ є образом трикутника ABC.

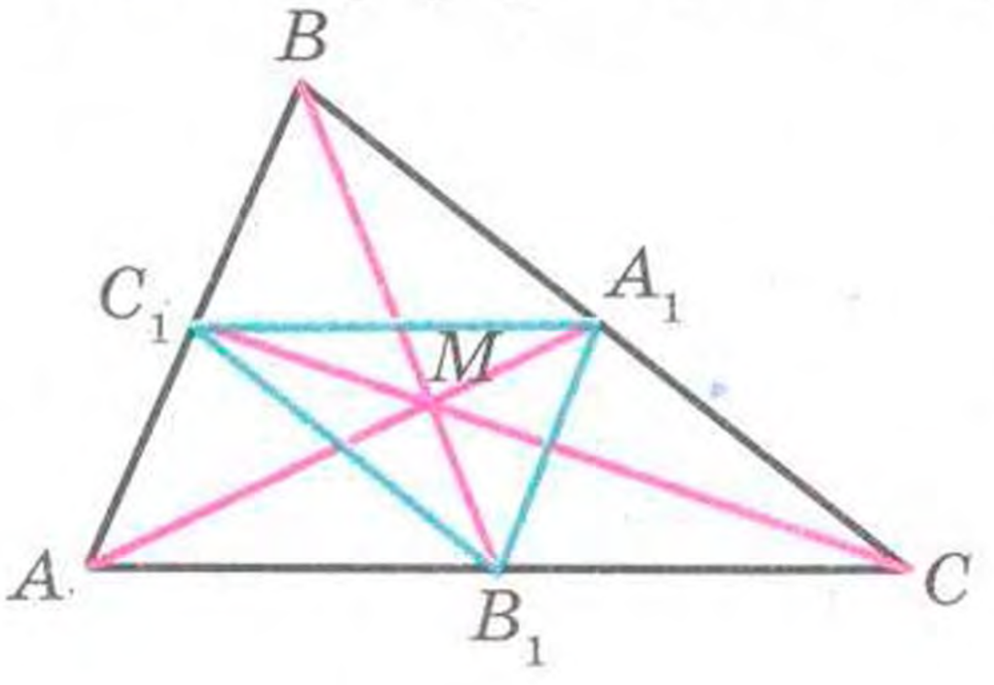


Рис. 24.24

24.22.° У трикутнику ABC медіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в точці M. Точки K, F і N — середини відрізків AM, BM і CM відповідно. Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій трикутник ABC є образом трикутника KFN.

24.23.° Знайдіть образи точок A $(-2;\ 1)$, B $(3;\ 0)$, D $(0;\ -6)$ при гомотетії з центром O $(0;\ 0)$ і коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

24.24.° Точка A_1 $(-1;\ 2)$ — образ точки A $(-3;\ 6)$ при гомотетії з центром у початку координат. Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

24.25.° Площі двох подібних трикутників дорівнюють 28 см^2 і 63 см^2. Одна із сторін першого трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть сторону другого трикутника, яка відповідає даній стороні першого.

24.26.° Відповідні сторони двох подібних трикутників дорівнюють 30 см і 24 см. Площа трикутника зі стороною 30 см дорівнює 45 см^2. Знайдіть площу другого трикутника.

24.27.° Площа трикутника дорівнює S. Чому дорівнює площа трикутника, який відтинає від даного його середня лінія?

24.28.° Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу трикутника, вершини якого — середини середніх ліній даного трикутника.

24.29.° Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 24.25). Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій: 1) відрізок AC є образом відрізка MN; 2) відрізок MN є образом відрізка AC.

24.30.° Паралельні прямі перетинають сторони кута A у точках M, N, P і Q (рис. 24.26). Відомо, що $AM : MP = 3 : 1$. Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій: 1) відрізок PQ є образом відрізка MN; 2) відрізок MN є образом відрізка PQ.

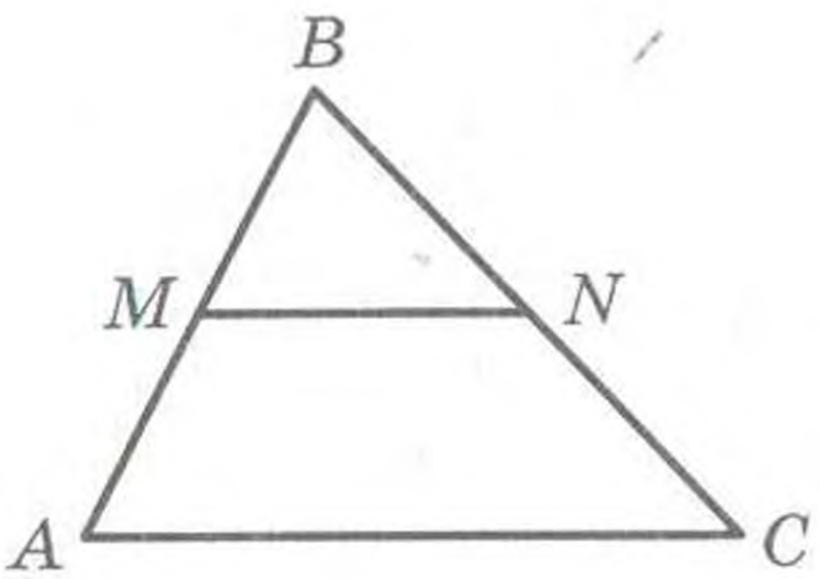


Рис. 24.25

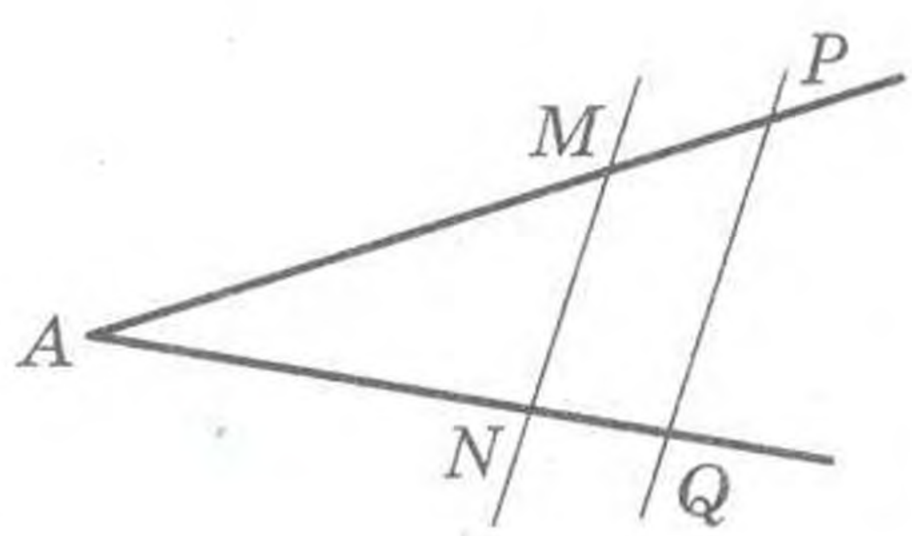


Рис. 24.26

24.31.• Паралельні відрізки BC і AD такі, що $AD = 3BC$. Скільки існує точок, що є центрами гомотетії, при якій образом відрізка BC є відрізок AD? Для кожної такої точки визначте коефіцієнт гомотетії.

24.32.• Кола з центрами O_1 і O_2 відповідно з радіусами R і r мають зовнішній дотик у точці O (рис. 24.27). Доведіть, що коло з центром O_1 є образом кола з центром O_2 при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $-\frac{R}{r}$.

24.33.• Кола з центрами O_1 і O_2 відповідно з радіусами R і r мають внутрішній дотик у точці O (рис. 24.28). Доведіть, що коло з центром O_1 є образом кола з центром O_2 при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $\frac{R}{r}$.

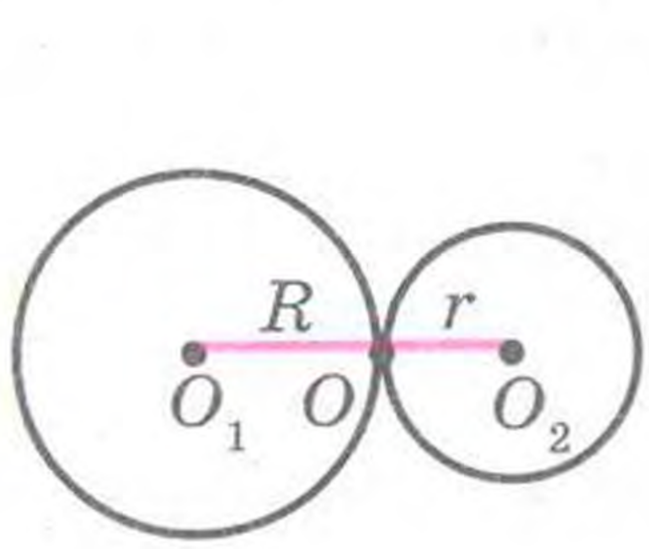


Рис. 24.27

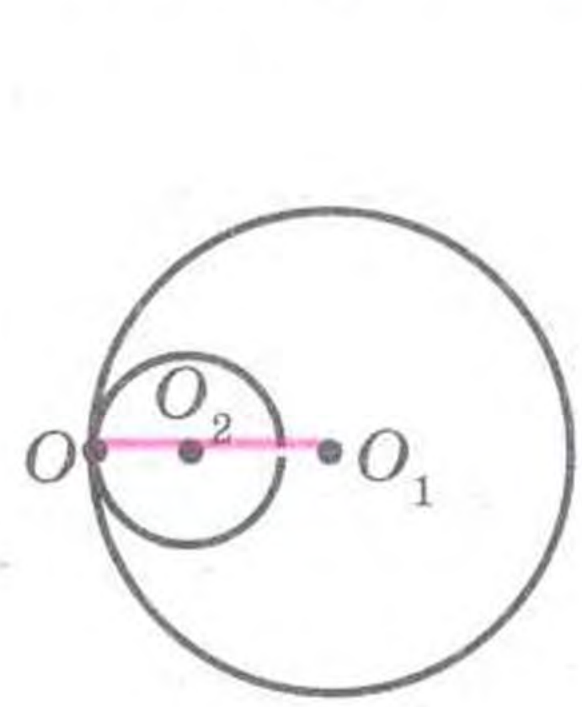


Рис. 24.28

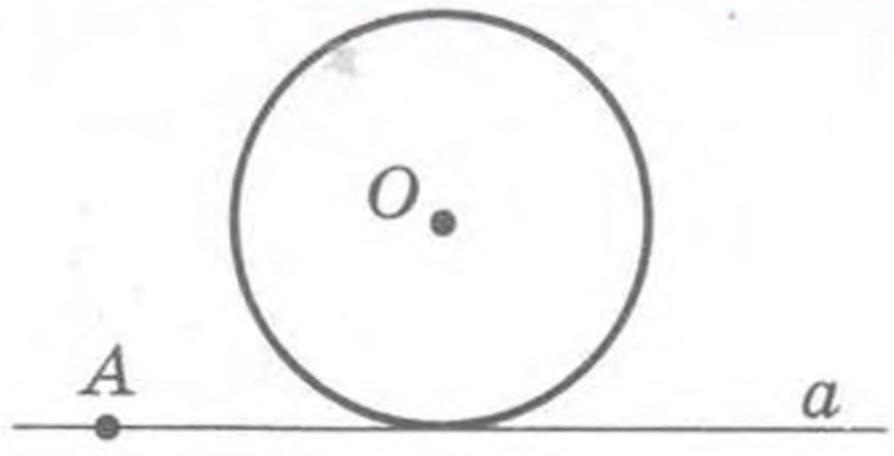


Рис. 24.29

24.34.$^{\bullet}$ Коло з центром O дотикається до прямої a. Доведіть, що образ цього кола при гомотетії з центром A, де A — довільна точка прямої a (рис. 24.29), дотикається до цієї прямої.

23.35.$^{\bullet}$ Два кола дотикаються в точці K. Пряма, яка проходить через точку K, перетинає ці кола в точках A і B. Доведіть, що дотичні до кіл, проведені через точки A і B, паралельні.

24.36.$^{\bullet}$ Точка A (2; −3) — образ точки B (8; 6) при гомотетії з центром M(4; 0). Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

24.37.$^{\bullet}$ Точка A (−7; 10) — образ точки B (−1; −2) при гомотетії з коефіцієнтом −2. Знайдіть центр гомотетії.

24.38.$^{\bullet}$ Точка A_1 (x; 4) — образ точки A (−6; y) при гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$. Знайдіть x та y.

24.39.$^{\bullet}$ Точка A_1 (4; y) — образ точки A (x; −4) при гомотетії з центром B (1; −1) і коефіцієнтом $k = -3$. Знайдіть x та y.

24.40.$^{\bullet}$ Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає його сторону AB у точці M, а сторону BC − у точці K. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BM = 4$ см, $AC = 8$ см, $AM = MK$, а площа трикутника MBK дорівнює 5 см^2.

24.41.$^{\bullet}$ Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайдіть площу трапеції, якщо $BC : AD = 3 : 5$, а площа трикутника AED дорівнює 175 см^2.

24.42.$^{\bullet}$ Відрізки BM і CK — висоти гострокутного трикутника ABC, $\angle A = 45°$. Знайдіть відношення площ трикутників AMK і ABC.

24.43.$^{\bullet}$ Знайдіть образ прямої $y = 2x + 1$ при гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

24.44.$^{\bullet}$ Знайдіть образ кола $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ при гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

24.45.$^{\bullet}$ Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O. Доведіть, що описані кола трикутників AOD і BOC дотикаються.

24.46.• Доведіть, що коли нерівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ є такими, що $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$, то існують такі точка O і число $k \neq 0$, $|k| \neq 1$, що $H_O^k(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.

24.47.• Два кола мають внутрішній дотик. Через точку дотику проведено дві прямі, які перетинають кола в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 24.30). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

24.48.• Два кола мають зовнішній дотик. Через точку дотику проведено дві прямі, які перетинають кола в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 24.31). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

24.49.• Точка A належить колу (рис. 24.32). Знайдіть геометричне місце точок, які є серединами хорд даного кола, одним із кінців яких є точка A.

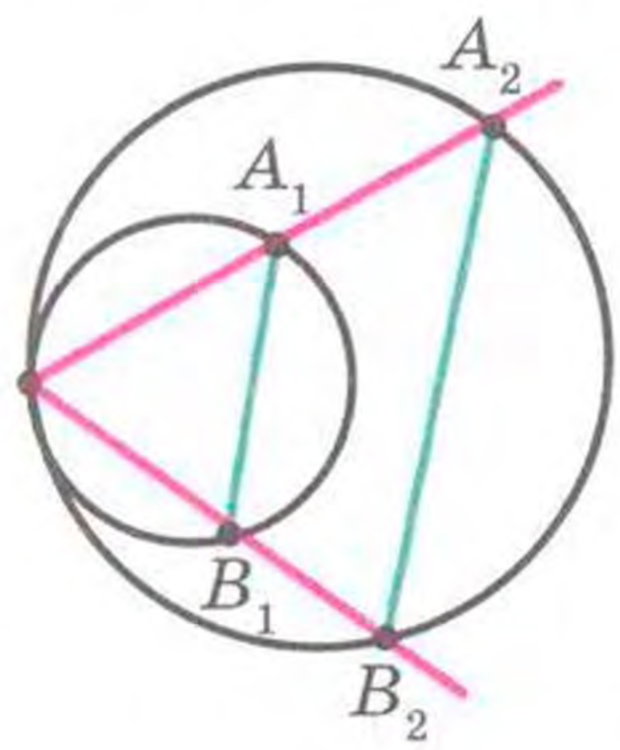


Рис. 24.30

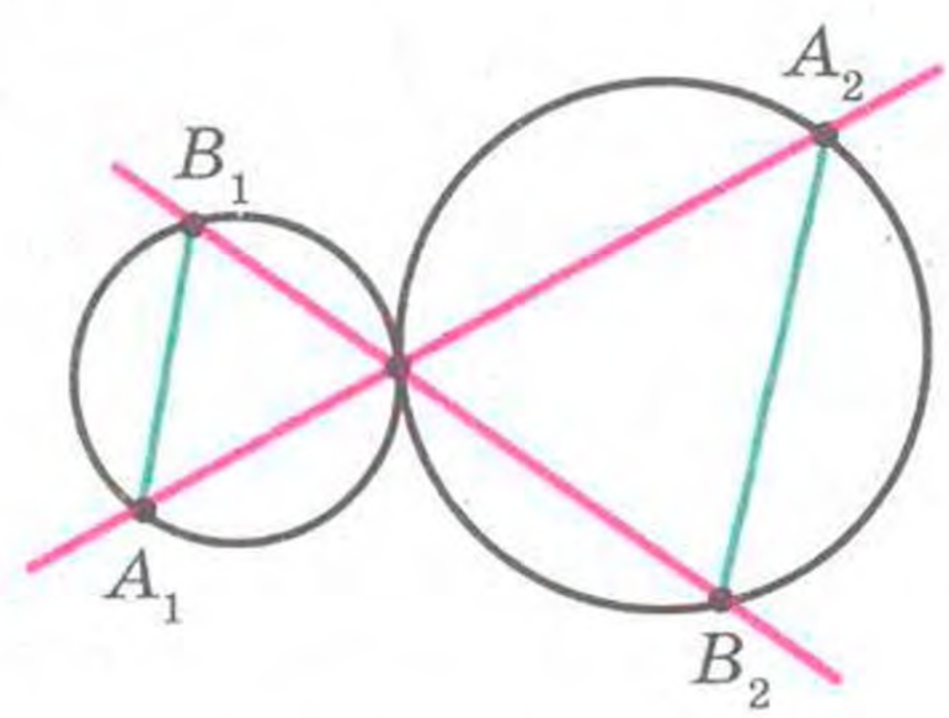


Рис. 24.31

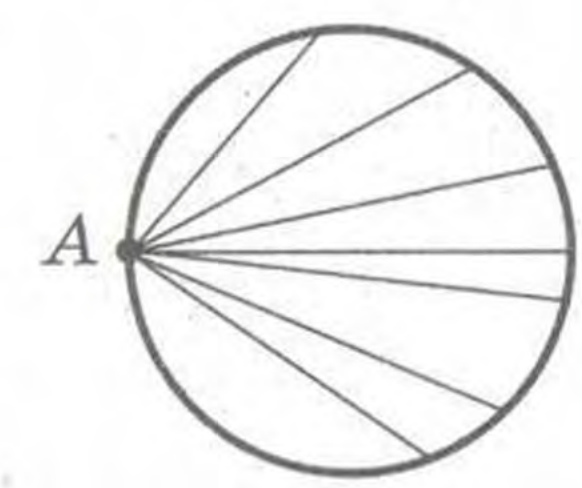


Рис. 24.32

24.50.• Два кола мають внутрішній дотик, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що будь-яку хорду більшого кола, яка проходить через точку дотику, менше коло ділить навпіл.

24.51.• Дано трикутник ABC і довільну точку M. Доведіть, що точки, симетричні точці M відносно середин сторін трикутника ABC, є вершинами трикутника, рівного даному.

24.52.• На продовженнях медіан AK, BL і CM трикутника ABC взято точки P, Q, R такі, що $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$, $MR = \frac{1}{2}CM$. Знайдіть S_{PQR}, якщо $S_{ABC} = 1$.

24.53.• Доведіть, що точки, симетричні довільній точці відносно середин сторін квадрата, є вершинами деякого квадрата.

24.54.• Усередині опуклого чотирикутника $ABCD$ позначили точку P. Нехай точки M_1, M_2, M_3, M_4 — точки перетину медіан трикутників APB, BPC, CPD і DPA відповідно. Доведіть, що чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ — паралелограм.

24.55.** Два кола дотикаються внутрішнім чином у точці O. У довільній точці M внутрішнього кола проведено до нього дотичну, яка перетинає друге коло в точках A і B. Доведіть, що $\angle AOM = \angle MOB$.

24.56.** Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола і двома його кутами.

24.57.** Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола і двома його кутами.

24.58.** Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.

24.59.** Впишіть у даний гострокутний трикутник ABC прямокутник, сторони якого відносяться як $2 : 1$, так, щоб дві вершини більшої сторони прямокутника лежали на стороні AC трикутника, а дві інші вершини — на сторонах AB і BC.

24.60.** Впишіть у даний трикутник інший трикутник, сторони якого були б паралельні трьом даним прямим.

24.61.** Точку, яка знаходиться всередині опуклого чотирикутника з площею S, з'єднано з його вершинами. Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого є точками перетину медіан чотирьох утворених трикутників.

24.62.** Відрізок AB — хорда даного кола, точка C — довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC.

24.63.** Дано дві точки A і B та пряму l. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC, де C — довільна точка прямої l.

24.64.** Точка M належить куту ABC, але не належить його сторонам. Побудуйте коло, яке дотикається до сторін кута і проходить через точку M.

24.65.** Усередині кута AOB дано точку M. Знайдіть на промені OA точку, однаково віддалену від точки M і променя OB.

24.66.** На стороні AC гострокутного трикутника ABC позначили точку M. Нехай перпендикуляри, опущені із середин відрізків AM і MC відповідно на сторони BC і AB, перетинаються в точці O. При якому положенні точки M на стороні AC довжина відрізка MO буде найменшою?

24.67.** На сторонах AB і AC гострокутного трикутника ABC позначили відповідно точки K і L так, що $KL \parallel BC$. Прямі, проведені через точки K і L перпендикулярно до сторін AB і AC відповідно, перетинаються в точці M. Доведіть, що пряма AM містить центр описаного кола трикутника ABC.

24.68.** Точка M лежить усередині кола. Проведіть через точку M хорду AB так, щоб $AM : MB = 2 : 1$.

24.69.* На катетах AC і CB і гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначили відповідно точки M, N і K так, що $MN \parallel AB$ і трикутник MNK рівносторонній. Потім увесь рисунок витерли, залишивши лише точки A, K і B. Як за цими точками відновити трикутник ABC?

24.70.* Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають описане коло цього трикутника в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Вписане коло дотикається до сторін AB, BC і CA відповідно в точках C_2, A_2 і B_2. Доведіть, що прямі A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 перетинаються в одній точці.

24.71.* Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають описане коло цього трикутника в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Дотичні до кола в точках A_1, B_1 і C_1 перетинаються в точках A_2, B_2 і C_2 (рис. 24.33). Доведіть, що прямі AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці.

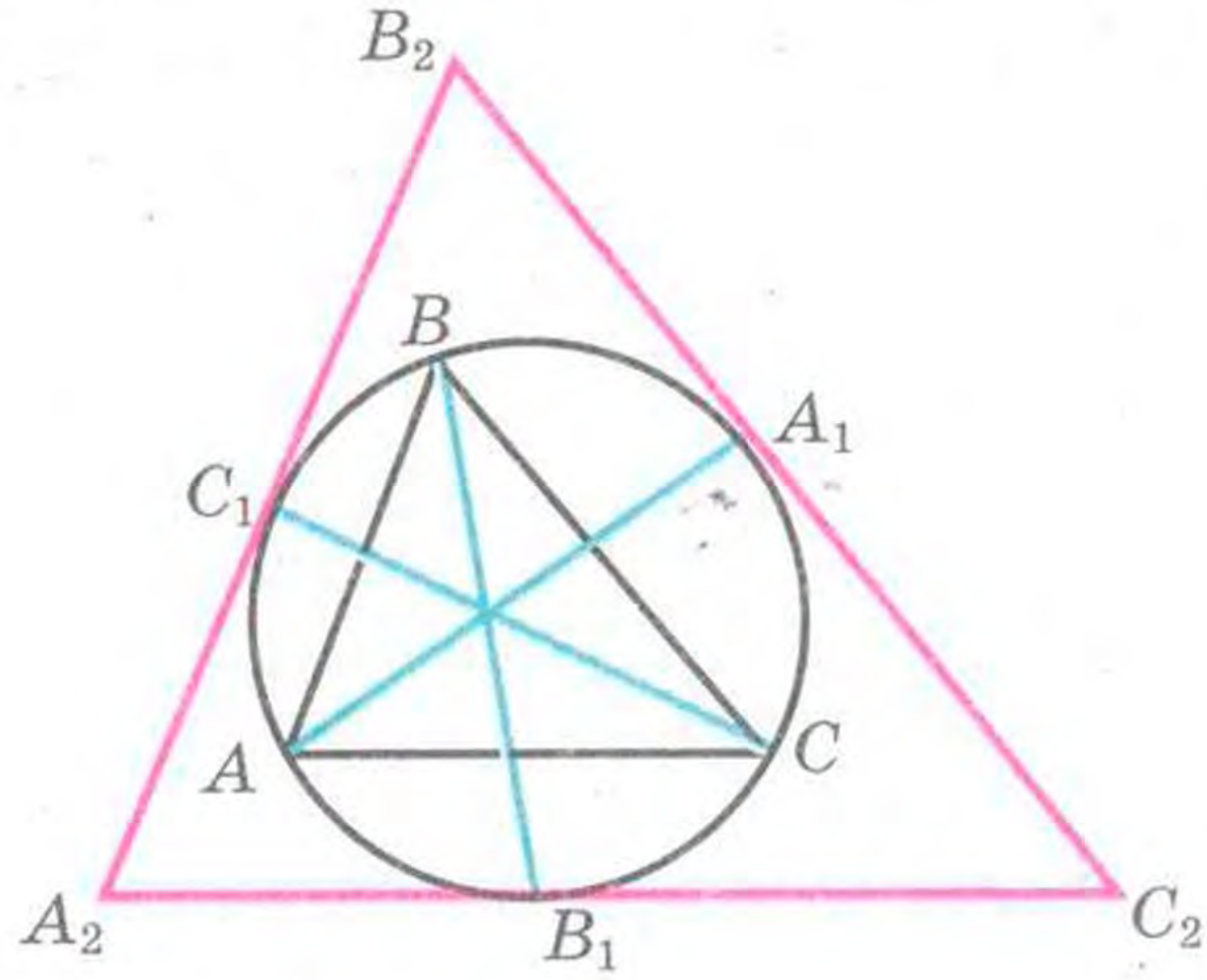


Рис. 24.33

24.72.* Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторін AB, BC і CA в точках C_1, A_1 і B_1 відповідно. Прямі, які містять висоти трикутника $A_1B_1C_1$, проведені до сторін A_1B_1, B_1C_1 і C_1A_1, перетинають дане коло в точках C_2, A_2 і B_2 відповідно. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2 перетинаються в одній точці.

24.73.* Розглянемо множину рівнобедрених трикутників з рівними радіусами вписаних кіл, основи яких лежать на даній прямій, одна з вершин — у даній точці A цієї прямої. Доведіть, що усі прямі, які містять бічні сторони цих трикутників, котрі не проходять через вершину A, дотикаються до одного й того самого кола.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Інверсія

Як правило, ми розглядали такі перетворення фігур, які зберігали прямолінійність, тобто мали властивості, про які йдеться в теоремах 20.1 і 24.2.

У цьому пункті ми розглянемо перетворення фігур, яке називають інверсією (від латинського *inversio* — перегортання, обернення). Це перетворення не зберігає прямолінійність.

Нехай дано коло радіуса R з центром O. Розглянемо фігуру F, якою є вся площина, за винятком точки O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність таку точку X_1 променя OX, що

$$OX_1 \cdot OX = R^2.$$

Таке перетворення фігури F називають **інверсією відносно кола** з центром O. Точку O називають **центром інверсії** (це єдина точка, у якій перетворення «інверсія» не визначено). Дане коло називають **колом інверсії**, число R — **радіусом інверсії** (рис. 24.34).

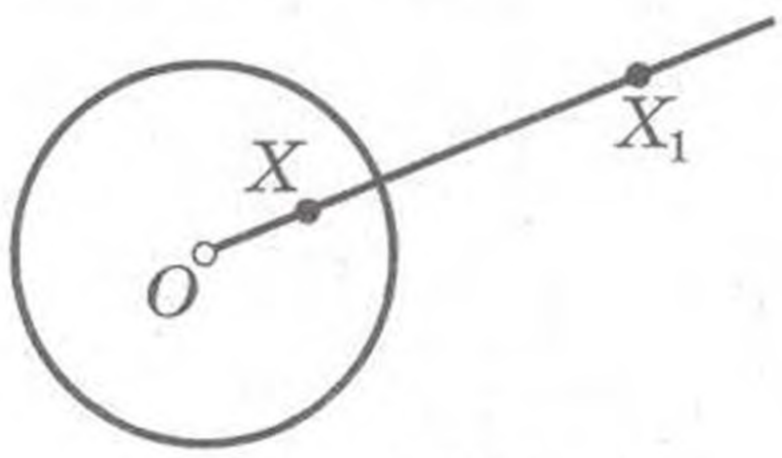


Рис. 24.34

Інверсію з центром O радіуса R позначають так: I_O^R.

Безпосередньо з означення випливають такі три властивості інверсії:

Властивість 1. *Образами точок, які лежать всередині кола інверсії (не включаючи центр кола), є точки, які лежать поза колом, і навпаки.*

Властивість 2. *Якщо X — довільна точка кола інверсії, то $I_O^R(X) = X$, тобто всі точки кола інверсії є* ***нерухомими точками*** *цього перетворення.*

Ці дві властивості дозволяють розглядати інверсію як перетворення, яке ніби «вивертає» круг «назовні» і навпаки. Причому коли точку X обирати все ближче і ближче до центра інверсії, то її образ розміщуватиметься все далі і далі від центра інверсії.

Властивість 3. *Інверсія є оборотним перетворенням. Перетворенням, оберненим до інверсії I_O^R, є ця сама інверсія I_O^R.*

Інверсію також називають **симетрією відносно кола**. Це пов'язано з тим, що наведені властивості 1–3 схожі на властивості осьової симетрії.

Розглянемо ще кілька властивостей інверсії.

Властивість 4. *Образом прямої, яка проходить через центр інверсії, є ця сама пряма*[1].

Властивість 5. *Образом прямої, яка не проходить через центр інверсії, є коло, яке проходить через центр інверсії*[2].

Доведення. Нехай пряма a не проходить через центр інверсії (рис. 24.36). Опустимо з центра інверсії перпендикуляр OM на пряму a.

Нехай $I_O^R(M) = M_1$, тобто $OM_1 \cdot OM = R^2$. На відрізку OM_1 як на діаметрі побудуємо коло. Покажемо, що образ будь-якої точки прямої a лежить на цьому колі.

Нехай X — довільна точка прямої a, відмінна від точки M. Якщо $X_1 = I_O^R(X)$, то $OX_1 \cdot OX = R^2$. Маємо: $OM_1 \cdot OM = OX_1 \cdot OX$.

Тоді $\frac{OM}{OX} = \frac{OX_1}{OM_1}$.

Отже, $\triangle OX_1M_1 \sim \triangle OMX$ за другою ознакою подібності трикутників. Звідси $\angle OX_1M_1 = \angle OMX = 90°$. Це означає, що точка X_1 лежить на колі з діаметром OM_1.

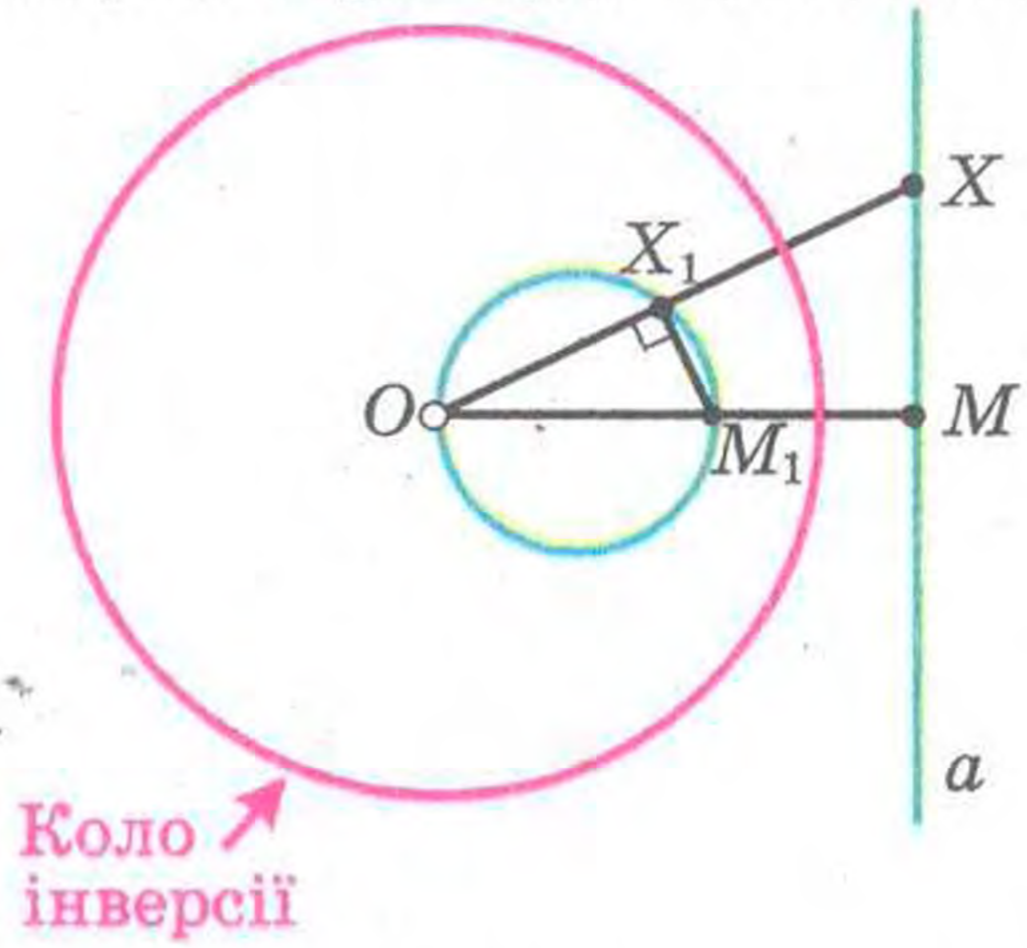


Рис. 24.36

Нескладно показати (зробіть це самостійно), що кожна точка кола (крім точки O) є образом деякої точки прямої a. ▲

Властивість 6. *Образом кола, яке проходить через центр інверсії, є пряма, яка не проходить через центр інверсії.*

Доведіть цю властивість самостійно.

Властивість 7. *Образом кола, яке не проходить через центр інверсії, є коло, яке не проходить через центр інверсії.*

---

[1] Тут під прямою ми розуміємо пряму з виколотою точкою (центр інверсії).

[2] Тут під колом ми розуміємо коло з виколотою точкою (центр інверсії).

Доведення. Проведемо через точку O — центр інверсії — пряму AB, яка містить діаметр AB даного кола (рис. 24.37). Нехай $I_O^R(A)=A_1$, $I_O^R(B)=B_1$. Виберемо на даному колі довільну точку X, відмінну від точок A і B. Тоді $\angle AXB = 90°$.

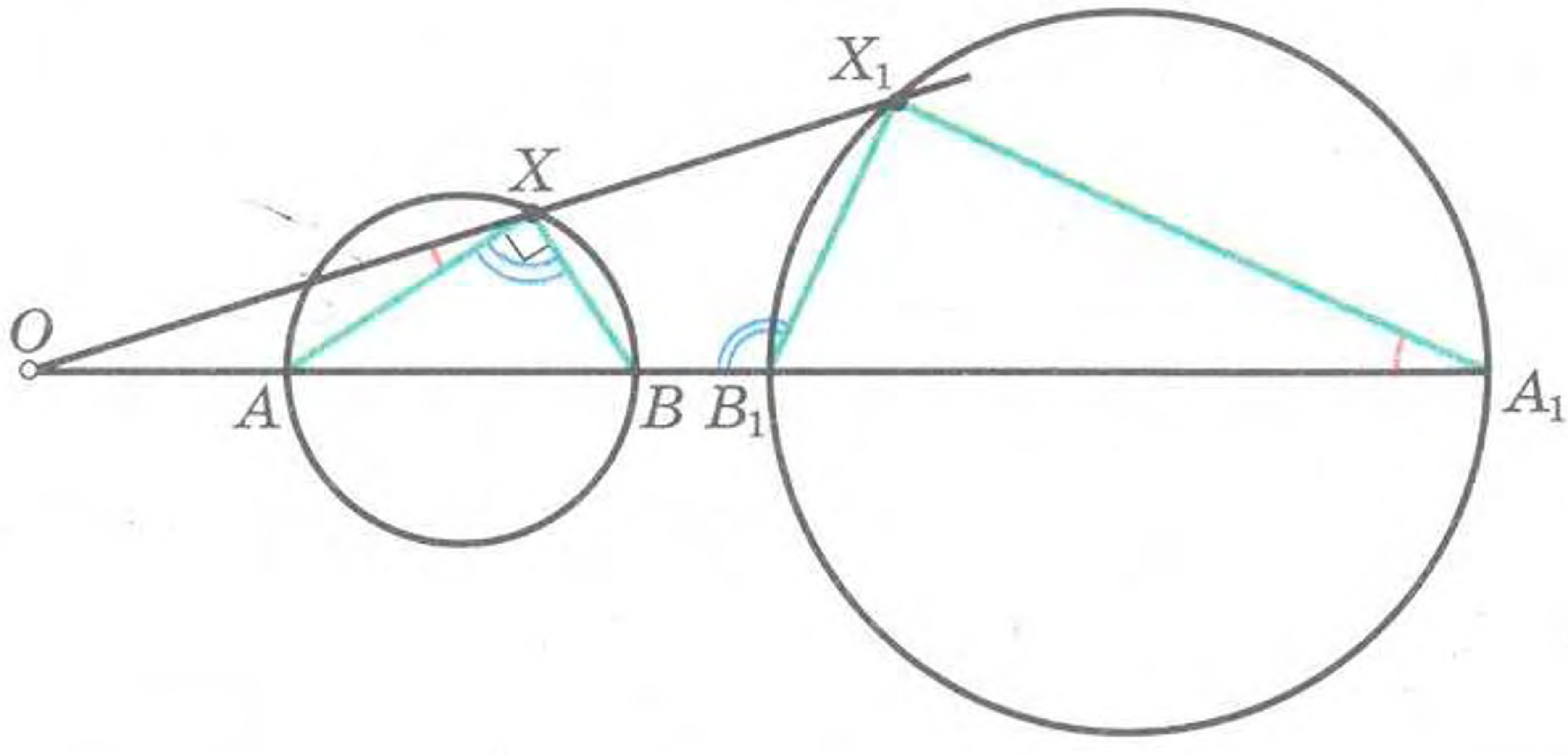


Рис. 24.37

Нехай $I_O^R(X)=X_1$. Маємо: $OA_1 \cdot OA = OB_1 \cdot OB = OX_1 \cdot OX = R^2$. Звідси випливає, що $\triangle OXA \sim \triangle OA_1X_1$, $\triangle OXB \sim \triangle OB_1X_1$.

Тоді $\angle OXA = \angle OA_1X_1$, $\angle OXB = \angle OB_1X_1$. Маємо: $\angle A_1X_1B_1 = \angle OB_1X_1 - \angle OA_1X_1 = \angle OXB - \angle OXA = 90°$. Отже, точка X_1 належить колу з діаметром A_1B_1. Отримали, що образ будь-якої точки даного кола належить колу з діаметром A_1B_1.

Нескладно показати (зробіть це самостійно), що кожна точка кола з діаметром A_1B_1 є образом деякої точки даного кола.

Зазначимо, що ми розглянули випадок, коли центр інверсії лежить поза даним колом. Інший випадок розгляньте самостійно. ▲

Властивість 8. *Якщо* $I_O^R(A)=A_1$, $I_O^R(B)=B_1$, *то* $A_1B_1 = \dfrac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$.

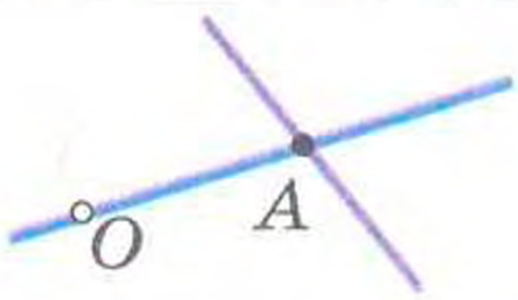
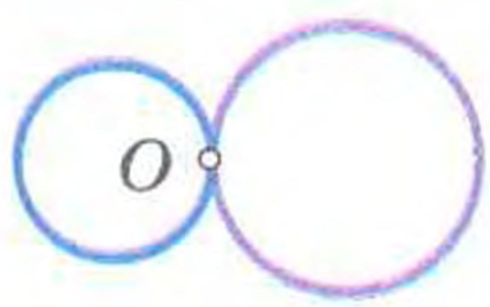
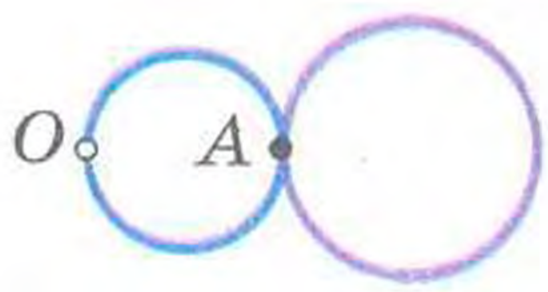
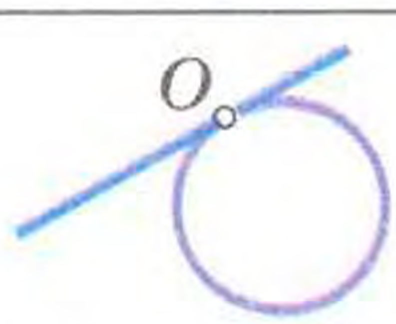
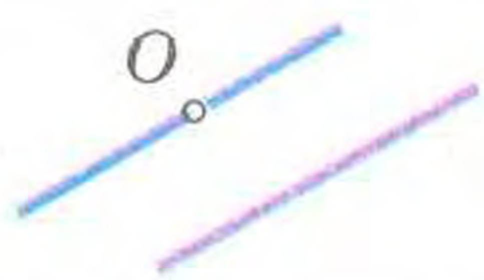
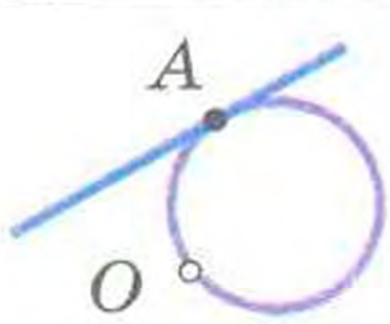
Доведіть цю властивість самостійно.

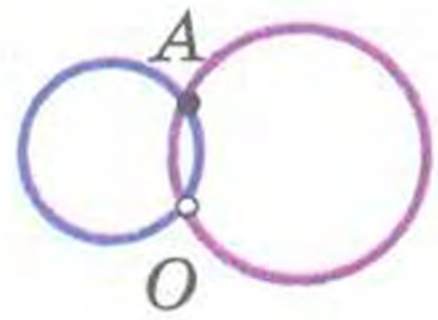
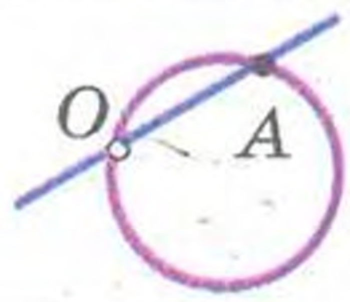
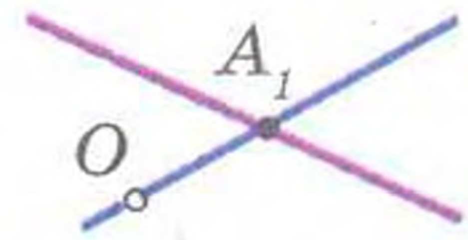
Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви переконалися, що застосування руху і гомотетії є ефективним засобом для розв'язування цілої низки задач. Інверсія розширює коло задач, які можна розв'язати за допомогою перетворень фігури.

Наприклад, інверсія дозволяє за допомогою самого лише циркуля знайти середину даного відрізка. Також за допомогою інверсії можна розв'язати одну із складних задач стародавніх часів — задачу Аполлонія: побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, яке дотикається до трьох даних кіл. Розв'язати ці задачі ви можете на заняттях математичного гуртка.

Ви знаєте, що застосування методу координат починається з вибору системи координат. Аналогічно перший крок у розв'язуванні задач за допомогою інверсії — це вигідний вибір центру інверсії. Наприклад, якщо два кола дотикаються, то, обравши за центр інверсії точку дотику, ми отримаємо, що образом даних кіл є дві паралельні прямі.

У таблиці наведено приклади фігур і їх образів при інверсії з центром у точці O (образ показано схематично, точка A_1 — образ точки A).

Фігура	Образ фігури
	
	
	
	
	
	
	

Фігура	Образ фігури
	
	

Покажемо, як за допомогою інверсії довести відому вам **теорему Птолемея**[1]: *у вписаному чотирикутнику добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін.*

На рисунку 24.38 зображено чотирикутник $ABCD$, навколо якого описано коло.

Приймемо точку A за центр інверсії, а радіус інверсії R оберемо довільно. Тоді образом описаного кола є деяка пряма l.

Нехай $I_O^R(D)=D_1$, $I_O^R(B)=B_1$, $I_O^R(C)=C_1$.

Оскільки точки B, C і D лежать на описаному колі, то їх образи, точки B_1, C_1 і D_1, лежать на образі цього кола — прямій l.

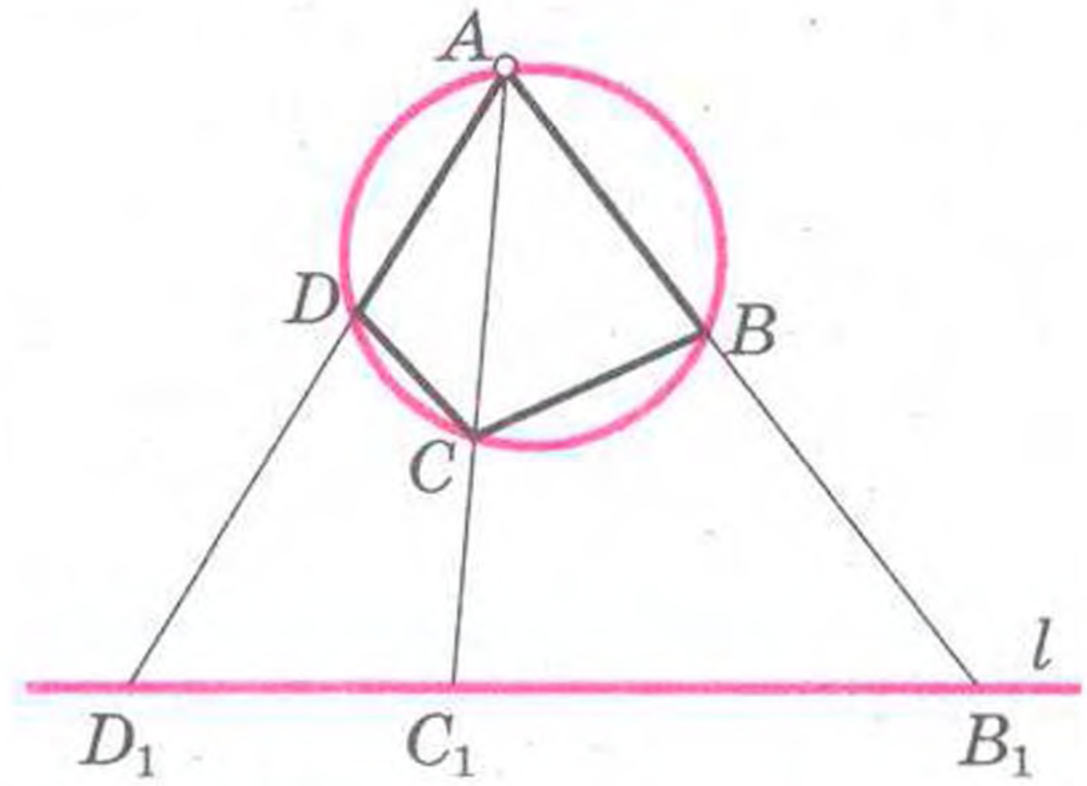


Рис. 24.38

За властивістю 8 можна записати $D_1B_1=\dfrac{DB\cdot R^2}{AD\cdot AB}$,

$$D_1C_1=\frac{DC\cdot R^2}{AD\cdot AC},\quad C_1B_1=\frac{CB\cdot R^2}{AC\cdot AB},$$

де R — радіус інверсії.

Маємо: $D_1B_1 = D_1C_1 + C_1B_1$. Тоді $\dfrac{DB\cdot R^2}{AD\cdot AB}=\dfrac{DC\cdot R^2}{AD\cdot AC}+\dfrac{CB\cdot R^2}{AC\cdot AB}$.

Звідси $DB\cdot AC = DC\cdot AB + CB\cdot AD$.

---

[1] З іншим способом доведення цієї теореми ви ознайомились у 8 класі, див. «Геометрія-8» п. 18, с. 121.

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ §7

25. Прямі й площини у просторі

Ви завершили вивчення курсу планіметрії — розділу геометрії, який вивчає властивості фігур, розміщених в одній площині. Проте більшість оточуючих нас об'єктів не є плоскими. Розділ геометрії, який вивчає властивості фігур у **просторі**, називають **стереометрією** («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Курс стереометрії ви вивчатимете в 10–12 класах. Зараз ви ознайомитеся з початковими відомостями цього розділу геометрії.

У стереометрії поряд з точками і прямими розглядають **площини**. Уявлення про площину дають поверхня стола, футбольне поле, поверхня водойми в безвітряну погоду.

Зрозуміло, що всю площину, як і пряму, зобразити неможливо. На рисунках зображують тільки частину площини, найчастіше у вигляді паралелограма (рис. 25.1). Як правило, площини позначають буквами грецького алфавіту:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots .$$

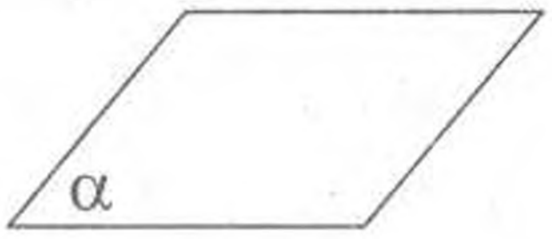
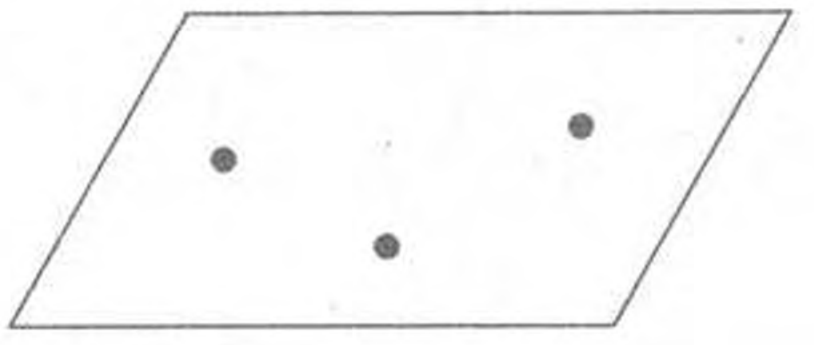
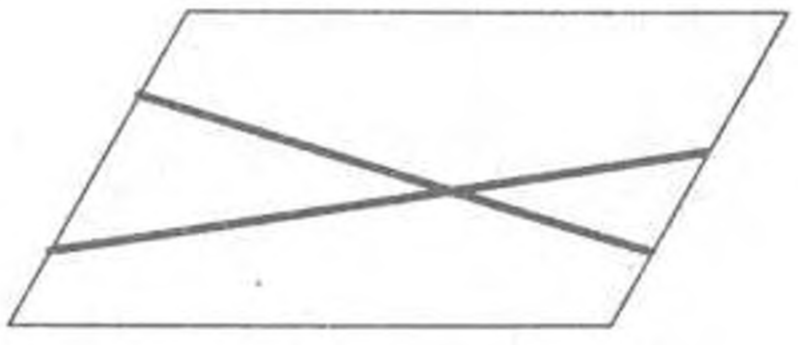
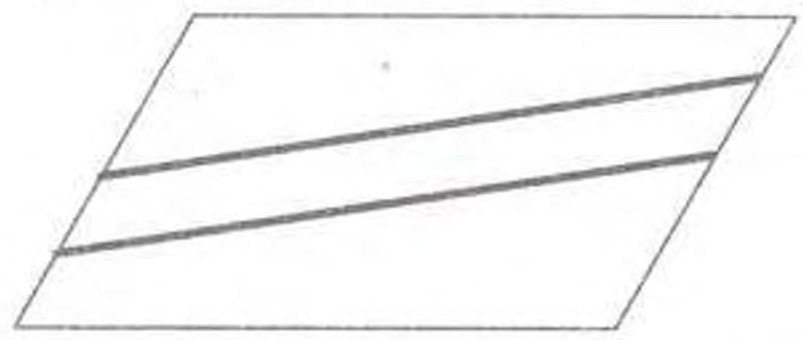
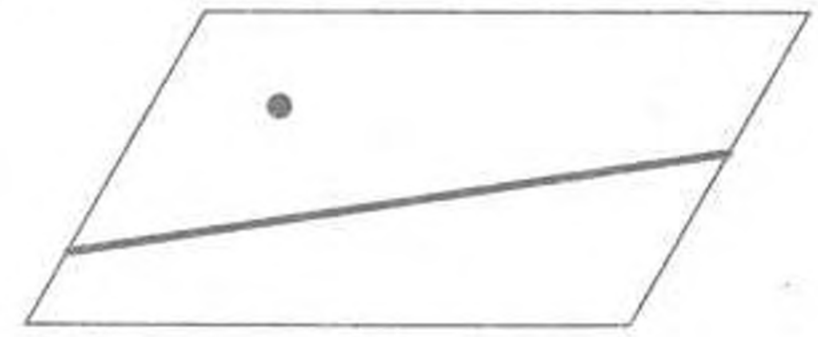


Рис. 25.1

Ви знаєте, що пряма однозначно задається будь-якими двома своїми точками. Наступні твердження вказують, як однозначно задати площину:

через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну 	через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну 

через дві паралельні прямі можна провести площину і до того ж тільки одну 	через пряму і точку, яка їй не належить, можна провести площину і до того ж тільки одну 

Те, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну, дозволяє позначати площину будь-якими трьома її точками, які не лежать на одній прямій. Так, на рисунку 25.2 зображено площину ABC.

На рисунку 25.3 зображено пряму a, яка **перетинає** площину α в точці A.

Якщо пряма a і площина α не мають спільних точок, то їх називають **паралельними** (рис. 25.4). Пишуть: $a \parallel \alpha$.

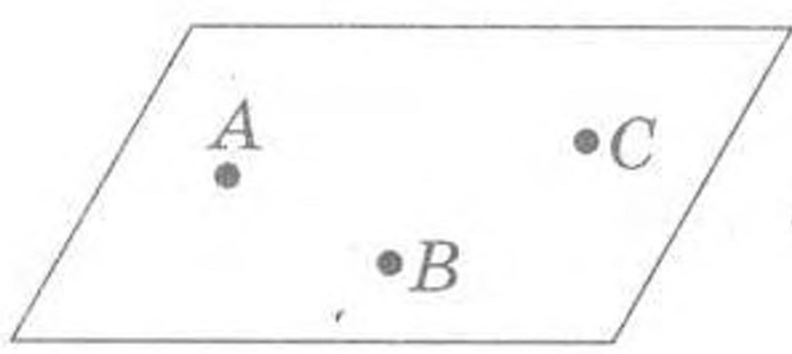


Рис. 25.2

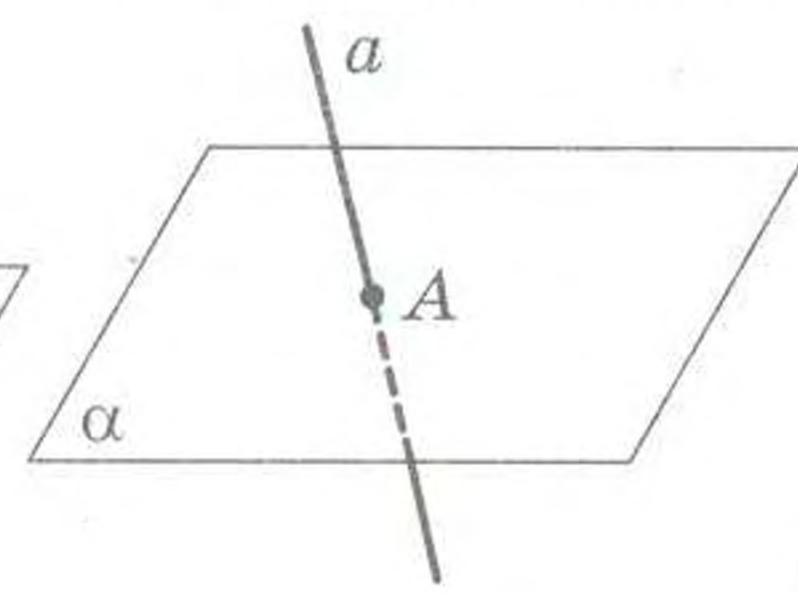


Рис. 25.3

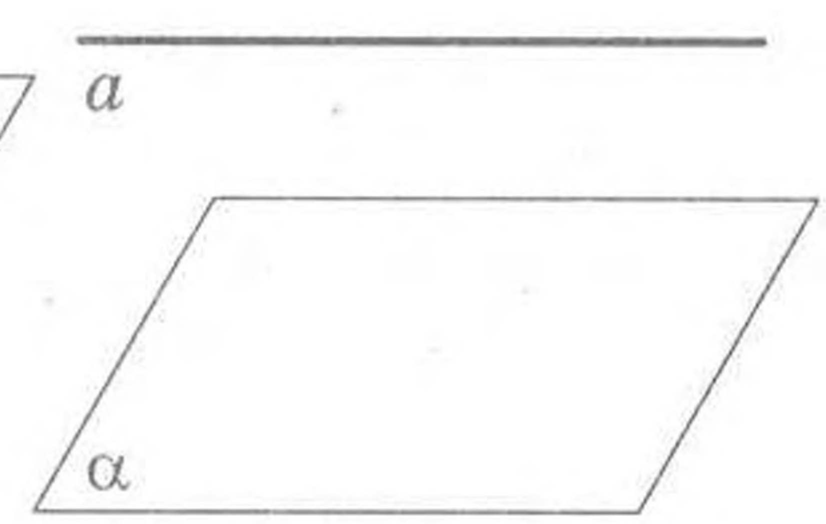


Рис. 25.4

Пряма a може належати площині α (рис. 25.5), причому справедливим є таке твердження: *якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.*

На рисунку 25.6 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A так, що вона перпендикулярна будь-якій прямій, яка належить площині і проходить через точку A. Говорять, що пряма a **перпендикулярна** до площини α, і записують $a \perp \alpha$.

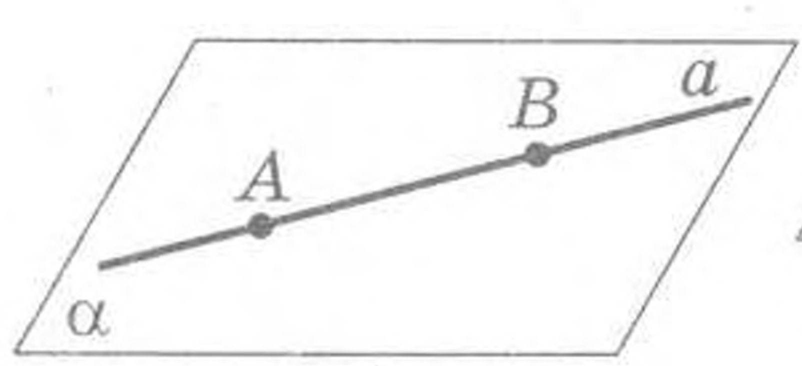


Рис. 25.5

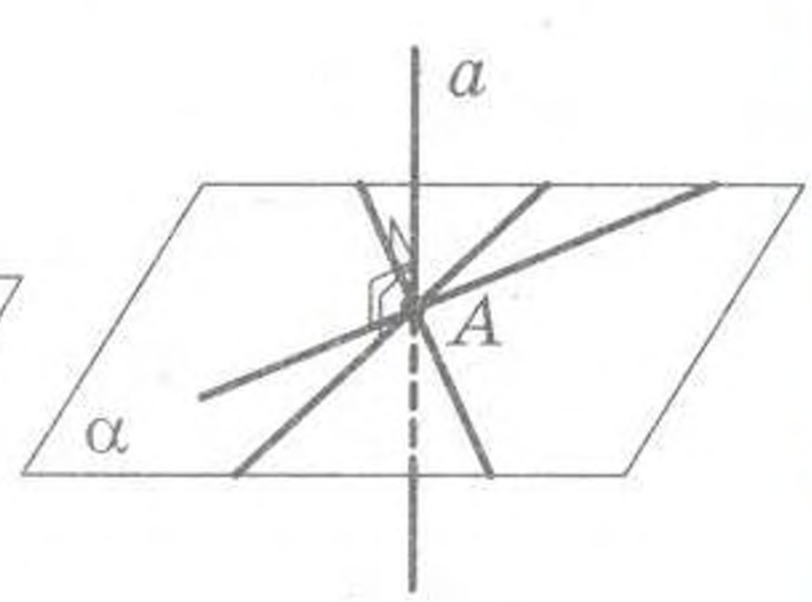


Рис. 25.6

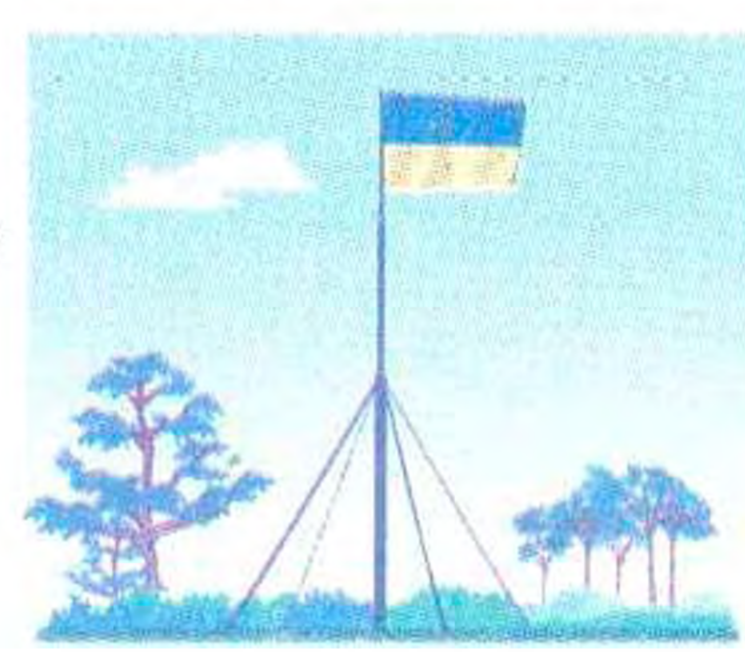


Рис. 25.7

Уявлення про пряму, перпендикулярну до площини, дає вертикально встановлена щогла (рис. 25.7).

Нехай пряма a, яка перпендикулярна до площини α, перетинає її в точці A. Оберемо на прямій a точку B (рис. 25.8). Відрізок BA називають **перпендикуляром**, опущеним з точки B на площину α.

Якщо площини α і β не мають спільних точок, то їх називають **паралельними** (рис. 25.9). Пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

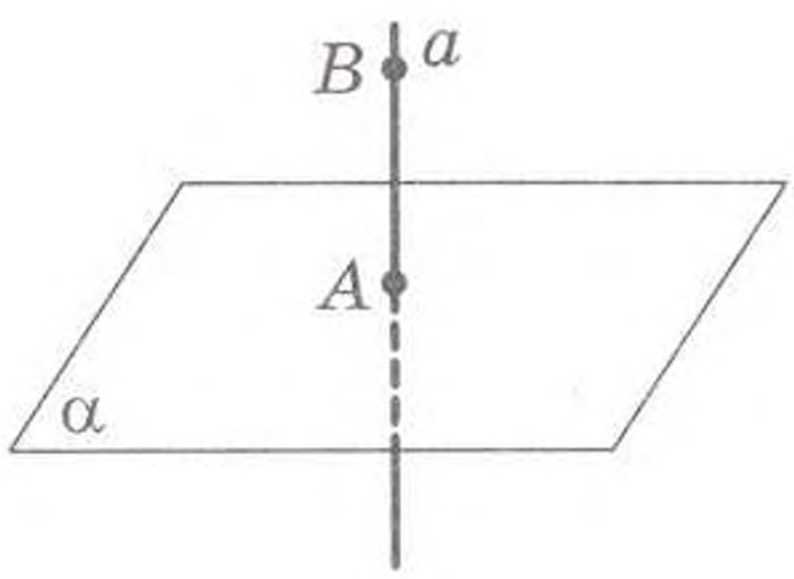


Рис. 25.8

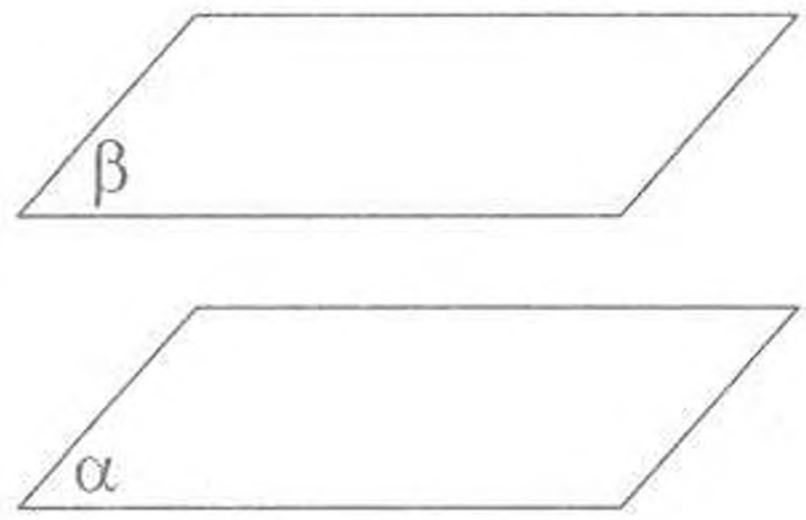


Рис. 25.9

На рисунку 25.10 площини α і β перетинаються. Їх перетином є пряма a.

З курсу планіметрії ви знаєте, що дві прямі на площині перетинаються або паралельні. У просторі можливий і третій випадок розміщення двох прямих. На рисунку 25.11 зображено прямі a і b, які не перетинаються і не лежать в одній площині. Такі прямі називають **мимобіжними**.

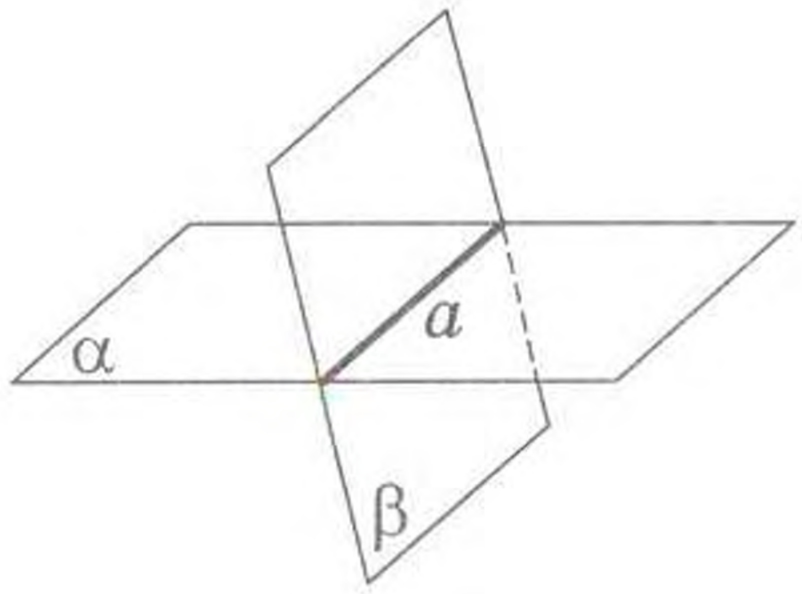


Рис. 25.10

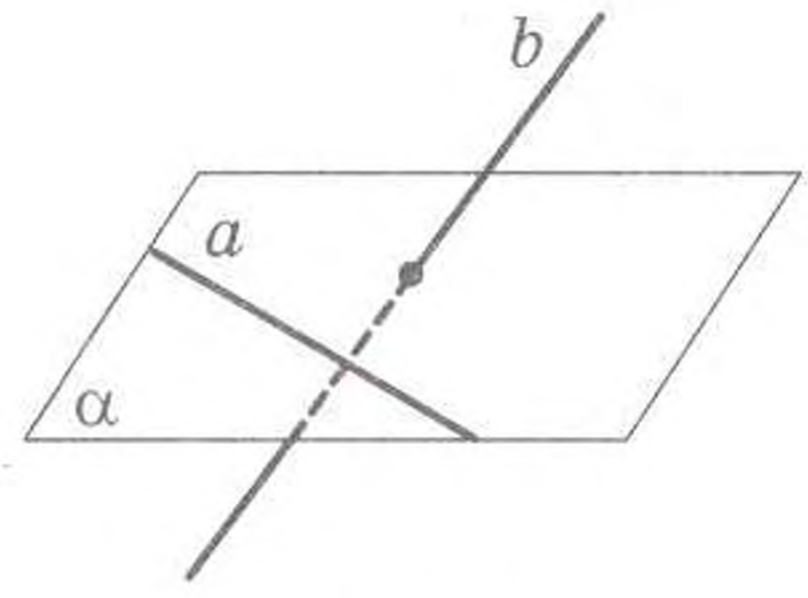


Рис. 25.11

ВПРАВИ

25.1.° Скільки площин можна провести через дві точки:
1) одну; 2) дві; 3) безліч; 4) жодної?

25.2.° Скільки площин можна провести через три точки:
1) одну; 3) одну або безліч;
2) безліч; 4) одну або жодної?

25.3.° Скільки площин можна провести через дві прямі:
1) одну; 3) одну або жодної;
2) безліч; 4) одну або безліч?

25.4.° Скільки площин можна провести через одну пряму:
1) одну; 3) жодної;
2) безліч; 4) безліч або жодної?

25.5.° Через три точки проведено дві площини. Як розміщені ці точки?

25.6.° Точка A не належить площині α. Скільки існує прямих, які проходять через точку A і паралельні площині α:
1) одна; 2) дві; 3) безліч; 4) жодної?

25.7.° Чи є правильним твердження:
1) якщо пряма a перпендикулярна до прямої b, яка лежить у площині α, то $a \perp \alpha$;
2) якщо пряма a не перпендикулярна до площини α, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини?

25.8.° З точки A опущено перпендикуляр AB на площину α, точка C належить площині α. Знайдіть:
1) AB, якщо $AC = 13$ см, $BC = 5$ см;
2) AC, якщо $AB = 4\sqrt{3}$ см, $\angle ACB = 60°$.

25.9.° З точки M опущено перпендикуляр MK на площину β, точка P належить площині β. Знайдіть:
1) MP, якщо $MK = 8$ см, $KP = 6$ см;
2) MK, якщо $MP = 10$ см, $\angle MPK = 45°$.

25.10.° Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?

25.11.° Чи можуть три площини мати тільки одну спільну точку? Відповідь проілюструйте, навівши приклад з оточуючого середовища.

25.12.° Пряма a і площина α паралельні. Скільки площин, які паралельні площині α, можна провести через пряму a:
1) одну; 2) дві; 3) безліч; 4) жодної?

25.13.° Пряма перетинає одну з двох паралельних площин. Яке взаємне розміщення даної прямої і другої з площин?

25.14.° Відомо, що пряма a паралельна кожній з площин α і β. Яким може бути взаємне розміщення площин α і β?

25.15.° Точка A лежить поза площиною α, точки B, C і D належать площині α (рис. 25.12). Укажіть лінію перетину: 1) площин ABC і ACD; 2) площин α і ABC.

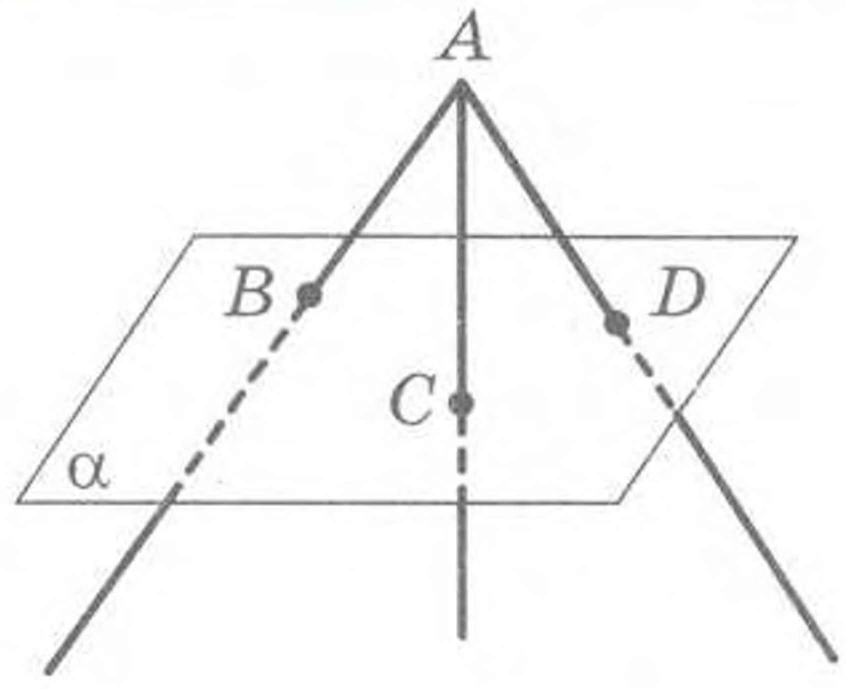


Рис 25.12

25.16.° Точка A лежить поза площиною α, точки B, C і D належать площині α (рис. 25.12). Укажіть лінію перетину: 1) площин ACD і ABD; 2) площин α і ACD.

25.17.° На рисунку 25.13 укажіть зображення: 1) прямих, які перетинаються; 2) паралельних прямих; 3) мимобіжних прямих.

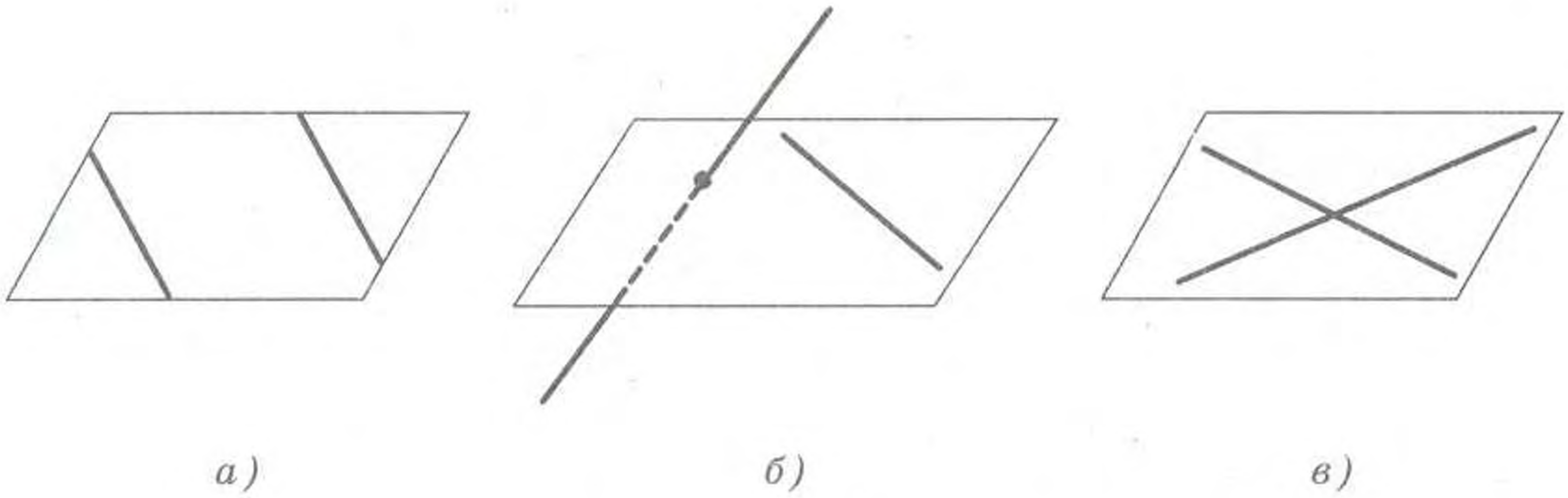


Рис 25.13

25.18.° Пряма a перетинає сторону AC трикутника ABC. Яке взаємне розміщення прямих a і AB, якщо пряма a не лежить у площині ABC?

25.19.° Пряма m паралельна стороні DE трикутника DEF. Яке взаємне розміщення прямих m і EF, якщо пряма m не лежить у площині DEF?

25.20.° Чи є правильним твердження:

1) якщо пряма a паралельна прямій b, яка лежить у площині α, то пряма a паралельна площині α;
2) якщо пряма a не паралельна прямій b, яка лежить у площині α, то пряма a не паралельна площині α;
3) якщо пряма a перетинає площину β, а пряма b належить площині β, то пряма a перетинає пряму b;
4) якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони паралельні;
5) якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу пряму;

6) якщо пряма паралельна площині, то вона паралельна будь-якій прямій цієї площини;
7) якщо дві площини паралельні одній і тій самій прямій, то ці площини паралельні;
8) якщо прямі a і b не перетинаються, то вони не лежать в одній площині?

25.21.° Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Яке взаємне розміщення прямих AB і CD?

25.22.° Точка K лежить поза площиною трикутника DEF. Яке взаємне розміщення прямих DK і EF?

25.23.° З точки A опущено перпендикуляр AB на площину α, точки C і D належать площині α, $AD = 10\sqrt{3}$ см, $\angle ADB = 60°$, $\angle ACB = 45°$. Знайдіть довжину відрізка AC.

25.24.° З точки B опущено перпендикуляр BM на площину β, точки A і C належать площині β, $BC = 17$ см, $MC = 8$ см, $\angle BAM = 30°$. Знайдіть довжину відрізка AM.

25.25.° З точки A опущено перпендикуляр AD на площину α, точки B і C належать площині α, $AB = 25$ см, $AC = 17$ см, $BD : DC = 5 : 2$. Знайдіть довжину перпендикуляра AD.

25.26.° З точки B опущено перпендикуляр BO на площину γ, точки A і C належать площині γ, $AB = 12$ см, $BC = 30$ см, $AO : OC = 10 : 17$. Знайдіть довжину відрізка AO.

25.27.°° З точки A опущено перпендикуляр AD на площину α, точки B і C належать площині α. Знайдіть відстань між точками B і C, якщо $AD = 6$ см, $\angle ABD = 45°$, $\angle ACD = 60°$, $\angle BDC = 150°$.

25.28.°° З точки M опущено перпендикуляр MB на площину β, точки A і C належать площині β, $MC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle MCB = 30°$, $\angle MAB = 45°$, $\angle ABC = 135°$. Знайдіть відстань між точками A і C.

26. Пряма призма. Піраміда

У стереометрії, крім точок, прямих і площин, розглядають **геометричні тіла**. Прикладами тіл є **многогранники** (рис. 26.1). **Поверхня** многогранника складається з многокутників. Їх називають **гранями многогранника**. Сторони многокутників називають **ребрами многогранника**, а вершини — **вершинами многогранника**.

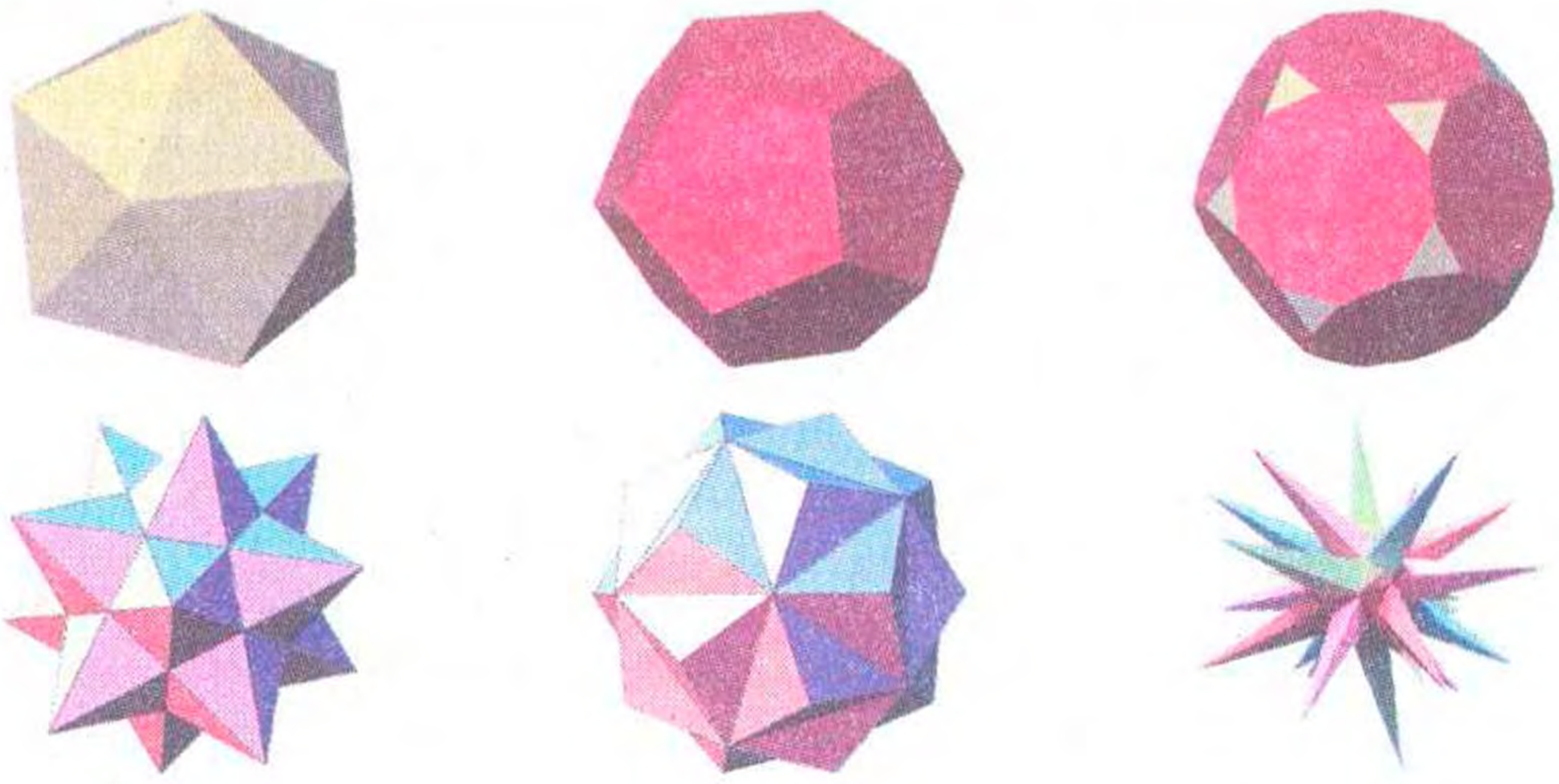


Рис. 26.1

У 5 класі ви ознайомилися з одним із видів многогранника — **прямокутним паралелепіпедом** і його окремим видом — **кубом.** На рисунку 26.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямокутний паралелепіпед є окремим видом **призми.**

Многогранник, зображений на рисунку 26.3, є **шестикутною призмою.** Дві його грані $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — рівні шестикутники, які лежать у паралельних площинах. Їх називають **основами призми.** Решта шість граней — це паралелограми. Їх називають **бічними гранями призми.**

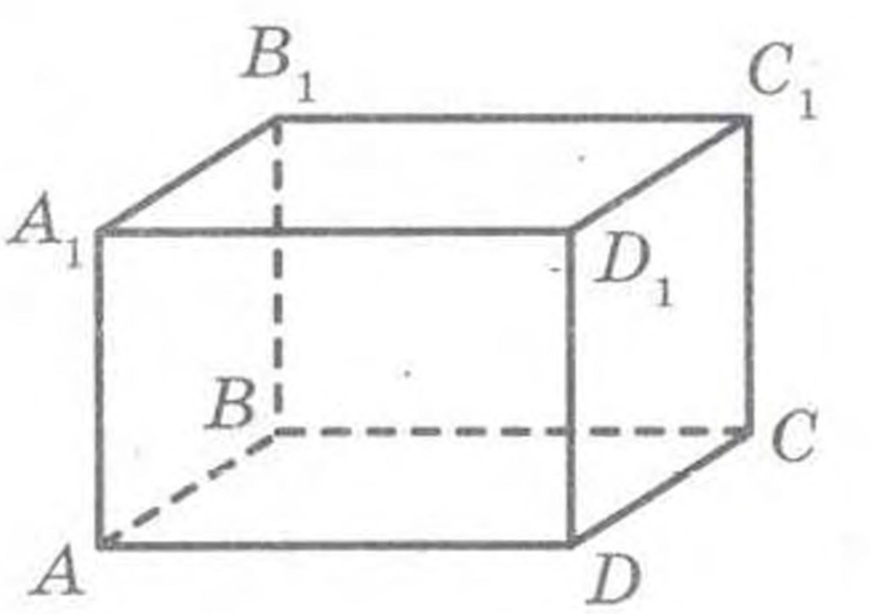


Рис. 26.2

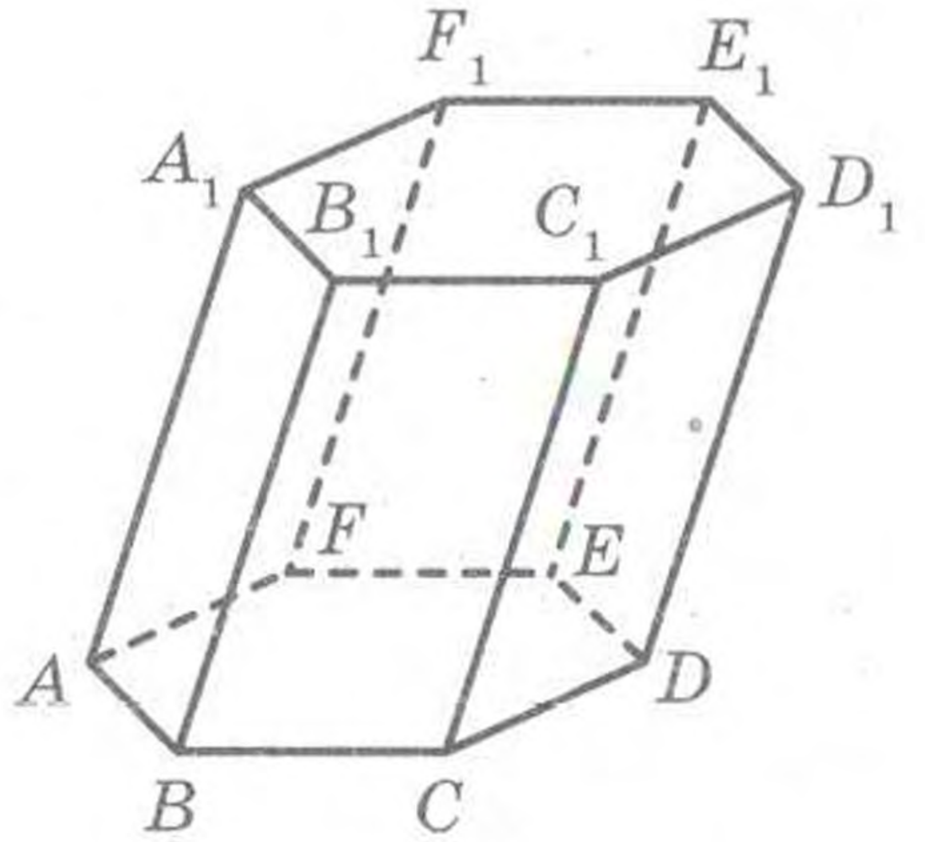


Рис. 26.3

Ребра призми, які належать основам, називають **ребрами основ призми,** а решту ребер — **бічними ребрами призми.** Усі бічні ребра призми паралельні й рівні.

Аналогічно можна говорити про n-кутну призму.

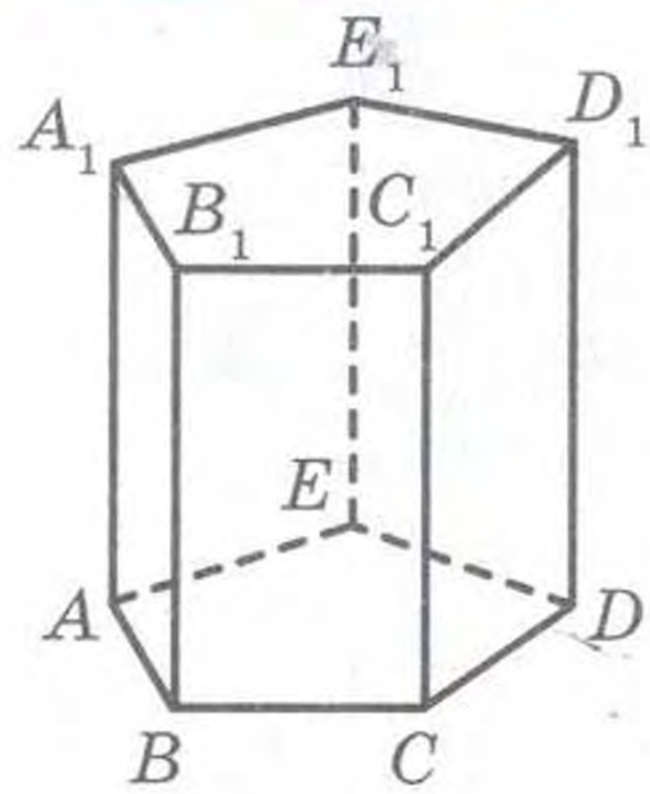


Рис 26.4

Якщо бічні ребра призми перпендикулярні до площини основи, то призму називають **прямою.** На рисунку 26.4 зображено пряму п'ятикутну призму. Бічні грані прямої призми є прямокутниками.

Прямокутний паралелепіпед — це окремий вид прямої призми.

Площа бічної поверхні призми — це сума площ усіх її бічних граней.

Теорема 26.1. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на довжину бічного ребра.***

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сторони основи прямої призми, h — довжина бічного ребра, $P_{осн}$ — периметр основи, $S_{бічн}$ — площа бічної поверхні. Оскільки бічні грані прямої призми — прямокутники, то:

$$S_{бічн} = a_1h + a_2h + \ldots + a_nh = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, h = P_{осн}\, h. \ \blacktriangle$$

Площа поверхні призми — це сума площ усіх її граней.

Позначивши площу основи $S_{осн}$, можна записати очевидну формулу для знаходження площі S поверхні призми:

$$S = S_{бічн} + 2S_{осн}.$$

Кожне геометричне тіло має певний об'єм. За одиницю об'єму приймають об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини.

Об'єм V прямої призми обчислюють за формулою

$$\boxed{V = S_{осн} h,}$$

де $S_{осн}$ — площа основи призми, h — довжина бічного ребра.

Цю формулу буде доведено в курсі стереометрії.

Рис 26.5

На рисунку 26.5 зображено многогранник, одна грань якого — многокутник, а решта — трикутники, які мають спільну вершину. Такий многогранник називають **пірамідою.** Цю спільну вершину називають **вершиною піраміди.** Грань, яка не містить вершину піраміди, називають **основою піраміди,** решту граней — **бічними гранями піраміди.**

Ребра, які належать основі, називають **ребрами основи піраміди**, решту ребер — **бічними ребрами піраміди.**

На рисунку 26.6 зображено трикутну піраміду $SABC$ і чотирикутну піраміду $SABCD$.

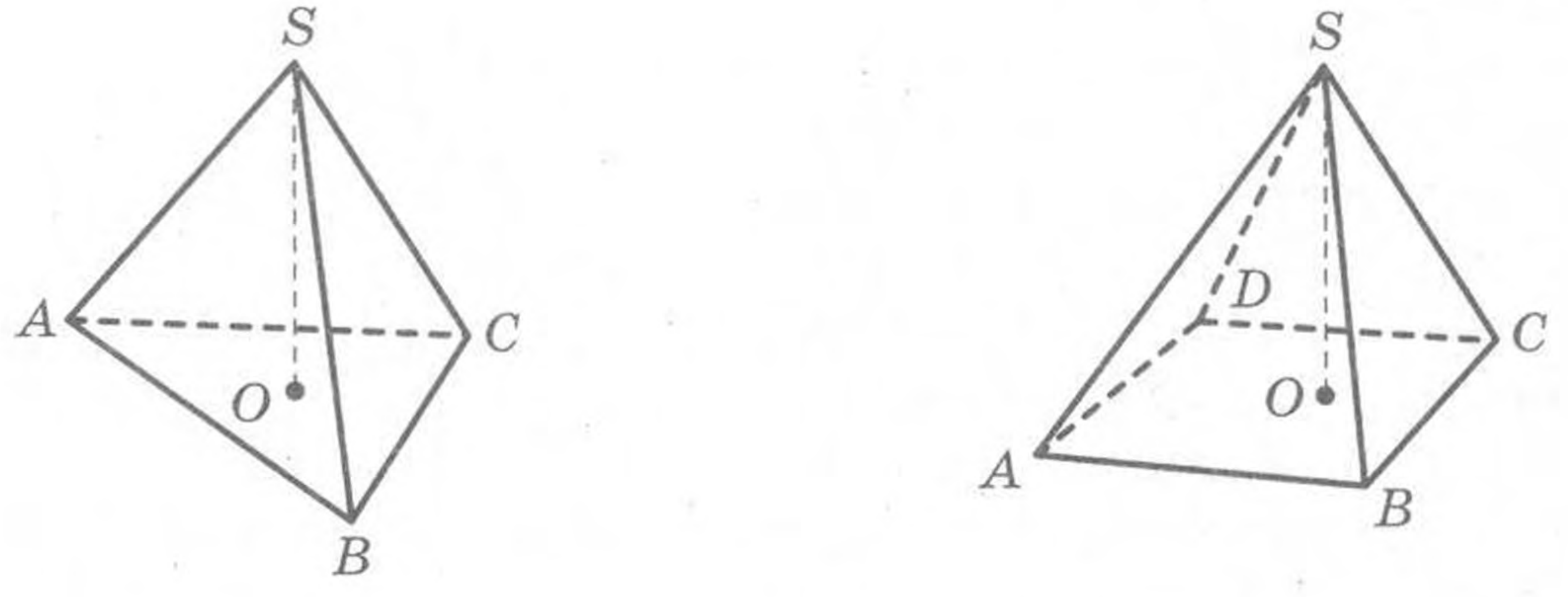


Рис 26.6

Площа поверхні піраміди — це сума площ усіх її граней.

Перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи, називають **висотою** піраміди. На рисунку 26.6 відрізок SO — висота піраміди.

Об'єм V піраміди обчислюють за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} h,$$

де $S_{осн}$ — площа основи піраміди, h — довжина висоти піраміди.

Цю формулу буде доведено в курсі стереометрії.

Зв'язок між окремими видами многогранників ілюструє схема, зображена на рисунку 26.7.

Рис 26.7

2) вершину піраміди;
3) бічні грані піраміди;
4) бічні ребра піраміди;
5) ребра основи піраміди.

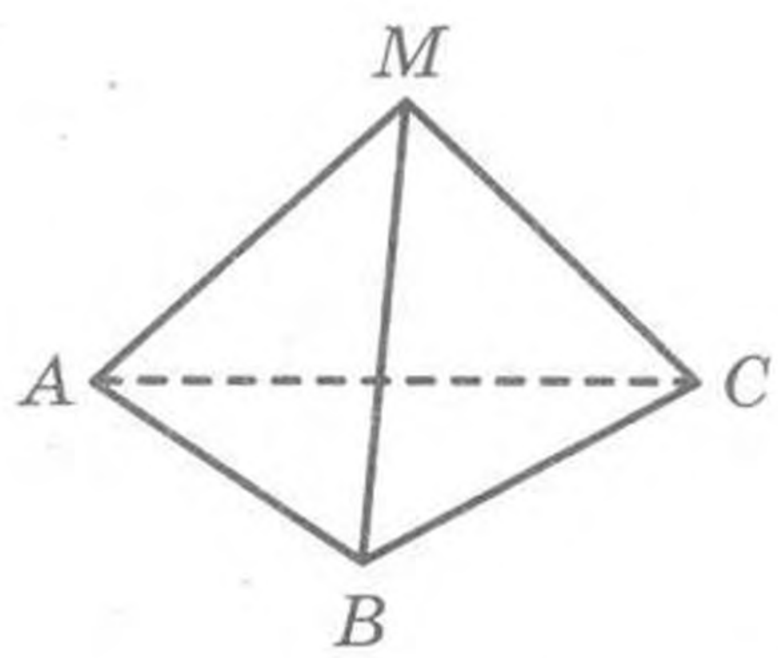


Рис. 26.10

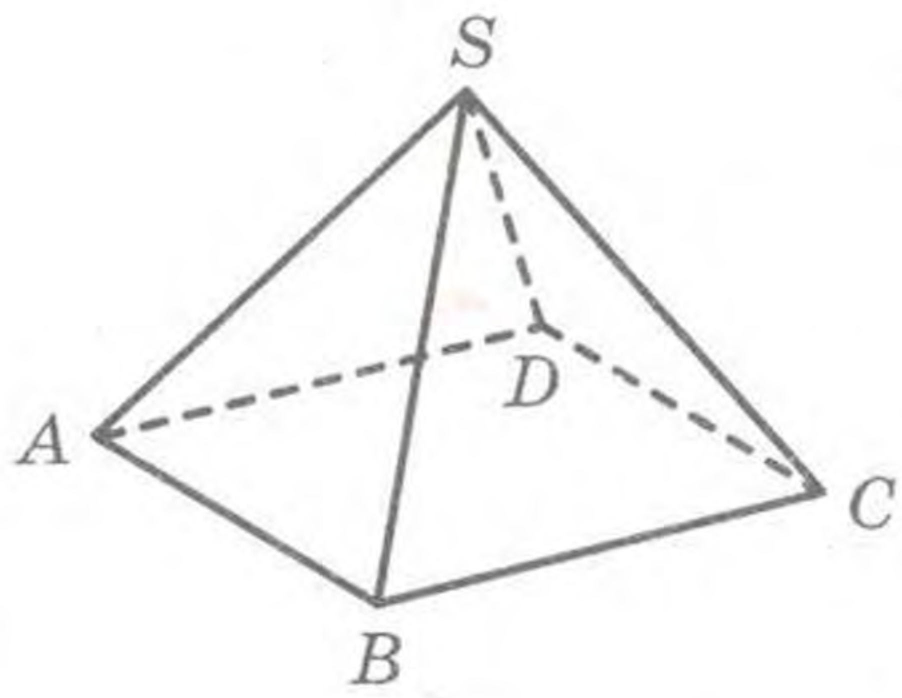


Рис. 26.11

26.5.° Знайдіть площу поверхні і об'єм куба з ребром 3 см.

26.6.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні і об'єм прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 26.8), якщо $AB = 3$ см, $BC = 2$ см, $AA_1 = 5$ см.

26.7.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні і об'єм прямої трикутної призми, основою якої є правильний трикутник зі стороною 6 см, а бічне ребро дорівнює 4 см.

26.8.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні і об'єм прямої чотирикутної призми, основою якої є квадрат зі стороною 7 см, а бічне ребро дорівнює 6 см.

26.9.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні і об'єм прямої призми, зображеної на рисунку 26.12 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

26.10.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні і об'єм прямої призми, зображеної на рисунку 26.13 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

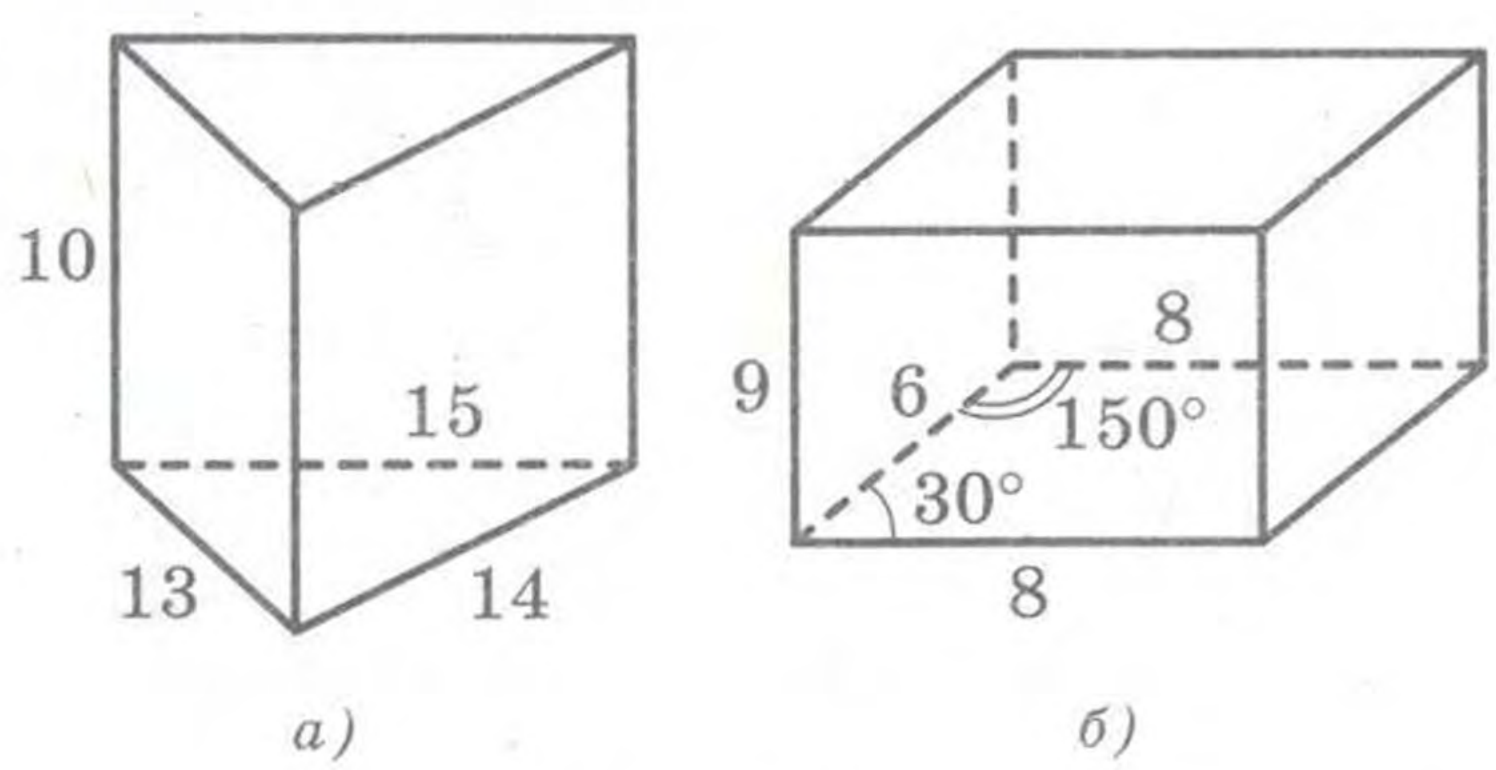


Рис. 26.12

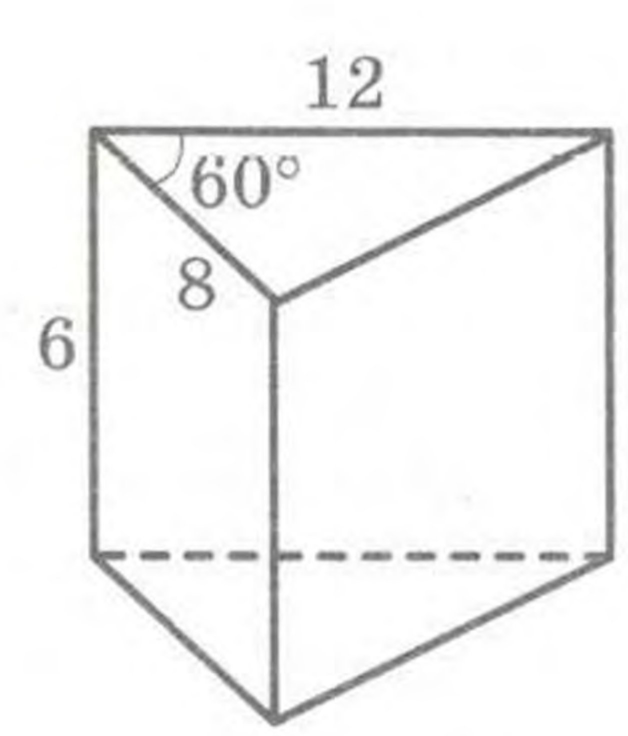


Рис. 26.13

26.11.° Усі грані трикутної піраміди — правильні трикутники зі стороною a. Знайдіть площу поверхні піраміди.

26.12.° Основа піраміди є квадратом зі стороною 6 см, а кожна бічна грань — правильним трикутником. Знайдіть площу бічної поверхні і площу поверхні піраміди.

26.13.° Обчисліть об'єм піраміди $MABC$ (рис. 26.14), основа якої — трикутник ABC, $BC = 4,8$ см, AK — висота трикутника ABC, $AK = 3,5$ см, MO — висота піраміди, $MO = 4,5$ см.

26.14.° Обчисліть об'єм піраміди $MABCD$ (рис. 26.15), основа якої — квадрат $ABCD$ зі стороною 6 см, ME — висота піраміди, $ME = 7,2$ см.

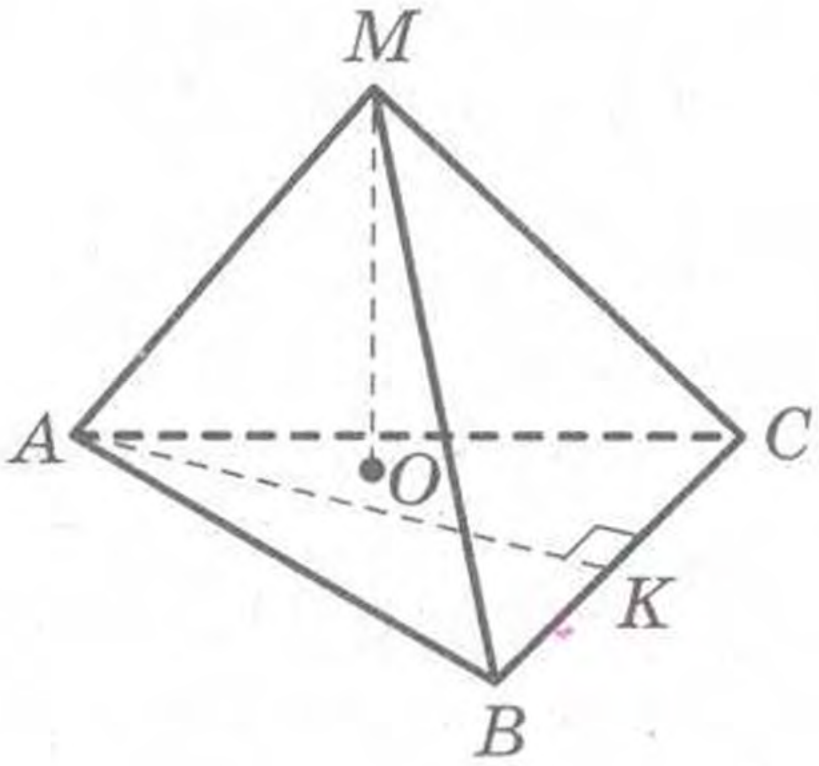


Рис. 26.14

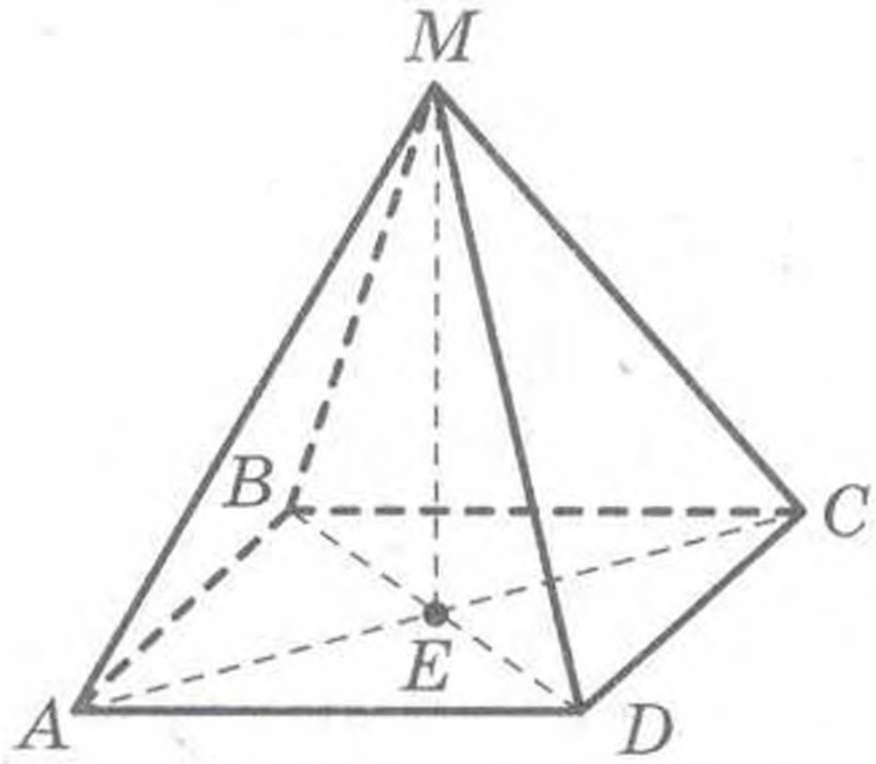


Рис. 26.15

26.15.° Обчисліть об'єм піраміди $AMNKP$ (рис. 26.16), основа якої — прямокутник $MNKP$, $MN = 1,2$ см, $NK = 2,6$ см, AD — висота піраміди, $AD = 2,5$ см.

26.16.• Основа прямої призми — прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює 15 см, а гіпотенуза — 25 см. Знайдіть площу поверхні і об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 9 см.

26.17.• Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами 4 см і 16 см та діагоналлю $2\sqrt{41}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 17 см.

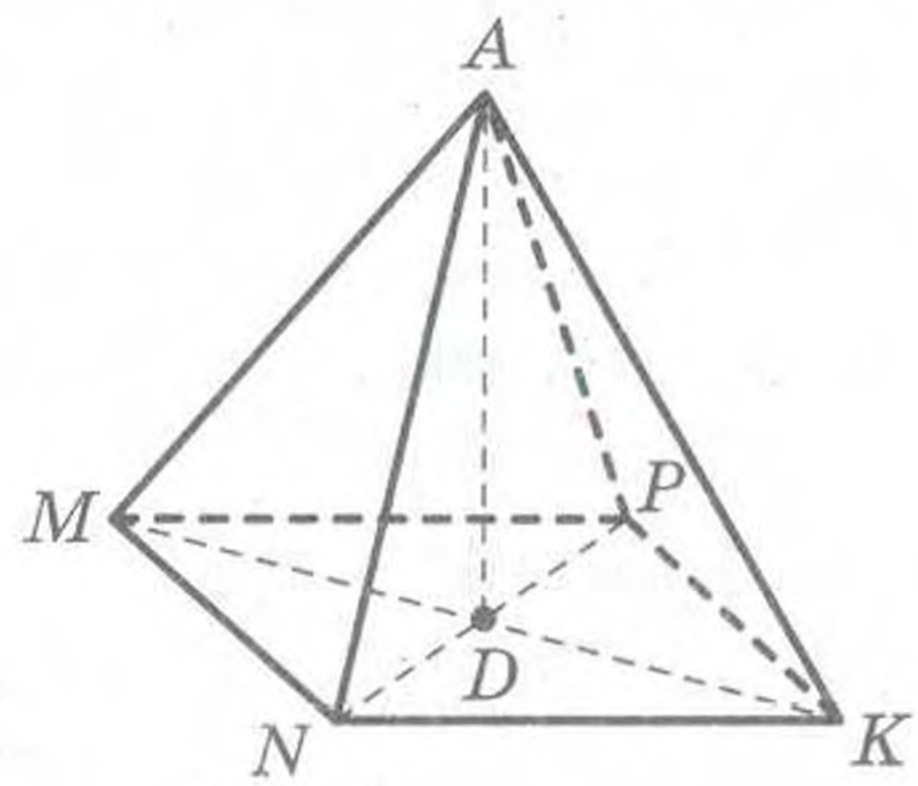


Рис. 26.16

26.18.• Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 24 см, а проведена до неї висота — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні і об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 7 см.

26.19.[•] Знайдіть площу поверхні і об'єм куба, якщо діагональ його грані дорівнює d.

26.20.[•] Класна кімната має форму прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 8,5 м, 6 м і 3,6 м. Чи можна у цій кімнаті розмістити на урок 30 учнів, якщо відповідно до санітарних норм на одного учня має припадати 6 м^3 повітря?

26.21.[•] Поперечний переріз чавунної труби має форму квадрата. Зовнішня ширина труби дорівнює 30 см, а товщина стінок — 5 см. Знайдіть масу погонного метра труби, якщо густина чавуну становить $7{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

26.22.[•] Поперечний переріз канави має форму рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 1 м і 0,8 м, а висота — 0,6 м. Скільки потрібно робітників, щоб за 4 год викопати таку канаву завдовжки 15 м, якщо за годину один робітник викопує 0,75 м^3 ґрунту?

26.23.[•] Відливок міді завдовжки 50 см має форму прямої призми, основою якої є рівнобічна трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 6 см і 14 см, а бічна сторона — 8,5 см. Установіть, чи є всередині відливка порожнини чи він є суцільним, якщо маса відливка дорівнює 32 кг, а густина міді — $9{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

26.24.[•] Знайдіть площу бічної поверхні піраміди $SABC$, якщо $SA = SB = SC = 8$ см, $\angle ASB = \angle ASC = \angle CSB = 45°$.

26.25.[•] Знайдіть площу бічної поверхні піраміди $SABCD$, якщо $SA = SB = SC = SD = 6$ см, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD = 30°$.

26.26.[•] Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм піраміди.

26.27.[•] Основою піраміди є ромб, сторона якого дорівнює 10 см, а одна з діагоналей — 16 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 11 см.

26.28.[•] Основою піраміди є трикутник зі сторонами 17 см, 17 см і 16 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 20 см.

26.29.[••] Знайдіть об'єм прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо $A_1B = d$, $\angle ABA_1 = \beta$, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$.

26.30.[••] Знайдіть площу бічної поверхні і об'єм прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо $AC = m$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle CAC_1 = \beta$.

26.31.•• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб, $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ACA_1 = \beta$. Знайдіть площу бічної поверхні і об'єм призми.

26.32.•• Знайдіть об'єм трикутної піраміди, бічні грані якої — рівнобедрені прямокутні трикутники з катетом a.

27. Циліндр. Конус. Куля

У повсякденному житті ми часто натрапляємо на предмети, які мають форму **циліндра**: консервна банка (рис. 27.1), хокейна шайба (рис. 27.2), колони будівлі (рис. 27.3), бочка (рис. 27.4).

Рис. 27.1

Рис. 27.2

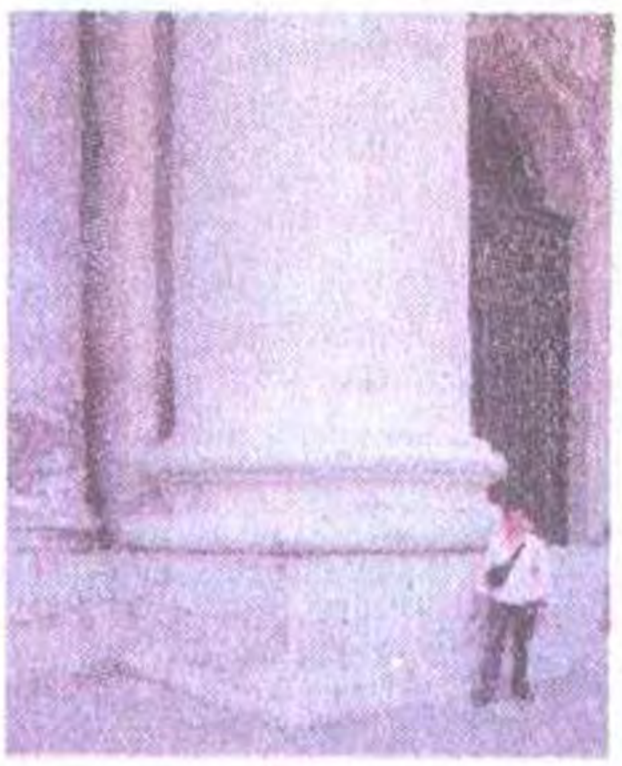


Рис. 27.3

Рис. 27.4

Циліндр можна уявити як тіло, утворене в результаті обертання прямокутника $ABCD$ навколо однієї з його сторін, наприклад сторони AB (рис. 27.5). Пряму AB називають **віссю циліндра**.

Сторони BC і AD, обертаючись, утворюють рівні круги, які називають **основами циліндра**. При обертанні сторони CD утворюється **циліндрична поверхня**, яку називають **бічною поверхнею циліндра**.

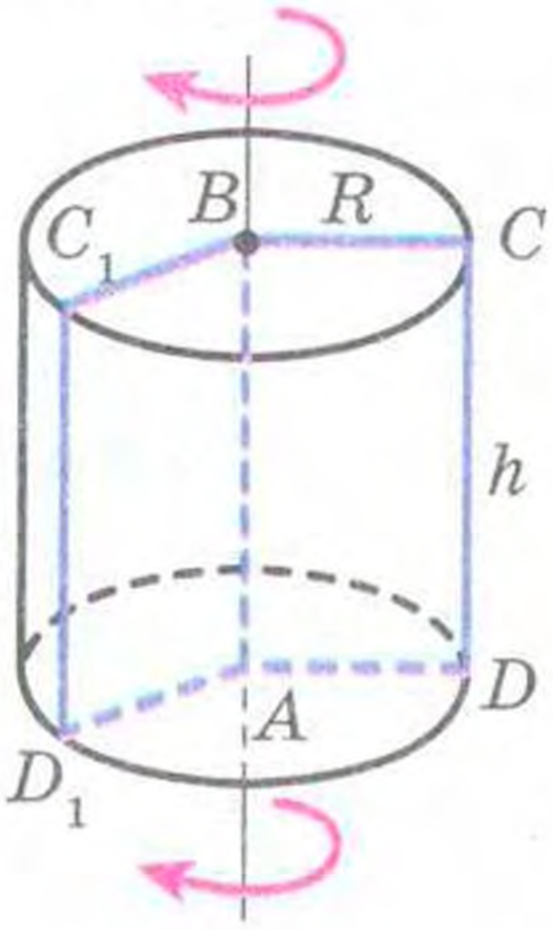


Рис. 27.5

Нехай при обертанні прямокутника відрізок CD зайняв положення C_1D_1 (рис. 27.5). Говорять, що відрізок C_1D_1 — образ відрізка CD. Всі образи відрізка CD називають **твірними циліндра**. Усі твірні циліндра рівні й паралельні. До того ж кожна твірна перпендикулярна до площин основ циліндра.

Якщо бічну поверхню циліндра розрізати по одній з його твірних, а потім розгорнути її на площині, то отримаємо прямокутник. Одна з його сторін дорівнює твірній, а довжина другої сторони дорівнює довжині кола, яке обмежує основу циліндра (рис. 27.6). Отриманий прямокутник називають **розгорткою бічної поверхні циліндра**.

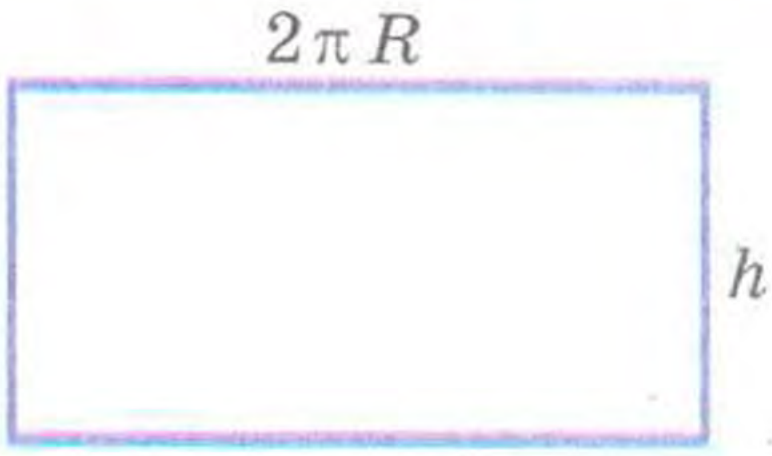


Рис. 27.6

Площа $S_{\text{бічн}}$ бічної поверхні циліндра дорівнює площі її розгортки:

$$\boxed{S_{\text{бічн}} = 2\pi Rh,}$$

де R — радіус основи циліндра, h — довжина його твірної.

Площа S поверхні циліндра дорівнює сумі площ бічної поверхні і площ його основ:

$$\boxed{S = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}},}$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи циліндра.

Об'єм V циліндра обчислюють за формулою

$$\boxed{V = \pi R^2 h,}$$

де R — радіус основи циліндра, h — довжина його твірної.

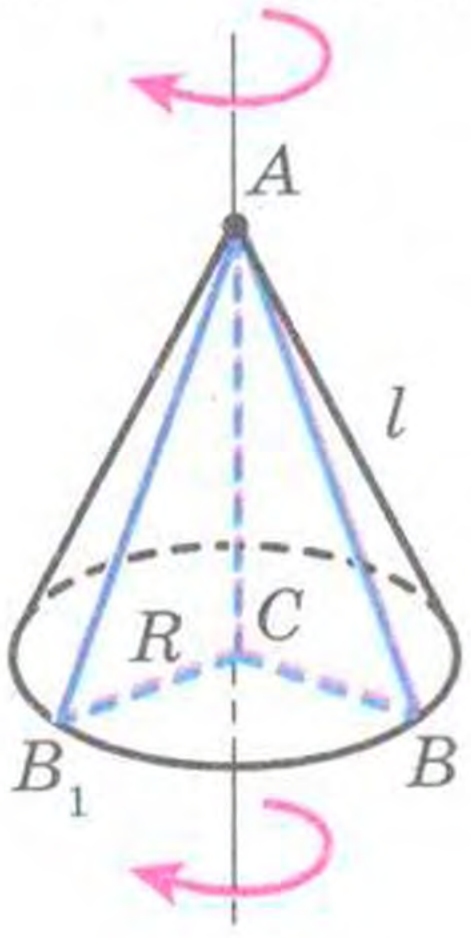


Рис. 27.7

Конус можна уявити як тіло, утворене в результаті обертання прямокутного трикутника ABC навколо одного з його катетів, наприклад катета AC (рис. 27.7).

Катет BC, обертаючись, утворює круг, який називають **основою конуса**. При обертанні гіпотенузи AB утворюється **бічна поверхня конуса**.

Нехай при обертанні трикутника гіпотенуза AB зайняла положення AB_1 (рис. 27.7). Говорять, що AB_1 — образ відрізка AB. Усі образи відрізка AB називають **твірними конуса**. Усі твірні конуса рівні.

Пряму AC називають **віссю конуса**, відрізок AC — **висотою конуса**, точку A — **вершиною конуса**. Висота конуса перпендикулярна до площини його основи.

Якщо бічну поверхню конуса розрізати по одній з його твірних, а потім розгорнути її на площині, то отримаємо сектор. Радіус цього сектора дорівнює довжині l твірної конуса, а довжина дуги, яка обмежує сектор, — довжині кола, яке обмежує основу конуса (рис. 27.8).

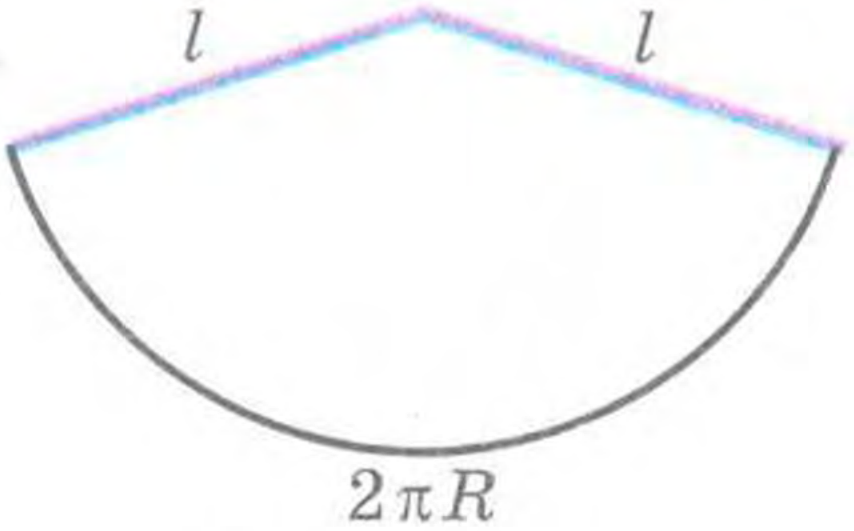


Рис. 27.8

Отриманий сектор називають **розгорткою бічної поверхні конуса**.

Площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн}}$ дорівнює площі її розгортки:

$$S_{\text{бічн}} = \pi R l,$$

де R — радіус основи конуса, l — довжина його твірної.

Площа S поверхні конуса дорівнює сумі площі бічної поверхні і площі його основи:

$$S = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}},$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи конуса.

Об'єм V конуса обчислюють за формулою

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

де R — радіус основи конуса, h — довжина його висоти.

Усі точки простору, віддалені від даної точки на задану відстань R, утворюють фігуру, яку називають **сферою** (рис. 27.9). Дану точку називають **центром сфери**, а число R — **радіусом сфери**. Будь-який відрізок, який з'єднує центр сфери з точкою сфери, також називають радіусом сфери. На рисунку 27.9 точка O — центр сфери, R — радіус.

Тіло, яке є частиною простору, обмеженою сферою, разом зі сферою, називають **кулею**. Сферу, яка обмежує кулю, називають **поверхнею кулі**. Центр і радіус сфери називають також центром і радіусом кулі.

Кулю можна уявити як тіло, отримане в результаті обертання круга навколо одного з діаметрів (рис. 27.10).

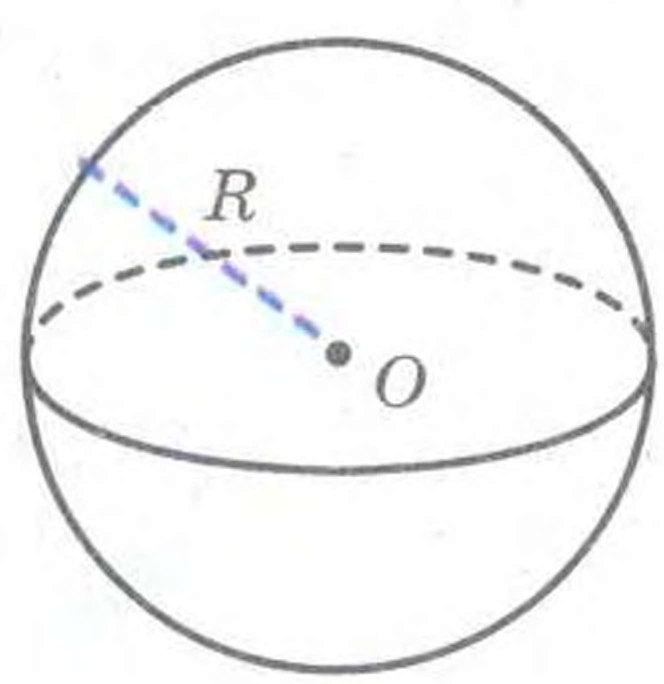


Рис. 27.9

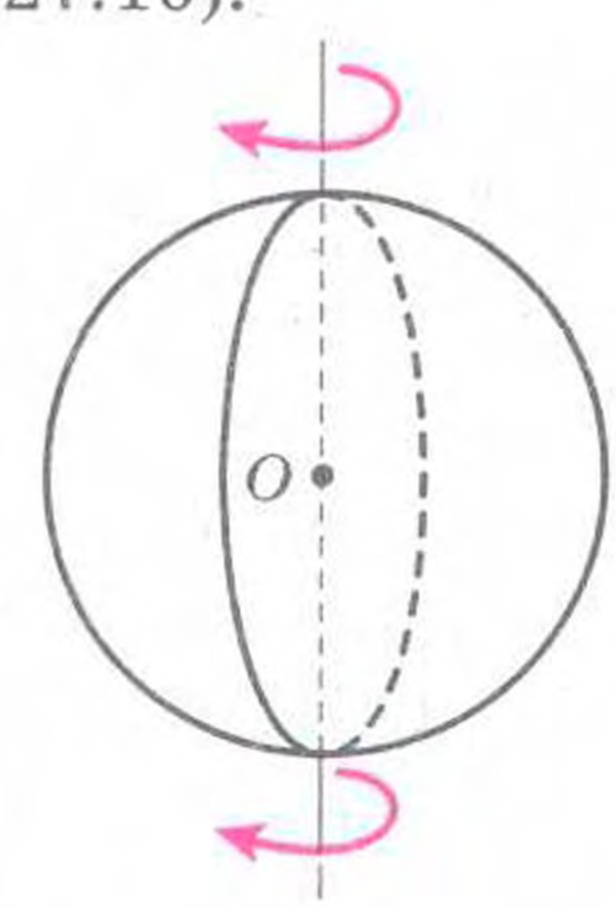


Рис. 27.10

Площу S поверхні кулі, тобто площу сфери, обчислюють за формулою

$$\boxed{S = 4\pi R^2,}$$

де R — радіус кулі.

Об'єм V кулі обчислюють за формулою

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3,}$$

де R — радіус кулі.

ВПРАВИ

27.1.° На рисунку 27.11 зображено циліндр. Укажіть:

1) вісь циліндра;
2) твірну циліндра;
3) радіус нижньої основи циліндра;
4) радіус верхньої основи циліндра.

27.2.° Радіус основи циліндра дорівнює 6 см, а його твірна — 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні і об'єм циліндра.

27.3.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні і об'єм циліндра, розгортку якого зображено на рисунку 27.12 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

27.4.° На рисунку 27.13 зображено конус. Укажіть:

1) вершину конуса;
2) центр його основи;
3) твірну конуса;
4) радіус основи конуса;
5) висоту конуса.

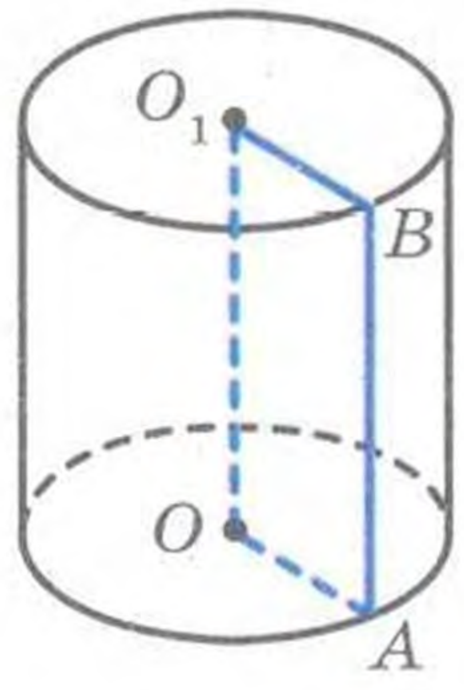


Рис. 27.11

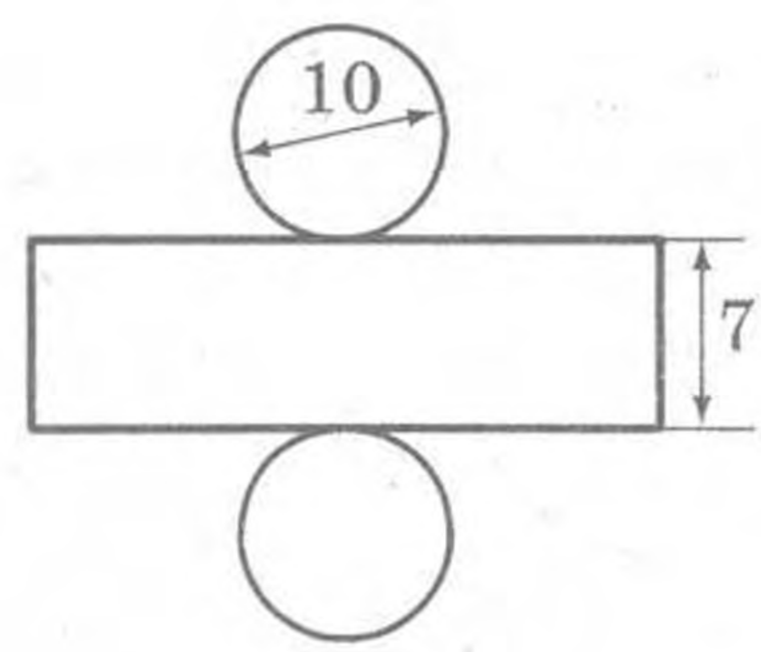


Рис. 27.12

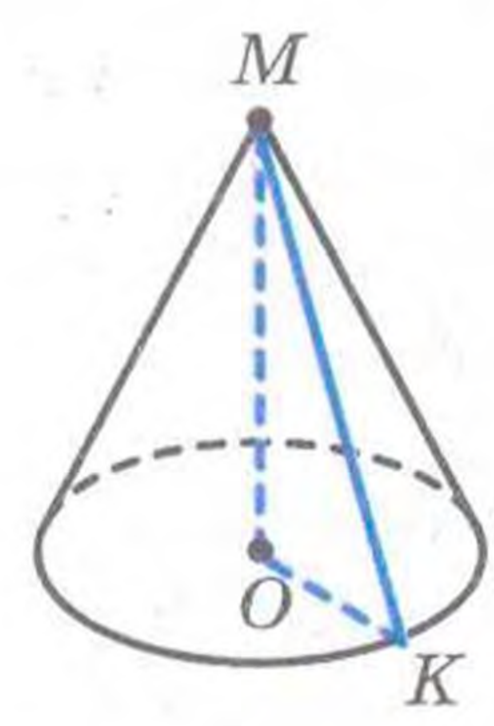


Рис. 27.13

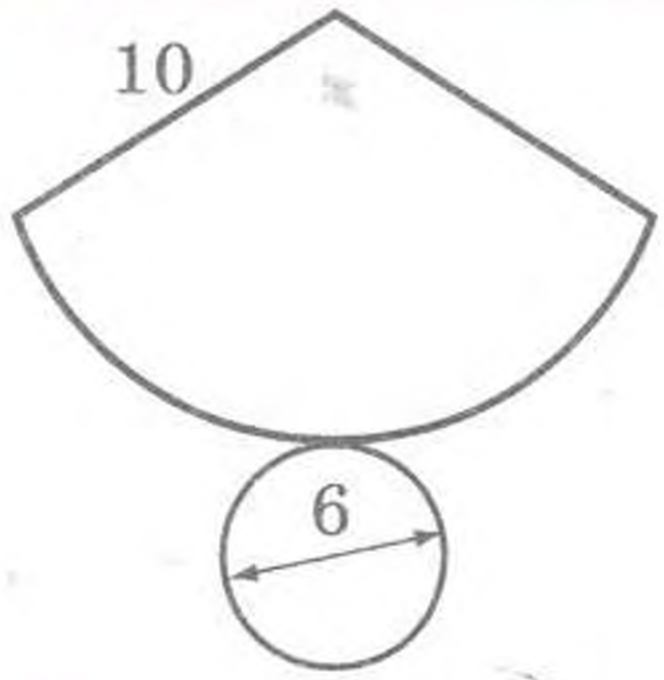


Рис. 27.14

27.5.° Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а його твірна — 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні і площу поверхні конуса.

27.6.° Знайдіть площу поверхні конуса, розгортку якого зображено на рисунку 27.14 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

27.7.° Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 12 см, а радіус основи — 3 см.

27.8.° Знайдіть площу поверхні і об'єм кулі, радіус якої дорівнює 3 см.

27.9.• Прямокутник, сторони якого дорівнюють 12 см і 5 см, обертається навколо більшої сторони. Знайдіть площу поверхні і об'єм циліндра, що утворився при цьому.

27.10.• Твірна циліндра дорівнює 6 см, а об'єм — 150π см^3. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

27.11.• Маса 10 м мідного дроту кругового перерізу дорівнює 106,8 г. Знайдіть діаметр дроту, якщо густина міді становить $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

27.12.• Визначте тиск цегляної колони циліндричної форми заввишки 3 м на фундамент, якщо діаметр колони дорівнює 1,2 м, а маса 1 м^3 цегли дорівнює 1,8 т.

27.13.• Діаметр основи конуса дорівнює 16 см, а його твірна — 17 см. Знайдіть площу поверхні і об'єм конуса.

27.14.• Прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см обертається навколо меншого катета. Знайдіть площу бічної поверхні і об'єм конуса, що утворився при цьому.

27.15.• Зерно зсипали у купу конічної форми заввишки 1,2 м. Яка маса цієї купи, якщо радіус її основи дорівнює 2 м, а маса 1 м^3 зерна становить 750 кг?

27.16.• Рідину з повної посудини конічної форми, висота якої дорівнює 24 см, а радіус основи — 6 см, перелили у посудину циліндричної форми, радіус основи якої дорівнює 8 см. Визначте висоту рівня води в посудині циліндричної форми.

27.17.• Стіжок сіна має форму циліндра з конічним верхом (рис. 27.15). Радіус його основи дорівнює 1,5 м, висота — 3 м, причому циліндрична частина стіжка має висоту 2,4 м. Знайдіть масу стіжка, якщо маса 1 м^3 сіна становить 30 кг.

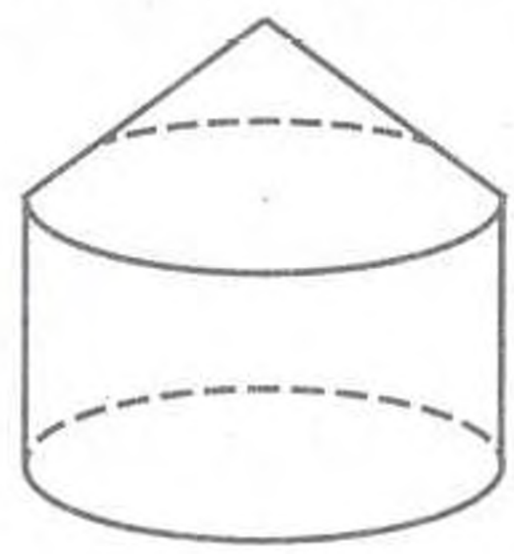


Рис. 27.15

27.18.° Як зміняться площа поверхні і об'єм кулі, якщо її радіус збільшити у 2 рази?

27.19.° Радіус однієї кулі дорівнює 3 см, а другої — 4 см. Знайдіть відношення площ поверхонь і відношення об'ємів даних куль.

27.20.° Зовнішній діаметр залізної порожнистої кулі дорівнює 12 см, а внутрішній діаметр — 10 см. Знайдіть масу кулі, якщо густина заліза дорівнює $7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

27.21.•• Відрізок AB — діаметр основи конуса (рис. 27.16), $\angle AMB = 90°$, MO — висота конуса, $MO = h$. Знайдіть площу бічної поверхні і об'єм конуса.

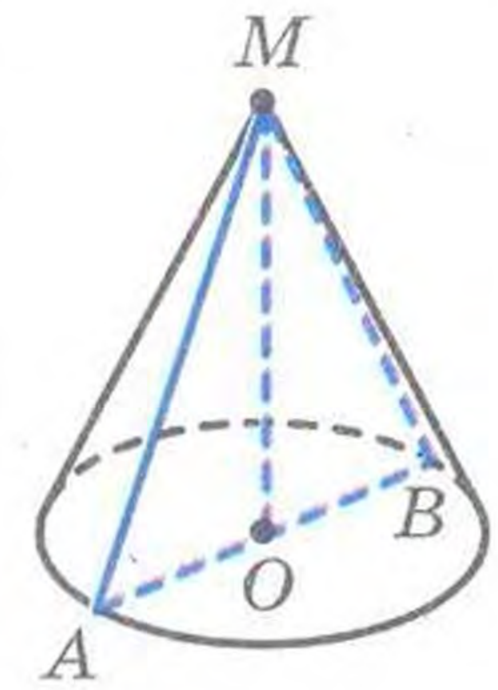


Рис. 27.16

27.22.•• Відрізок AB — діаметр основи конуса (рис. 27.16), $\angle AMB = 60°$, точка O — центр основи конуса, $OA = R$. Знайдіть площу бічної поверхні і об'єм конуса.

27.23.•• Сторони прямокутника дорівнюють a і b, $a > b$. Він обертається спочатку навколо сторони a, потім — навколо сторони b. Порівняйте площі бічних поверхонь і об'єми циліндрів, які при цьому утворилися.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

1.6. 3 : 5. **1.21.** 126 см. **1.23.** 60°. **1.24.** 45°. **1.25.** 60° і 120°. **1.26.** $2a$. **1.40.** *Вказівка*. Доведіть, що $\triangle ABG = \triangle DBC$. **1.42.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що середини діагоналей і середини двох протилежних сторін чотирикутника є вершинами паралелограма, сторони якого дорівнюють половинам двох інших сторін чотирикутника. **1.43.** *Вказівка*. Нехай точка M — середина відрізка AB. Тоді $OM = \frac{1}{2}AB$, а $CM < \frac{1}{2}(CB + CA)$. **1.44.** *Вказівка*. Побудуйте паралелограми $ACBD$ і $BAKC$. **1.47.** *Вказівка*. Чотирикутники $AKLD$ і $KBCL$ — вписані. Нехай F — точка перетину CK і AD. Тоді $\angle CKD = \angle KFD + \angle KDF$. **1.48.** *Вказівка*. Скориставшись тим, що чотирикутник $AKHL$ — вписаний, доведіть, що $\angle BKL + \angle BCL = 180°$. **1.49.** *Вказівка*. Нехай O — центр описаного кола трикутника BJC. Доведіть, що чотирикутник $ABOC$ — вписаний. **1.51.** 60° або 120°. **1.52.** *Вказівка*. Із подібності трикутників ABD і ACB випливає, що $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, звідки з урахуванням $AB = DC$ можна записати $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. **1.53.** *Вказівка*. Доведіть, що $EF \parallel AC$. **1.54.** $3\sqrt{5}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що CL — бісектриса кута HCM. **1.55.** *Вказівка*. $AC > AB - BC = 5$ см. Нехай $AD = 3x$, тоді $CD = 2x$, де $x > 1$. Можна записати $BD^2 = 150 - 6x^2 < 144$. **1.56.** *Вказівка*. $\triangle CBO \sim \triangle CAB$, звідси $CO \cdot CA = CB^2$. Крім того, $\triangle CBO \sim \triangle DBC$, і можна записати $BO \cdot BD = CB^2$. **1.58.** *Вказівка*. І спосіб. Нехай E — точка перетину прямих DA і CB (див. рисунок). Тоді $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}$, крім того, $EB^2 = EA \cdot ED$. З двох отриманих рівностей випливає, що $ED^2 = EB \cdot EC$. II спосіб. Розглянемо трикутники ABD і CDB. Маємо: $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle BAD = \angle CBD$. Звідси $\angle BDA = \angle BCD$. **1.59.** *Вказівка*. Доведіть, що чотирикутник $MBNK$ — вписаний, а потім скористайтеся властивістю, оберненою до властивості кута між дотичною і хордою. **1.60.** $2R\left(\sqrt{5} - 2\right)$.

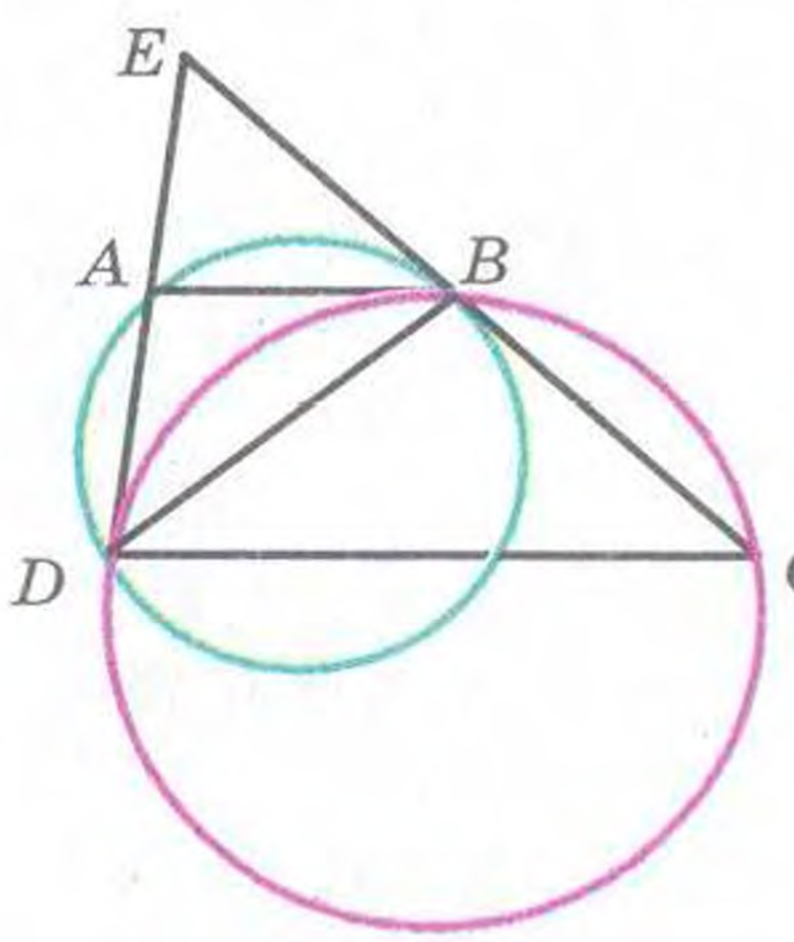


Рис. до задачі 1.58

Вказівка. Скористайтеся теоремою Птолемея. **1.61.** $\frac{bd}{b+c}$, $\frac{cd}{b+c}$. *Вказівка.* Трикутники AFC і AFB рівновеликі. **1.63.** *Вказівка.* Нехай F — точка перетину прямої BE з основою AD. Тоді площа кожного із зазначених трикутників дорівнює половині площі паралелограма $BCDF$. **1.64.** *Вказівка.* Проведіть пряму MF паралельно DE (див. рисунок). Доведіть, що $\Delta\ ABM = \Delta\ MFC$. **1.65.** *Вказівка.* Доведіть, що чотирикутники $BCDM$ і $ABCM$ — паралелограми. **1.66.** *Вказівка.* Слід побудувати коло, яке проходить через точки C і D і дотикається до хорди AB. **1.67.** *Вказівка.* Нехай прямі MQ і PN перетинають пряму AC у точках F і F_1 відповідно. Застосувавши теорему Менелая до трикутника ACD і прямої MQ, а також до трикутника ACB і прямої PN, доведіть, що точки F і F_1 збігаються. **1.68.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що точка B — центр зовнівписаного кола трикутника AKC. **2.12.** 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ або $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6; 5) $-\frac{4}{3}$; 6) $\frac{12}{5}$. **2.13.** 1) $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $-\frac{8}{15}$. **2.16.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-2{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$; 4) $\frac{5}{4}$. **2.17.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **2.24.** $-\frac{1}{2}$. **2.25.** 120°. **2.26.** У гострокутному: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; у тупокутному: $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.27.** 45°. **2.28.** 120°. **2.29.** 60° або 120°. **2.30.** 15°, або 75°, або 105°, або 165°. **2.31.** 1. **2.32.** 1. **3.3.** 120°. **3.4.** 45°. **3.10.** $2\sqrt{7}$ см. **3.11.** $\sqrt{10}$ см. **3.12.** 13 см. **3.13.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **3.14.** $3\sqrt{89}$ см. **3.15.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **3.16.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **3.17.** 15 см, 24 см. **3.18.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **3.19.** 3 см, 5 см. **3.20.** 10 см, 6 см, 14 см. **3.21.** 6 см або 10 см. **3.22.** 75 см. **3.26.** 14 см. **3.27.** 34 см. **3.28.** 7 см, 9 см. **3.29.** 20 см, 30 см. **3.30.** 11 см. **3.31.** 22 см. **3.32.** $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. **3.33.** 13 см. **3.34.** $\sqrt{79}$ см. **3.36.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **3.37.** Ні. **3.39.** 6 см. **3.42.** *Вказівка.* Скориставшись ключовою

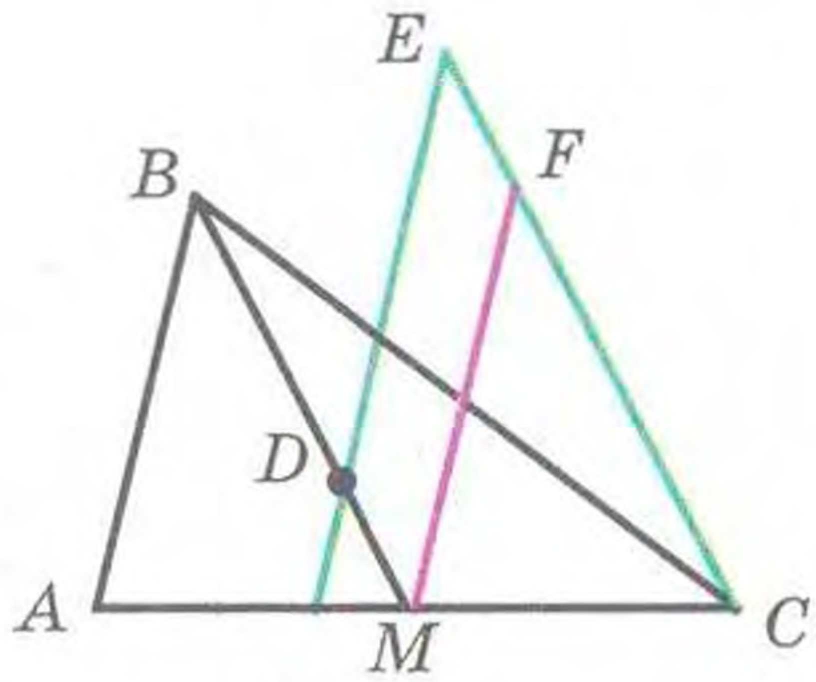


Рис. до задачі 1.64

задачею п. 3, доведіть, що $\frac{4}{9}m_a^2+\frac{4}{9}m_b^2=c^2$. **3.44.** *Вказівка.* Нехай AB — діаметр одного кола, точка X — точка другого кола. Якщо точка X не належить прямій AB, то розгляньте паралелограм, сторони якого — відрізки XA і XB. **3.45.** *Вказівка.* Середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма. **3.46.** $\sqrt{m^2+n^2+mn}$, $\sqrt{m^2+n^2-mn}$. **3.47.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$. **3.48.** 5 см. *Вказівка.* Доведіть, що в даній трапеції середини діагоналей і основ є вершинами прямокутника. **3.49.** 8 см. *Вказівка.* Проведіть через вершину B пряму, яка паралельна стороні CD, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **3.50.** $\frac{13}{20}$. **3.51.** $120°$. *Вказівка.* Через вершину C проведіть пряму, паралельну діагоналі BD. **3.52.** $\sqrt{a^2+c^2+ac}$ або $\sqrt{a^2+c^2-ac}$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\Delta\, C_1BA_1 \backsim \Delta\, ABC$ з коефіцієнтом подібності, рівним $|\cos B|$. **3.53.** 25 см. *Вказівка.* Використовуючи теорему про бісектрису, покажіть, що $DC : CE = 5 : 1$. Застосуйте теорему косинусів до трикутника ABE. **3.54.** *Вказівка.* Доведіть, що косинус кута між діагоналями чотирикутника дорівнює 0. **3.55.** *Вказівка.* Нехай діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2. Маємо: $b^2=\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}-\frac{d_1d_2}{2}\cos\alpha$, $a^2=\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}+\frac{d_1d_2}{2}\cos\alpha$. Звідси $\cos\alpha=\frac{a^2-b^2}{d_1d_2}$. Скористайтеся тим, що $d_1d_2\leqslant\frac{d_1^2+d_2^2}{2}$. **3.56.** *Вказівка.* На даному діаметрі оберіть точку M_1 таку, що $OM_1 = OM$. Нехай хорда CD паралельна діаметру. Тоді $CM^2 + DM^2 = DM^2 + DM_1^2$. **3.57.** *Вказівка.* Нехай X — довільна точка даного чотирикутника $ABCD$. Тоді один з кутів AXB, BXC, CXD, DXA є не гострим. Нехай, наприклад, $\angle AXB \geqslant 90°$. Припустивши, що $XA \geqslant 5$ і $XB \geqslant 5$, покажіть, що $AB > 7$. **3.59.** $\sqrt{2}$. *Вказівка.* Очевидно, що при $x \leqslant 0$ найменше значення не може бути досягнуто. При $x > 0$ розгляньте трикутник AOB, у якого $\angle O = 90°$, $OA = OB = 1$. Побудуйте промінь OC так, що $\angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 30°$. Нехай M — довільна точка променя OC, відмінна від точки O. Позначимо $OM = x$. Скористайтеся тим, що $MA + MB \geqslant AB$. **3.61.** *Вказівка.* Розгляньте відрізки OA,

OB і OC такі, що $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 60°$. **3.62.** Існують. *Вказівка.* Виберіть точки A, B і C на одній прямій так, щоб $AB = \sqrt{2} - 1$, $AC = CB$. **4.9.** $2\sqrt{6}$ см. **4.10.** 6 см. **4.11.** $\dfrac{a \sin \beta}{\cos(\beta + \gamma) \sin \gamma}$. **4.12.** $\dfrac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. **4.13.** $\dfrac{c \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma \sin \varphi}$. **4.14.** $\dfrac{m \sin \alpha \sin \varphi}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)}$. **4.18.** *Вказівка.* Доведіть, що $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$. **4.19.** 9 см. **4.20.** $\dfrac{25}{3}$ см. **4.21.** $60°$ або $120°$. **4.22.** $\dfrac{b \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma) \cos \dfrac{\alpha - \gamma}{2}}$.

4.23. $\dfrac{a \cos \dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° + \dfrac{3\alpha}{4}\right)}$. **4.24.** $\dfrac{a \sin \alpha}{\sin \beta}$. *Вказівка.* Доведіть, що $CE = DE$.

4.25. $\dfrac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\dfrac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. *Вказівка.* На продовженні медіани AM за точку M позначте точку K таку, що $AM = MK$, та застосуйте теорему синусів до трикутника ACK. **4.26.** $\dfrac{a \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}$. **4.27.** $R \operatorname{tg} \alpha$. **4.28.** *Вказівка.* Виразіть кути AHB, BHC і AHC через кути трикутника ABC. **4.29.** $\dfrac{25}{4}$ см. *Вказівка.* Скориставшись теоремою про бісектрису, знайдіть косинус кута при основі рівнобедреного трикутника. **4.32.** $2\sqrt{\dfrac{34}{15}}$ см. *Вказівка.* Застосувавши теорему косинусів до трикутників MNP і MQP, знайдіть косинус кута PMQ. **4.33.** $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$. *Вказівка.* Якщо M_1 і M_2 — основи перпендикулярів, то навколо чотирикутника MM_1AM_2 можна описати коло. **4.34.** Коло радіуса $\dfrac{a}{\sin \alpha}$ з центром у точці перетину даних прямих. **4.36.** AM — це діаметр. *Вказівка.* Точки A, N, M, K лежать на одному колі. **4.37.** 6 см. *Вказівка.* Покажіть, що $\angle BOC = 150°$. Доведіть, що відрізок OM є діаметром описаного кола трикутника BOC. **4.38.** 6 см або $2\sqrt{3}$ см. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $DC = DJ = DB$. **4.39.** *Вказівка.* Доведіть, що $\sin \angle ACD = \sin \angle ACB$. **4.40.** *Вказівка.* $AE = 2O_1A \cdot \sin 45°$,

$AE = 2O_2A \cdot \sin 45°$. Звідси $AO_1 = AO_2$. **4.41.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Вказівка. Позначте на колі таку точку M, що $\cup DM = \cup DC + \cup AB$ (див. рисунок). Тоді $CM = a$, $\angle DCM = 180° - \alpha$. **4.42.** *Вказівка.* $\dfrac{BM}{\sin\angle BCM} = \dfrac{CM}{\sin\angle CBM} = \dfrac{DN}{\sin\angle DCN} = \dfrac{CN}{\sin\angle CDN}$. Далі скористайтеся тим, що $\sin\angle CBM = \sin\angle ABC = \sin\angle ADC = \sin\angle CDN$. **5.12.** 107°, 73°, 132°, 48°. *Вказівка.* Проведіть через одну з вершин верхньої основи пряму, паралельну бічній стороні трапеції, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **6.2.** 1) 60° або 120°; 2) 90°. **6.3.** 30° або 150°. **6.6.** 12 см. **6.7.** 24 см. **6.8.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **6.9.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см. **6.14.** $\dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **6.15.** $\dfrac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **6.16.** $\dfrac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$.

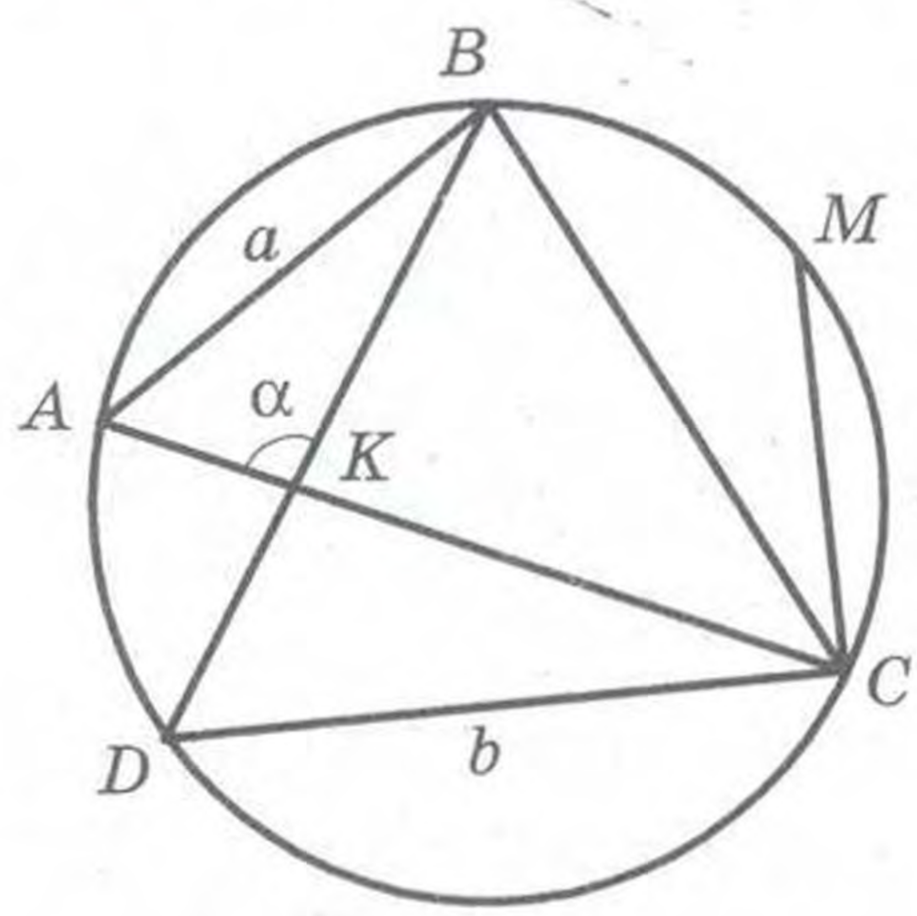


Рис. до задачі 4.41

6.17. $\dfrac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **6.18.** 51 см², 75 см², 84 см². **6.19.** $\frac{24}{7}$ см. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **6.20.** 360 см². *Вказівка.* Проведіть через один з кінців верхньої основи трапеції пряму, яка паралельна бічній стороні трапеції, і знайдіть висоту трикутника, який ця пряма відтинає від трапеції. **6.21.** $12\sqrt{5}$ см². *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $BC \parallel AD$. Проведіть через вершину C пряму, яка паралельна прямій BD і перетинає пряму AD у точці E. Доведіть, що трикутник ACE і дана трапеція рівновеликі. **6.22.** 19,5 см. **6.24.** 13 см, 14 см, 15 см. **6.25.** 36 см². **6.26.** 13 см, 15 см. *Вказівка.* Нехай точки дотику вписаного кола ділять одну з невідомих сторін на відрізки 6 см і x см, а другу — на відрізки 8 см і x см. Виразіть площу трикутника двома способами: за допомогою формули Герона і через радіус вписаного кола. **6.27.** *Вказівка.* Скористайтеся формулою для знаходження радіуса зовнівписаного кола і формулою Герона. **6.28.** *Вказівка.* Виразіть висоти через площу трикутника і відповідні сторони. **6.32.** *Вказівка.* Нехай відрізок AK — бісектриса трикутника ABC. Маємо $S_{ABC} = S_{BAK} + S_{KAC}$. Далі скористайтеся теоремою 6.1 і ключовою задачею 2 п.6. **6.33.** 120°. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.32. **6.34.** 1 см, 2 см, $\sqrt{3}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.32 і теоремою косинусів. **6.35.** 235,2 см^2. *Вказівка*. Скориставшись ключовою задачею 6.32, знайдіть косинус кута між бісектрисою і стороною трикутника. **6.36.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.10. **6.37.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.10. **6.38.** *Вказівка*. Доведіть, що $R+r=\frac{a+b}{2}$, де a і b — катети. **6.39.** *Вказівка*. Маємо: $ah_a = 2S = r(a + b + c)$. Звідси $h_a=r\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$. **6.40.** *Вказівка*. Маємо $S_{MBN} = S_{MBO} + S_{OBN}$, де точка O — центр вписаного кола. Проведемо радіуси в точки дотику і отримаємо $S_{MBN}=\frac{1}{2}(BM+BN)\cdot r \geqslant r\sqrt{BM\cdot BN}\geqslant r\sqrt{2S_{MBN}}$. **6.41.** Ні. *Вказівка*. Нехай r і r_1 — радіуси кіл, вписаних у трикутники ABC і BCM відповідно, і $r = 2r_1$. Покажіть, що з рівності $S_{BCM}=\frac{1}{2}S_{ABC}$ випливає рівність периметрів трикутників ABC і BCM. **6.42.** *Вказівка*. Найменший кут трикутника не перевищує 60°. **6.43.** 7 см. *Вказівка*. Нехай довжини сторін трикутника дорівнюють a, b і c. Тоді $a + 3b + 15c = 2S$, $4a + 5b + 11c = 2S$. Звідси $7(a + b + c) = 2S = (a + b + c)r$. **6.44.** *Вказівка*. $\frac{(a+c)(b+d)}{4}=\frac{ab}{4}+\frac{ad}{4}+\frac{cb}{4}+\frac{cd}{4}\geqslant\frac{1}{2}(S_{ABC}+S_{BAD}+S_{BCD}+S_{CDA})$. **6.45.** *Вказівка*. Скориставшись результатом задачі 6.44, можна записати $S\leqslant\frac{(a+c)(b+d)}{4}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2=1$. **6.46.** *Вказівка*. Навколо кожного з чотирикутників OM_1CM_2, OM_1BM_3, OM_2AM_3 можна описати коло. До цих чотирикутників застосуйте теорему Птолемея. **6.47.** $24\sqrt{3}$. *Вказівка*. Побудуйте відрізки OA, OB і OC так, що $\angle BOC = 90°$, $\angle COA = 120°$, $\angle BOA = 150°$ (див. рисунок). Нехай $OA = x$, $OC = z$, $OB=\frac{y}{\sqrt{3}}$. Покажіть, що $xy+2yz+3zx=4\sqrt{3}S_{ABC}$. **7.10.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **7.11.** $2\sqrt{R^2-r^2}$.

Рис. до задачі 6.47

7.12. $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. **7.15.** 5 сторін. **7.16.** 18 сторін. **7.19.** $\sqrt{3}:2$. **7.22.** $2R^2\sqrt{2}$. **7.23.** $a\sqrt{3}$, $2a$, $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **7.24.** $6(\sqrt{2}-1)$ см. **7.25.** 8 см. **7.26.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2}+1)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **7.27.** $\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$. **7.28.** $\frac{a(2+\sqrt{2})}{2}$. **7.30.** 6. *Вказівка*. Знайдіть кути правильного $2n$-кутника. **7.31.** 168° або 48°. *Вказівка*. Розгляньте два випадки: точка M належить п'ятикутнику і точка M лежить поза ним. **7.32.** Ні (див. рисунок). **7.33.** 1) 30° або 60°; 2) 60°. **7.35.** *Вказівка*. Доведіть, що $AM = BC$, і скористайтеся тим, що $\triangle ABC \backsim \triangle CMB$. **7.36.** 84°. *Вказівка*. Пряма OA_3 містить діагональ A_3A_{18} (див. рисунок). Маємо: $\angle A_1BA_{18} = \frac{1}{2}(\cup A_1A_{18} + \cup A_3A_4)$. **7.37.** Існує. *Вказівка*. Розгляньте правильний 12-кутник $A_1A_2...A_{12}$ і його діагоналі A_1A_3, A_3A_5, A_1A_7. **7.38.** R. *Вказівка*. Нехай прямі A_1A_4 і OA_3, де O — центр описаного кола, перетинаються в точці B. Доведіть, що трикутники OBA_4, BA_4A_3 і OA_1B рівнобедрені. **7.39.** *Вказівка*. Доведіть, що точки дотику вписаного кола зі сторонами п'ятикутника ділять кожну сторону навпіл. **7.41.** *Вказівка*. Див. рисунок.

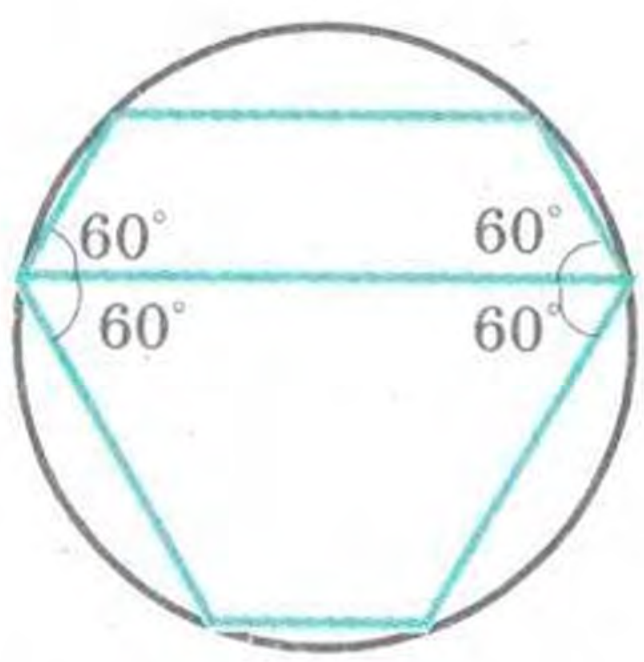


Рис. до задачі 7.32

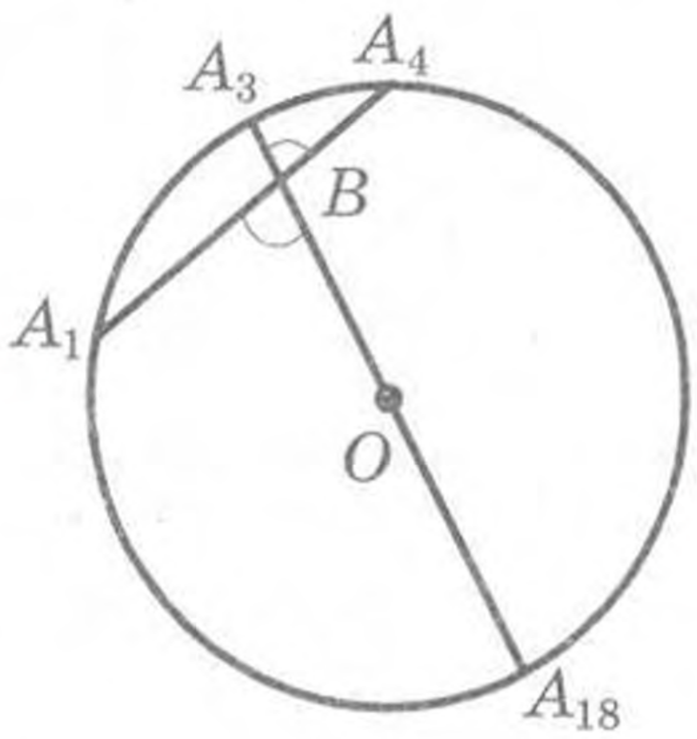


Рис. до задачі 7.36

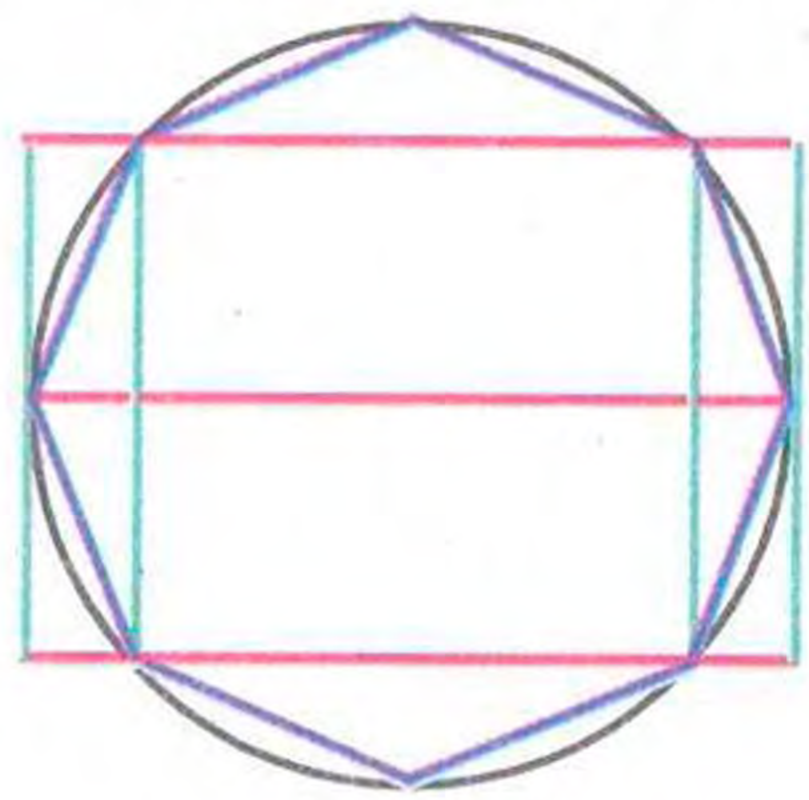


Рис. до задачі 7.41

7.42. Трикутників, або квадратів, або шестикутників. *Вказівка*. Навколо однієї точки можна укласти стільки дощечок, у скільки разів кут при вершині дощечки, який дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$, менший від 360°, тобто $360° : \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{2n}{n-2}$ дощечок. Значення виразу $\frac{2n}{n-2}$ має бути натуральним числом. Оскільки

$\frac{2n}{n-2}=\frac{2n-4+4}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}$, то значення виразу $\frac{4}{n-2}$ має бути натуральним числом. **7.43.** *Вказівка.* Нехай $ABCDEF$ — правильний шестикутник (див. рисунок), K — точка перетину прямих CD і EF. Тоді AK — шуканий відрізок. **7.45.** Так. *Вказівка.* Нехай точка O — центр описаного кола даного п'ятикутника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Тоді $\angle A_1OA_3 = \angle A_2OA_4$. Звідси $\angle A_1OA_2 = \angle A_3OA_4$. Отже, $A_1A_2 = A_3A_4$. Аналогічно можна показати, що $A_3A_4 = A_5A_1$. **7.46.** *Вказівка.* Розгляньте правильний п'ятикутник, вписаний в дане коло. **7.47.** *Вказівка.* Нехай $A_1A_2...A_{15}$ — даний правильний 15-кутник. Тоді п'ятикутники $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}$, $A_2A_5A_8A_{11}A_{14}$, $A_3A_6A_9A_{12}A_{15}$ є правильними. В одному з цих п'ятикутників позначено щонайменше три вершини. **7.48.** *Вказівка.* Оскільки кути даного п'ятикутника рівні, то його можна розмістити всередині правильного п'ятикутника, сторони якого паралельні сторонам даного п'ятикутника (див. рисунок). Далі скористайтеся результатом задачі 7.34.

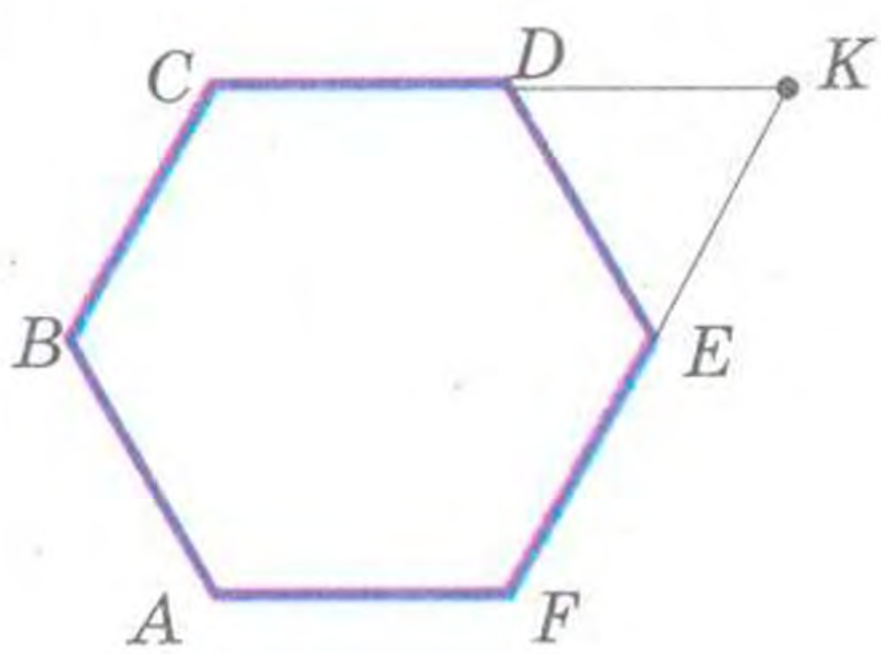


Рис. до задачі 7.43

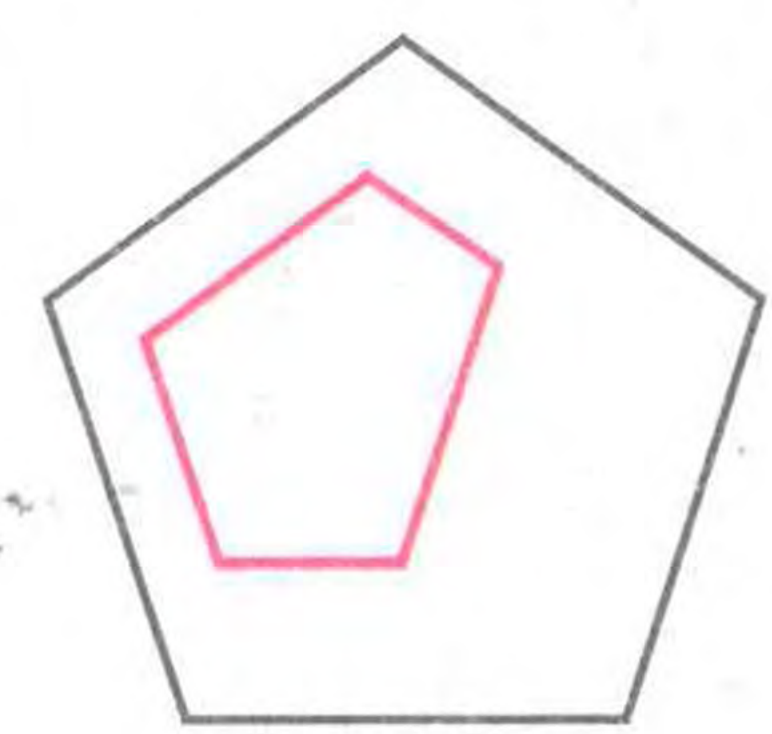


Рис. до задачі 7.48

8.7. 22,5°. **8.12.** $\sqrt{6}$ см. **8.13.** 1) $\frac{25(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ см²; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ см²; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ см². **8.14.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ см²; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ см². **8.16.** 2π см, $\frac{10\pi}{3}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **8.17.** $\frac{25\pi}{18}$ см, $\frac{35\pi}{18}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **8.18.** $\frac{8\pi}{3}$ см. **8.19.** 6π см. **8.21.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **8.22.** $\frac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}$. **8.23.** 1 : 1. *Вказівка.* Доведіть, що в обох випадках сума довжин півкіл дорівнює $\frac{1}{2}\pi AB$. **8.24.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **8.25.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **8.26.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Вказівка.* Розгляньте $\Delta\ AND$ і доведіть, що він рівносторонній. **8.28.** $2\pi R\left(1-\frac{l}{\pi r}\right)$. **8.30.** $\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)$ см. **8.31.** $R^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$. **8.33.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **8.35.** $64\sqrt{3}-\frac{88\pi}{3}$. *Вказівка.* Проведіть $O_1M \perp O_2B$. Доведіть, що $\angle O_2O_1M = 30°$. **8.36.** *Вказівка.* Спільна частина квадратів містить круг, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}$ см (див. рисунок).

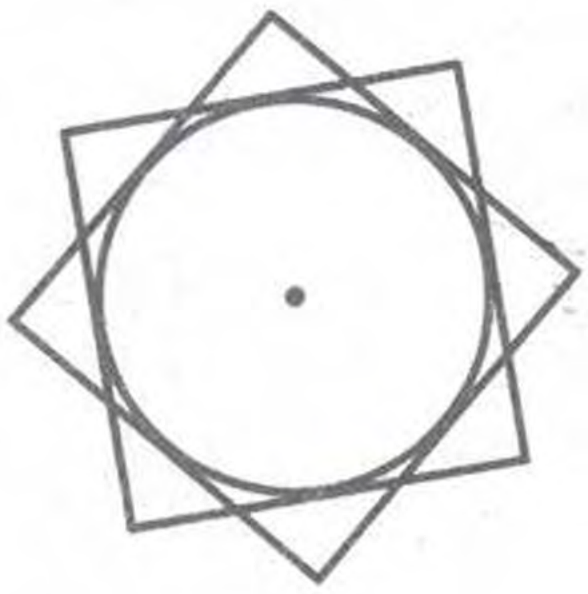


Рис. до задачі 8.36

9.6. (1; 2). **9.7.** (1; −4) або (−1; 1). **9.12.** 1) Так, точка B лежить між точками A і C; 2) ні. **9.14.** $x = 7$ або $x = -1$. **9.15.** (3; 0). **9.16.** (0; 0,5). **9.17.** (−3; 7). **9.18.** (−2; 2). **9.19.** (3; −2). **9.23.** A (−5; 3), C (7; 5). **9.24.** $2\sqrt{73}$. **9.26.** $\left(3\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$ або $\left(-3\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$. **9.27.** $\left(-2;4\sqrt{3}\right)$ або $\left(-2;-4\sqrt{3}\right)$. **9.28.** (3; 3) або (−6; 6). *Вказівка.* Розгляньте два випадки: B (a; a) або B (a; $-a$). **9.29.** (5,5; 0), (3; 0), (−1; 0). *Вказівка.* Розгляньте три випадки: $AC = BC$, $AC = AB$ і $BC = AB$. **9.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Вказівка.* Розгляньте три випадки: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **9.31.** (3; 3) або (15; 15). **9.32.** (−2; 2) або (−10; 10). **9.34.** $\frac{4\sqrt{5}}{3}$. **9.35.** 9. **9.37.** $\left(\frac{13}{3};3\right)$. **9.38.** *Вказівка.* Позначимо даний 10-кутник так: $A_1A_2...A_{10}$. Розгляньте два п'ятикутники $A_1A_3A_5A_7A_9$ і $A_2A_4A_6A_8A_{10}$. Далі скористайтеся ідеєю розв'язування прикладу 4 п. 9. **9.39.** Ні. *Вказівка.* Розглянемо систему координат так, щоб початок відліку збігався з непозначеною вершиною квадрата, а осі координат збігалися з лініями сітки. Тоді парність координат точки X збігається з парністю координат або точки A, або точки B. Зазначимо, що у непозначеної вершини квадрата обидві координати є парними. **10.12.** Два кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ і $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **10.13.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **10.15.** 1) Так, точка (−1; 5) — центр кола, $R = 7$; 2) ні; 3) ні; 4) так, точка (2; 7) — центр кола, $R=\sqrt{2}$. **10.16.** 1) Точка (0; −8) — центр кола, $R = 2$; 2) точка (4; −2) — центр кола, $R=\sqrt{5}$. **10.21.** 5. **10.22.** 13. **10.23.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **10.24.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ або $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **10.25.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ або $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **10.26.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ або $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Вказівка.* Діаметр шуканого кола дорівнює відстані між віссю абсцис і прямою $y = -4$, а центр кола належить бісектрисі третього або четвертого координатного кута. **10.27.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ або $(x-1)^2+(y+1)^2=1$. **10.28.** 1) $(x+3)^2+(y-2)^2=25$; 2) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$. **10.30.** $(x-4)^2+(y+3)^2=9$ або $(x-4)^2+(y+3)^2=49$. *Вказівка.* Кола можуть мати як зовнішній, так і внутрішній дотик. **10.31.** $(x-3)^2+(y+1)^2=25$ або $(x-3)^2+(y+1)^2=225$. **10.32.** $(x^2+y^2-16)(x^2+y^2-4)=0$. **10.33.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ або $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. **10.34.** (3; 4), (−4; 3), (−3; −4), (4; −3). **10.35.** $\left(0;2\sqrt{3}\right)$, $\left(3;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-3;-\sqrt{3}\right)$. **10.36.** Якщо $a<10$, то порожня множина; якщо $a=10$, то точка M (2; −3); якщо $a>10$, то коло $(x-2)^2+(y+3)^2=\frac{a}{2}-5$. **10.37.** *Вказівка.* Додайте почленно ліві і праві частини рівнянь парабол. **11.6.** 1) $y=2x-5$; 2) $x=3$; 3) $y=-1$; 4) $5x+3y=6$. **11.7.** 1) $y=-3x+1$; 2) $x-6y=12$. **11.8.** $y=-0{,}5x-4$. **11.9.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$. **11.11.** 12. **11.12.** 28. **11.13.** 6. **11.14.** (2; 5), (5; 2). **11.15.** (5; 0). **11.17.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Вказівка.* Шукана відстань дорівнює висоті трикутника, обмеженого осями координат і даною прямою. **11.18.** $4\sqrt{2}$. **11.19.** $3\sqrt{10}$. **11.20.** $x-3y=2$. **11.21.** $7x+5y=-8$. **11.22.** $(x-3)^2+(y-4)^2=17$. **11.23.** $(y-4)(y+4)=0$. **12.6.** 1) $y=0{,}1x$; 2) $y=\left(2-\sqrt{3}\right)x$. **12.7.** 1) $y=4x+19$; 2) $y=-3x-2$; 3) $y=7$. **12.8.** $y=-0{,}5x-4$. **12.9.** 1) $y=-7x+2$; 2) $3x-4y=-39$. **12.10.** 1) $y=9x+13$; 2) $3x+y=9$. **12.11.** 1) $y=5x-11$; 2) $y=-2x+3$. **12.12.** 1) $y=x+2$; 2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. **12.13.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$. **12.14.** 1) $y=x-5$; 2) $y=-x+1$. **12.15.** *а*) $y=\frac{x\sqrt{3}}{3}+3$; *б*) $y=-\frac{x\sqrt{3}}{3}+2$. **12.16.** $y=x-1$; $y=1-x$; $y=x\sqrt{3}+1$; $y=-x\sqrt{3}-1$. **12.17.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **12.19.** 1) (0; −1), $\left(\frac{1}{2};0\right)$; 2) (0; 0,8), $\left(\frac{4}{3};0\right)$. **12.20.** 1) 2,6; 2) $\frac{28}{13}$. **12.21.** $\frac{13}{30}$. **12.22.** 1) $4x-3y=11$; 2) $3x-4y=1$. **12.23.** $y=4x+9$. **12.24.** $y=3x-12$. **12.25.** $x+2y=6$. **12.26.** $2x-4y=-1$. **12.27.** $y=3x-12$. **12.28.** $8y-3x=21$, $3y-x=-26$, $5y-2x=47$. **12.29.** $y=-2x+9$.

12.30. $y = 4$. **12.31.** 6. *Вказівка.* Знайдіть відстань від точки C до прямої AB. **12.32.** $(x+2)^2+(y-1)^2=\frac{841}{289}$. **12.33.** Пряма $5x - 12y = 2$. **12.34.** $3x - 4y = 17$. **12.35.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$. **12.36.** Дві прямі: $(x + y - 15)(7x - 7y - 1) = 0$. *Вказівка.* Скористайтеся формулою відстані від точки до прямої. **12.37.** 1) 4; 2) 0,7. **12.38.** $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1$; $(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 1$; $\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(y+\frac{12}{7}\right)^2=1$; $\left(x+\frac{12}{7}\right)^2+\left(y+\frac{2}{7}\right)^2=1$. **12.39.** $x + 3y = 13$ і $9x - 13y = 37$. **12.40.** $x+y=3\sqrt{2}+3$; $x+y=-3\sqrt{2}+3$. **12.41.** 5. *Вказівка.* Точка A має бути основою перпендикуляра, опущеного з центра кола на пряму, а точка B має належати цьому перпендикуляру. **13.1.** Пряма, перпендикулярна до прямої AB. **13.2.** Порожня множина, або середина відрізка AB, або коло з центром в середині відрізка AB. **13.3.** Порожня множина, або точка, або коло. *Вказівка.* Оберіть систему координат так, як показано на рисунку. Покажіть, що коли $a^2 + b^2 < 1$, то отримаємо порожню множину; якщо $a^2 + b^2 = 1$, то точку $D(-a; -b)$; якщо $a^2 + b^2 > 1$, то коло з центром у точці $D(-a; -b)$. **13.4.** Порожня множина, або точка перетину медіан трикутника ABC, або коло з центром у точці перетину медіан трикутника ABC. *Вказівка.* Скористайтеся формулою Лейбніца.

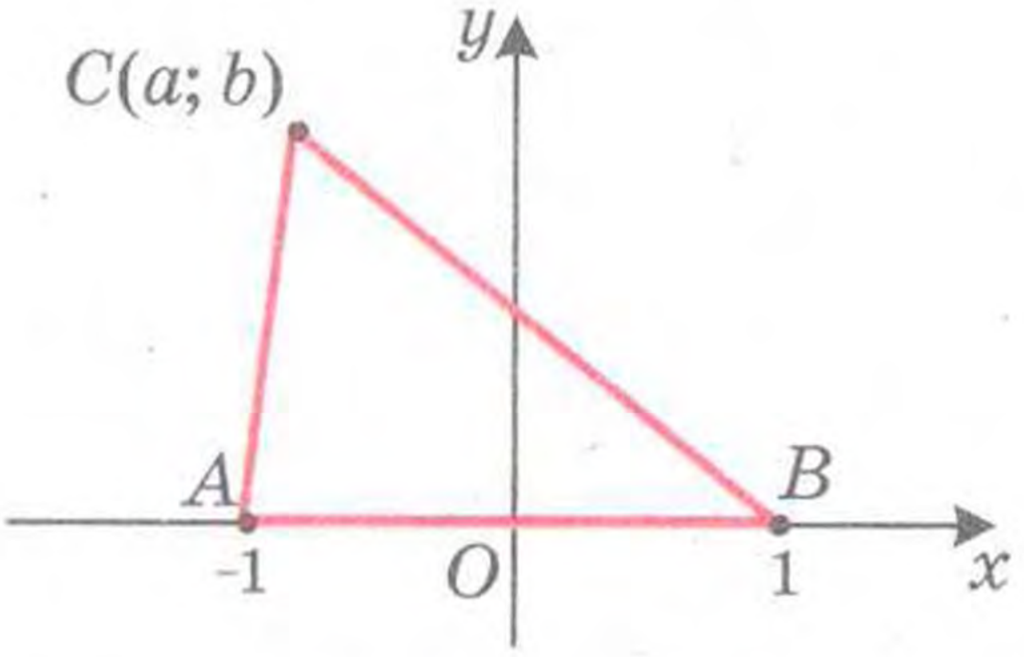


Рис. до задачі 13.3

13.5. Коло радіуса $\frac{4}{3}AB$, центр якого ділить відрізок AB у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A. **13.6.** Коло з центром у точці B_1 такій, що точка A є серединою відрізка BB_1. Радіус кола дорівнює $2AB$. **13.7.** Коло без точок перетину з прямою AB. Центр кола знаходиться в точці B_1 такій, що точка A є серединою відрізка BB_1, радіус кола дорівнює $2d$. **13.8.** Коло з центром у точці K такій, що точка K ділить AB у відношенні 3 : 2, рахуючи від точки A, без точок, які належать прямій AB. Радіус кола дорівнює $\frac{4}{3}AB$. **13.9.** Дві прямі, що перетинаються в точці B_1 такій, що точка A — середина відрізка BB_1, без самої точки B_1. Ці прямі утворюють кут 30° з прямою AB. **13.10.** Пряма, яка проходить через середину гіпотенузи і перпендикулярна до медіани, проведеної з вершини C. **13.11.** Відрізок без кінців. **13.13.** $3\sqrt{2}$. *Вказівка.* Виберіть систему координат так, як показано на рисунку (точка O — середина відрізка AB). Вершина C належить двом колам: описаному колу трикутника ABC і колу з центром у точці D радіуса $2\sqrt{2}$. Знайдіть рівняння цих кіл. **13.14.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **13.15.** $\frac{\sqrt{73}}{5}$. *Вказівка.* Скористайтеся теоремою 9.1. **13.16.** $2(R^2 + r^2)$.

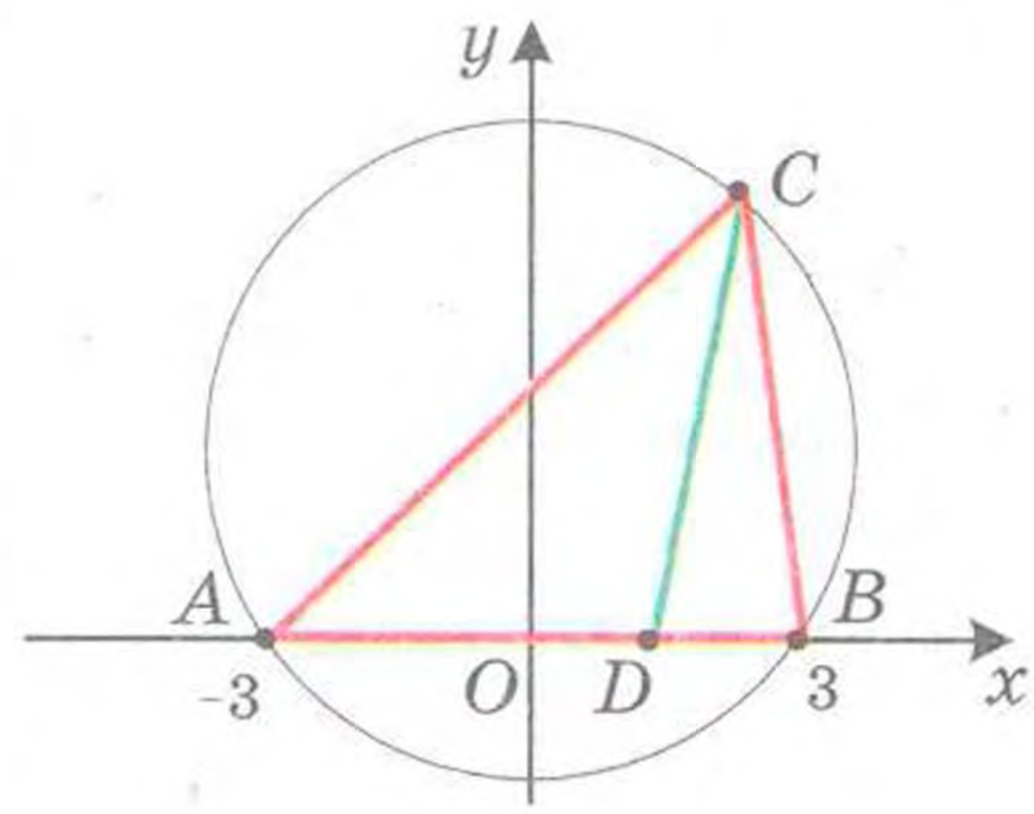


Рис. до задачі 13.13

13.17. 9 і 1. *Вказівка.* Розгляньте два концентричних кола з центром у початку координат і радіусами 1 і 2. **14.11.** 3) Ні. *Вказівка.* Можливий випадок, коли $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$. **14.21.** Прямокутник або рівнобічна трапеція. **15.17.** $\overrightarrow{AF}(-2; 2)$, $\overrightarrow{FD}(2; 4)$. **15.18.** $\overrightarrow{DE}(-4; 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4; -6)$. **15.19.** $\vec{a}(-6; -8)$ або $\vec{a}(8; 6)$. **15.20.** $\vec{c}\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ або $\vec{c}\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$. **15.21.** C (7; 17), D (2; 17) або C (7; −7), D (2; −7). **15.22.** B (16; 2), C (16; −6) або B (−14; 2), C (−14; −6). **16.45.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **16.46.** *Вказівка.* Достатньо показати, що $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$. **16.47.** *Вказівка.* Покажіть, що кожний з векторів $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ дорівнює нуль-вектору. **16.49.** Коло радіуса AB з центром у точці A. **16.50.** Серединний перпендикуляр відрізка AB. **16.51.** *Вказівка.* Нехай AA_1 — медіана трикутника ABC. На продовженні відрізка AA_1 за точку A_1 відкладіть відрізок A_1D, рівний MA_1. **16.52.** *Вказівка.* Нехай при деякому виборі системи координат точки мають координати $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, ..., $A_n(x_n; y_n)$. Розгляньте точку $M\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}; \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right)$. **16.53.** *Вказівка.* Маємо: $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, звідси $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$. **17.28.** −4; 4. **17.29.** −1,5. **17.31.** $\vec{m}(-15; 36)$. **17.32.** $\vec{a}(-3; 4)$. **17.35.** $x = 2$, $y = -3$. **17.38.** $\overrightarrow{OK} = 0{,}5\vec{a} - 0{,}1\vec{b}$. **17.42.** 1) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

17.46. *Вказівка.* $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2M_2}$. З іншого боку, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_2}$. Додайте ці рівності. **17.47.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 17.46. **17.49.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 4 п. 17. **17.50.** *Вказівка.* Нехай відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **17.52.** *Вказівка.* Маємо: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$ $=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. **17.53.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 17.46 і ключовою задачею 1 п. 17. **17.54.** *Вказівка.* Виразіть вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. **17.56.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 17.55. **17.57.** *Вказівка.* Нехай M_1, M_2, M_3 і M_4 — середини відповідно відрізків AH_1, BH_2, CH_3 і DH_4. Доведіть, що $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_4}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, де O — центр описаного кола. **17.58.** *Вказівка.* Нехай точка H — ортоцентр трикутника ABC. Тоді з ключової задачі 4 п. 17 випливає, що $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. З цієї рівності випливає, що точка H належить описаному колу трикутника ABC. **17.59.** *Вказівка.* Розгляньте чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Нехай точки M і N — середини сторін BC і AD відповідно. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ протилежні. Розкладіть вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ за базисом $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$. **17.60.** *Вказівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OD}$. **17.61.** *Вказівка.* Скориставшись ключовою задачею 17.46, можна записати $\overrightarrow{KF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{MQ})$, $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE})$. Зазначимо, що $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. **17.62.** *Вказівка.* Скориставшись ключовою задачею 3 п. 17, запишемо $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$. Також $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})$. Далі виразіть вектор $\overrightarrow{AK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$. **17.63.** *Вказівка.* Нехай точка N — середина відрізка EF і медіани AA_1 і CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Нехай $AP : PC = m : n$. Оскільки $PE \parallel CC_1$ і $PF \parallel AA_1$, то $AE : EB =$ $= m : (m + 2n)$, $CF : FB = n : (n + 2m)$. Скориставшись ключовою задачею 3 п. 17, запишемо $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$. Далі, $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})$.

Скористайтесь ключовою задачею 2 п. 17 і виразіть вектор $\overrightarrow{PE}$ через вектори $\overrightarrow{PA}$ і $\overrightarrow{PB}$, а вектор $\overrightarrow{PF}$ через вектори $\overrightarrow{PB}$ і $\overrightarrow{PC}$. **17.64.** *Вказівка.* Для точки O і трикутників ABC і PQR скористайтеся ключовою задачею 3 п. 17. **17.65.** *Вказівка.* Скориставшись ключовою задачею 4 п. 17, запишемо $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}$. Покажіть, що вектори $\overrightarrow{H_2H_1}$ і $\overrightarrow{H_2H_3}$ колінеарні. **18.16.** $\vec{b}(-12;16)$. **18.18.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **18.21.** -3 і 3. **18.22.** -1. **18.23.** -1 і 1. **18.25.** 4. **18.26.** $-0{,}5$. **18.27.** $\sqrt{7}$. **18.28.** $2\sqrt{7}$. **18.31.** 0, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. **18.32.** 30°, 60°, 90°. **18.35.** 0°. **18.36.** 120°. **18.37.** $\frac{\sqrt{259}}{2}$. *Вказівка.* $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. **18.38.** *Вказівка.* $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. **18.39.** *Вказівка.* Доведіть, що $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. **18.40.** *Вказівка.* Нехай $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Знайдіть $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AK}$. **18.41.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.42.** 45°. *Вказівка.* Нехай $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Очевидно, що $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Тоді $\overrightarrow{AO}=2\vec{c}$, $\overrightarrow{DO}=3\vec{b}$. Звідси $\overrightarrow{AB}=2\vec{c}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}+3\vec{b}$. **18.43.** 30°. *Вказівка.* $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$. Звідси $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BA}|\cdot\cos\angle ABD$. **18.44.** 4. *Вказівка.* Розкладіть вектор $\overrightarrow{AD}$ за базисом $(\overrightarrow{AK};\overrightarrow{AM})$. **18.45.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$. *Вказівка.* Нехай M і N — середини сторін AD і BC відповідно. Тоді за допомогою ключової задачі 17.46 можна записати $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})$. **18.46.** 60°. **18.47.** $AK:KB=2:1$. *Вказівка.* Нехай $AK:KB=m:n$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{CK}$ і $\overrightarrow{AM}$ за базисом $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. **18.48.** 1 : 4. **18.49.** *Вказівка.* $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}$. Залишилося показати, що $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. **18.50.** *Вказівка.* Розгляньте вектори $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$ і $\vec{l_3}$, співнапрямлені з векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CA}$, такі, що $|\vec{l_1}|=|\vec{l_2}|=|\vec{l_3}|=1$. Скористайтеся очевидною нерівністю $(\vec{l_1}+\vec{l_2}+\vec{l_3})^2\geqslant 0$. **19.25.** $f(A)=A$, $f(A)=B$, $f(A)=C$. **19.26.** Ні.

20.7. При $AB \parallel a$. **20.17.** Безліч. **20.20.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$. **20.21.** $y = x^2 - 4x + 1$. **20.23.** *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — шукана трапеція ($BC \parallel AD$). Побудуйте образ діагоналі BD при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{BC}$. **20.25.** *Вказівка.* Побудуйте образ даної прямої при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$ (або $\overrightarrow{BA}$). Розгляньте точки перетину образу з даним колом. Зауважимо, що коли побудований образ і дане коло не мають спільних точок, то задача не має розв'язку. **20.27.** *Вказівка.* Нехай $T_{\overrightarrow{OO_1}}(M) = M_1$, де O і O_1 — центри кіл. Тоді $BM_1 \parallel AM$. Звідси $T_{\overrightarrow{OO_1}}(A) = B$. **20.28.** *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — шуканий чотирикутник з даними сторонами AB і CD (див. рисунок). Нехай $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = A_1$. Трикутник A_1CD можна побудувати за двома сторонами CD і $CA_1 = BA$ і кутом A_1CD, який дорівнює $\angle BCD - (180° - \angle ABC)$. Трикутник AA_1D можна побудувати за стороною A_1D і двома прилеглими кутами AA_1D і ADA_1. **20.29.** *Вказівка.* Нехай $T_{\overrightarrow{MN}}(A) = A_1$. З'єднайте точки A_1 і B. **20.30.** 90°. *Вказівка.* Нехай $T_{\overrightarrow{AB}}(M) = M_1$. Скористайтеся тим, що навколо чотирикутника MBM_1C можна описати коло. **20.31.** *Вказівка.* Нехай $T_{\overrightarrow{BC}}(M) = M_1$. Доведіть, що навколо чотирикутника MCM_1D можна описати коло. **21.20.** $a \perp l$ або прямі a і l збігаються. **21.23.** *Вказівка.* Якщо чотирикутник має вісь симетрії, то образом будь-якої його вершини є вершина цього самого чотирикутника. Оберіть деяку вершину паралелограма і розгляньте дві можливості: її образом є або сусідня вершина, або протилежна. **21.25.** *Вказівка.* Кути M_1BA і MBA є симетричними відносно прямої AB. Отже, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогічно $\angle M_2BC = \angle MBC$. Залишилося показати, що $\angle M_1BM_2 = 180°$. **21.26.** 1) A_1 (0; −2), B_1 (−1; 3); 2) A_2 (0; 2), B_2 (1; −3). **21.27.** $x = 2$, $y = -1$. **21.31.** $\frac{m^2}{4}$. *Вказівка.* Нехай $M_1 = S_{AC}(M)$. Доведіть, що трикутники M_1AM і ABC рівновеликі. **21.32.** *Вказівка.* Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка перетину прямих a і A_1B буде шуканою. Зауважимо, що коли точки A і B симетричні відносно прямої a, то задача має безліч розв'язків. Якщо точки A і B рівновіддалені, але не симетричні відносно прямої a, то задача не має розв'язків. **21.34.** *Вказівка.* Нехай

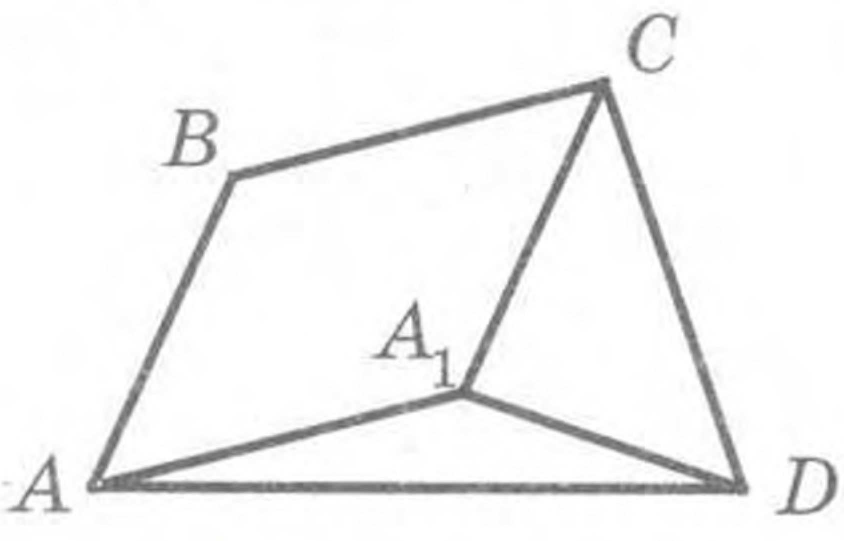


Рис. до задачі 20.28

$A_1 = S_a\ (A)$. Перетин прямих A_1B і a є шуканою точкою. **21.35.** *Вказівка*. Скористайтесь прикладом 2 п. 21. **21.36.** *Вказівка*. Скористайтесь прикладом 3 п. 21. **21.37.** *Вказівка*. Нехай $C_1 = S_{AD}\ (C)$. Проведіть пряму BC_1. **21.38.** *Вказівка*. Нехай l і m — серединні перпендикуляри. Покажіть, що $C = S_l\ (AB) \cap S_m\ (AB)$. **21.39.** *Вказівка*. Образи точки A при симетрії відносно прямих, які містять бісектриси, лежать на прямій BC. **21.40.** *Вказівка*. Нехай l і m — серединні перпендикуляри до сторін AB і BC відповідно. Нехай $D_1 = S_l\ (D)$, $D_2 = S_m\ (D)$. Точки D_1 і D_2 лежать відповідно на прямих DC і DA. Зазначимо, що коли гострий кут паралелограма дорівнює 60°, то задача має безліч розв'язків. **21.41.** *Вказівка*. Нехай точка A_1 симетрична точці A відносно цієї бісектриси. $AM + MB = A_1M + MB > A_1B = A_1C + CB = AC + CB$. **21.42.** 6, якщо ABC не є прямокутним трикутником; 3, якщо ABC — прямокутний трикутник. **21.43.** *Вказівка*. Нехай трикутник A_1BC — образ трикутника ABC при симетрії відносно серединного перпендикуляра відрізка BC (див. рисунок). Трикутник ACA_1 можна побудувати за відомими сторонами AC і A_1C ($A_1C = AB$) і кутом ACA_1, який дорівнює різниці кутів B і C. **21.45.** *Вказівка*. Нехай точка C_1 симетрична точці C відносно прямої AB. Побудуйте коло з центром у точці C_1, яке дотикається до прямої AB. Проведіть через точку D дотичну до побудованого кола. **21.46.** *Вказівка*. Нехай $C_1 = S_l\ (C)$. На відрізку C_1D як на діаметрі побудуйте коло. **21.47.** *Вказівка*. Нехай пряма l — серединний перпендикуляр діагоналі AC, $B_1 = S_l\ (B)$. Скористайтеся тим, що чотирикутники $ABCD$ і AB_1CD рівновеликі. **21.48.** *Вказівка*. Нехай $B_1 = S_{AC}\ (B)$. Точка B_1 лежить на прямій AD. У трикутнику B_1CD відомі всі три сторони. **21.49.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 21.30. **21.50.** 60°. *Вказівка*. Доведіть, що точка C — центр зовнівписаного кола трикутника ABD. **21.51.** 90°. *Вказівка*. Нехай $C_1 = S_{AB}\ (C)$, $D_1 = S_{AB}\ (D)$. Доведіть, що в чотирикутник D_1C_1CD можна вписати коло. **21.52.** *Вказівка*. Нехай $B_1 = S_{AM}\ (B)$, $C_1 = S_{DM}\ (C)$. Доведіть, що трикутник B_1MC_1 — рівносторонній. **21.53.** 30°. *Вказівка*. Доведіть, що $S_{CE}\ (D) = S_{CA}\ (B) = O$, де O — центр описаного кола трикутника ACE. **22.13.** *Вказівка*. Нехай $\triangle ABC$ має центр симетрії. Тоді, наприклад, образом вер-

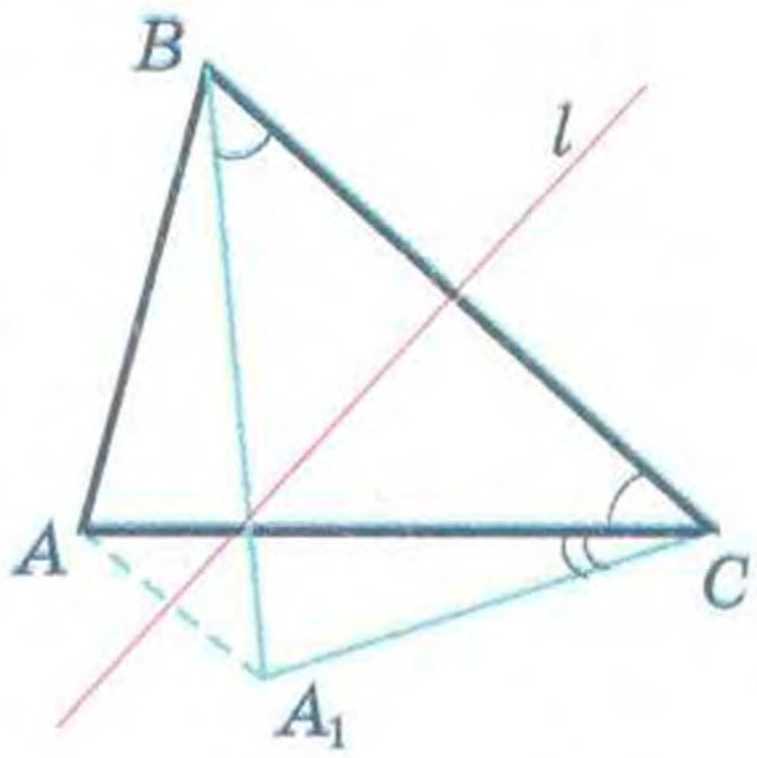


Рис. до задачі 21.43

шини A є вершина B. Отже, центр симетрії — це середина сторони AB. Проте в цьому разі образ вершини C не належатиме трикутнику ABC. **22.16.** *Вказівка.* При центральній симетрії образом сторони даного чотирикутника є сторона цього самого чотирикутника. Далі скористайтеся ключовою задачею 1 п. 22. **22.17.** *Вказівка.* Розгляньте центральну симетрію з центром у точці перетину діагоналей одного з паралелограмів. **22.18.** *Вказівка.* При симетрії відносно точки O образи точок A_1 і B_1 належать колу з центром O_2. Оскільки образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма, то образи точок A_1 і B_1 також належать прямій A_1B_1. Отже, відрізок A_2B_2 — образ відрізка A_1B_1. **22.19.** *Вказівка.* Розгляньте симетрію даної прямої відносно даної точки. **22.21.** *Вказівка.* Відобразіть одне з кіл симетрично відносно точки D. Точка перетину другого кола з одержаним — вершина трикутника. **22.22.** *Вказівка.* Покажіть, що S_O (Δ BMC) = Δ DNA. **22.24.** *Вказівка.* Доведіть, що коли спільна точка двох кіл є центром симетрії, при якій одне з кіл є образом другого, то ці кола дотикаються. **22.25.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 21.25. **22.26.** *Вказівка.* Знайдіть середину відрізка AC, а далі скористайтеся прикладом 1 п. 22. **22.28.** *Вказівка.* Точку C (див. рисунок) можна знайти як точку

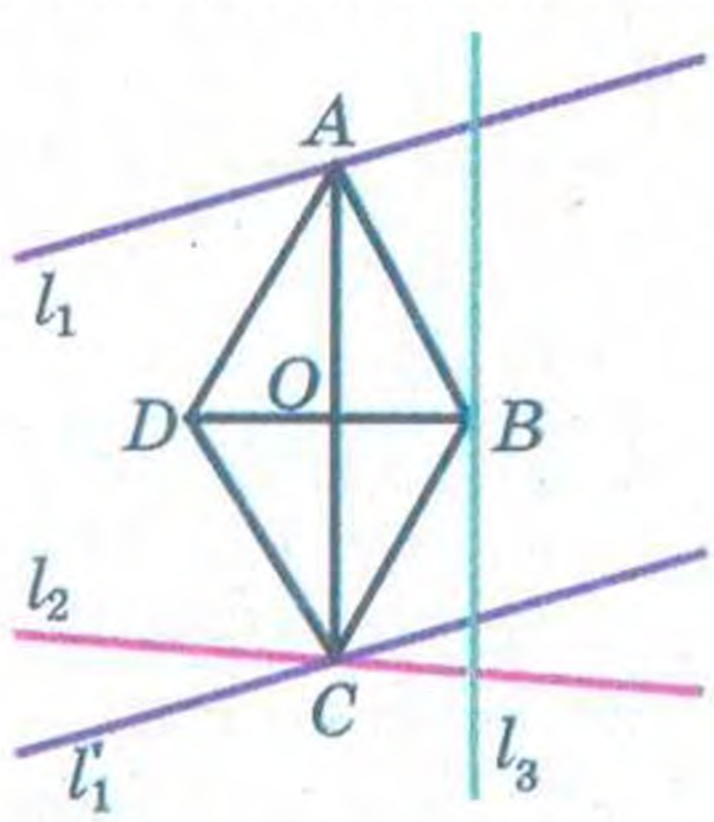


Рис. до задачі 22.28

перетину прямих l_2 і l_1', де l_1' — образ прямої l_1 при центральній симетрії відносно точки O. **22.30.** *Вказівка.* Покажіть, що при симетрії з центром у точці перетину діагоналей паралелограма образами прямих MC, MD, MA і MB будуть проведені прямі. **22.31.** *Вказівка.* Побудуйте образ одного з кіл при центральній симетрії відносно точки M. **22.32.** *Вказівка.* Нехай $P_1 = S_C\ (P)$. Тоді $AP + BQ = P_1B + BQ$. **22.33.** *Вказівка.* Нехай точки K, M, N і L — відповідно середини сторін AB, BC, CD і DA вписаного чотирикутника $ABCD$. Покажіть, що при симетрії відносно точки перетину прямих KN і ML образами проведених прямих є серединні перпендикуляри сторін чотирикутника. **22.35.** 1 : 1. *Вказівка.* Об'єднанням даної трапеції та її образа при симетрії відносно середини сторони CD є квадрат. **22.36.** *Вказівка.* Оберіть на меншому колі довільну точку. Узявши її за центр симетрії, побудуйте образ меншого кола. **23.10.** *Вказівка.* Нехай $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$. Розглянемо поворот з центром O на кут $\frac{360^\circ}{n}$, наприклад, проти годинникової стрілки. Очевидно, що при такому перетворенні образом даного n-кутника буде цей самий n-кутник. Отже, шукана сума не зміниться. А це можливо лише тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$. **23.11.** 2 см або 1 см. **23.12.** 2 см. *Вказівка.* При розглядуваному повороті точка B є образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (див. рисунок). Отже, ΔABC_1 — образ ΔADC. Звідси $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90^\circ$. Отже, точки C_1, B, C лежать на одній прямій. **23.13.** *Вказівка.* Скористайтеся ідеєю розв'язування прикладу 2 п. 23. **23.16.** *Вказівка.* Розгляньте поворот $R_A^{90^\circ}$. **23.17.** 60°. *Вказівка.*

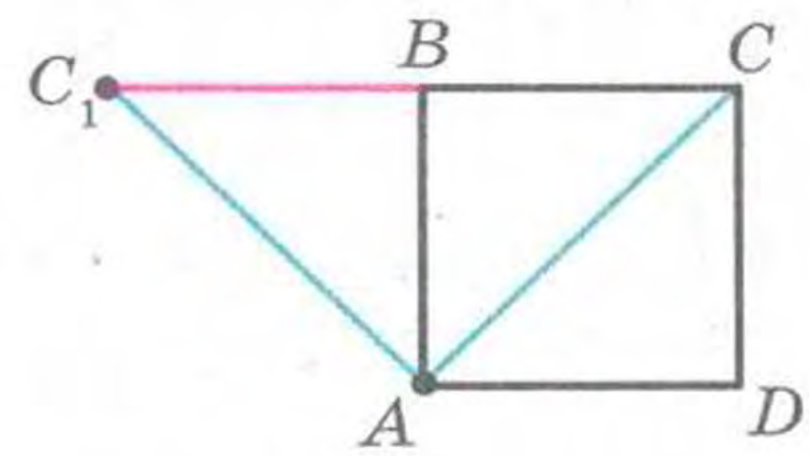


Рис. до задачі 23.12

Розгляньте поворот $R_C^{60^\circ}$. **23.18.** *Вказівка.* Розгляньте поворот $R_O^{90^\circ}$. **23.19.** 120°. *Вказівка.* Розгляньте поворот $R_O^{120^\circ}$. **23.20.** 120°. *Вказівка.* Доведіть, що $AD = 2BC$. Розгляньте поворот з центром у точці O на кут 120°. **23.21.** 60°. **23.22.** *Вказівка.* Розгляньте поворот $R_A^{90^\circ}$. **23.23.** *Вказівка.* Розгляньте поворот $R_A^{60^\circ}$.

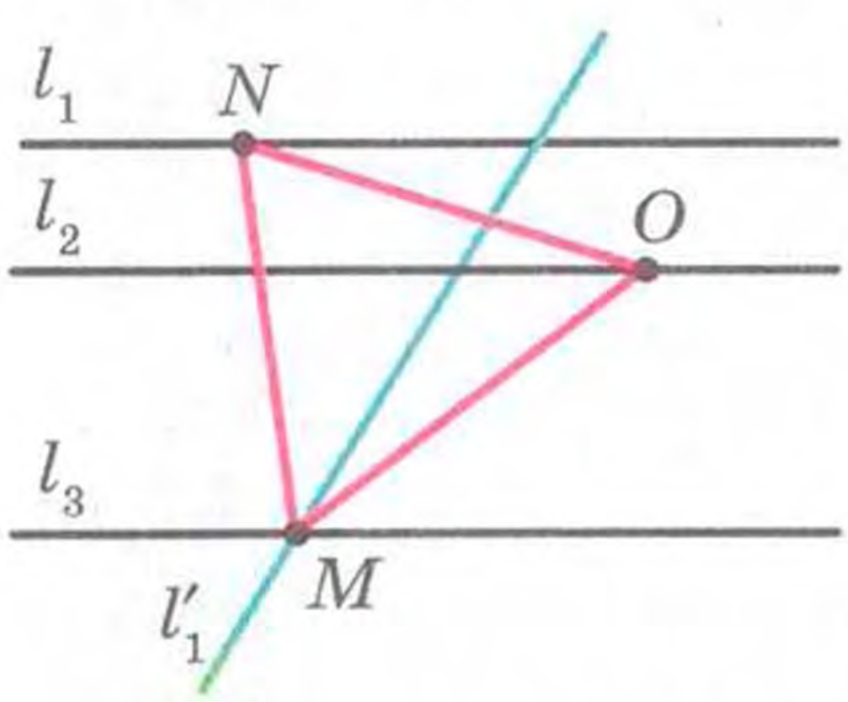


Рис. до задачі 23.26

23.25. *Вказівка.* Покажіть, що при повороті $R_O^{90^\circ}$ одна з діагоналей чотирикутника $ABCD$ є образом другої діагоналі. **23.26.** *Вказівка.* Нехай l_1, l_2, l_3 — дані паралельні прямі, O — довільна точка прямої l_2 (див. рисунок). Пряма l_1' — образ прямої l_1 при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 60° — перетинає пряму l_3 у точці M. Знайдемо прообраз точки M при заданому повороті. Очевидно, що він належить прямій l_1. Тому достатньо відкласти від променя OM кут, рівний 60°. **23.28.** *Вказівка.* Розглянемо поворот з центром у точці A проти годинникової стрілки на кут 90°. При цьому повороті образом відрізка AD буде відрізок AB (див. рисунок). Нехай E_1 — образ точки E. Тоді трикутник ABE_1 — образ трикутника ADE. Звідси $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Тоді

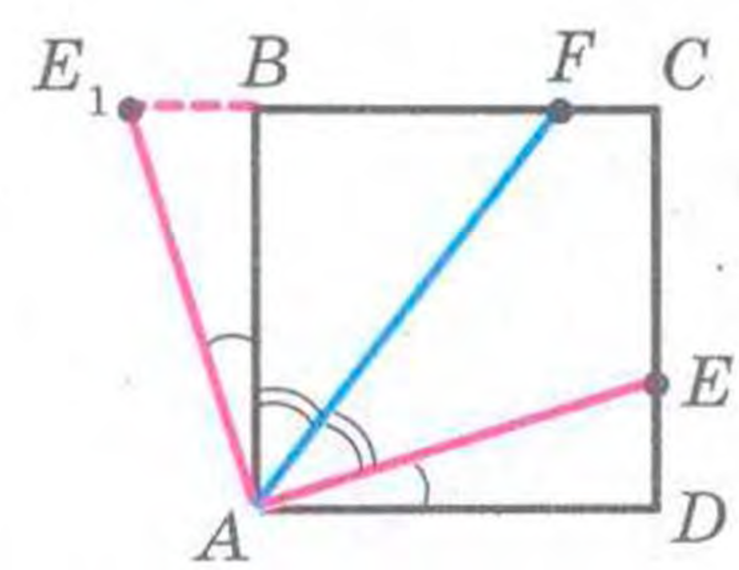


Рис. до задачі 23.28

$DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Маємо: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle E_1FA$. Отже, ΔAE_1F — рівнобедрений і $AE_1 = E_1F$. **23.29.** *Вказівка*. Розглянемо поворот з центром у точці A за годинниковою стрілкою на кут $60°$ (див. рисунок). При цьому повороті образом трикутника ABP буде трикутник ACP_1 (точка P_1 — образ точки P). Звідси $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Трикутник APP_1 — рівносторонній. Тоді $\angle AP_1P = 60°$. Отже, $\angle PP_1C = 90°$. Залишилося зауважити, що $P_1C = PB$ і $PP_1 = AP$. **23.31.** $\sqrt{3}$. *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_A^{60°}$ (див. рисунок). **23.32.** 3. **23.33.** $135°$. *Вказівка*. Нехай $AP = x$, $BP = 2x$, $CP = 3x$. Розгляньте поворот $R_B^{90°}$.

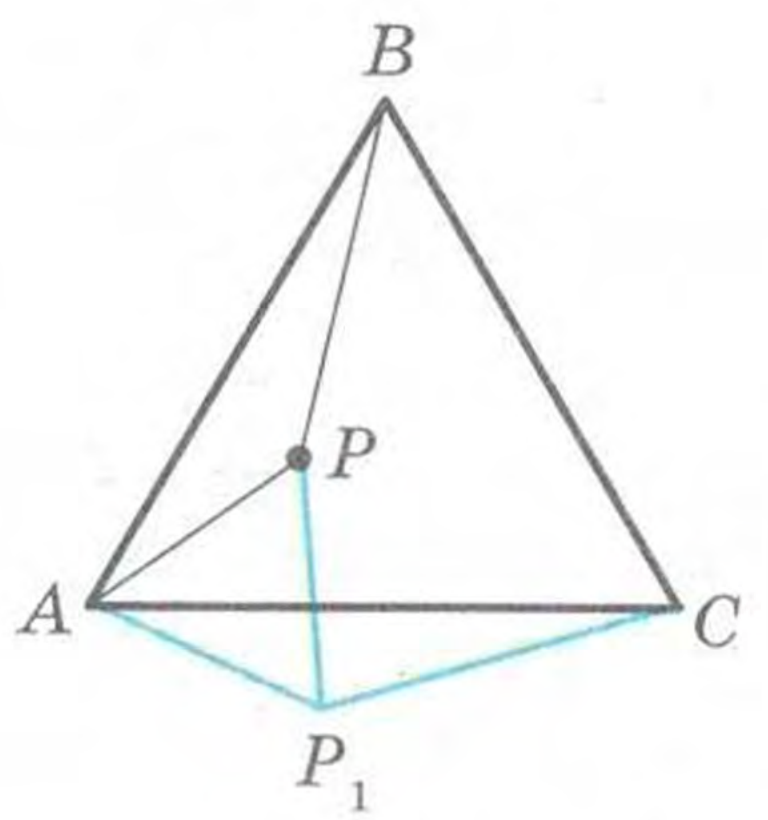


Рис. до задачі 23.29

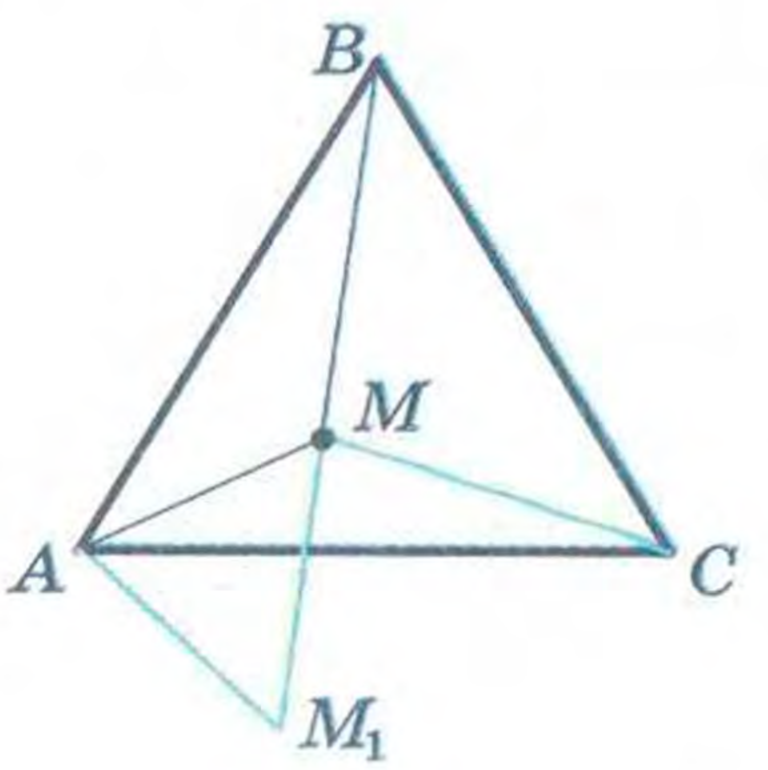


Рис. до задачі 23.31

23.34. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. *Вказівка*. Маємо: $R_A^{60°}(C) = C_1$ (див. рисунок). Доведіть, що точки C, B і C_1 лежать на одній прямій. Скористайтеся тим, що трикутник ACC_1 рівновеликий з чотирикутником $ABCD$. **23.35.** *Вказівка*. Нехай O_1 і O_2 — центри квадратів $ABDE$ і $CBLK$ відповідно (див. рисунок). Чотирикутник $O_1M_1O_2M_2$ — паралелограм. Покажіть, що відрізок AL є образом відрізка DC при повороті $R_B^{90°}$.

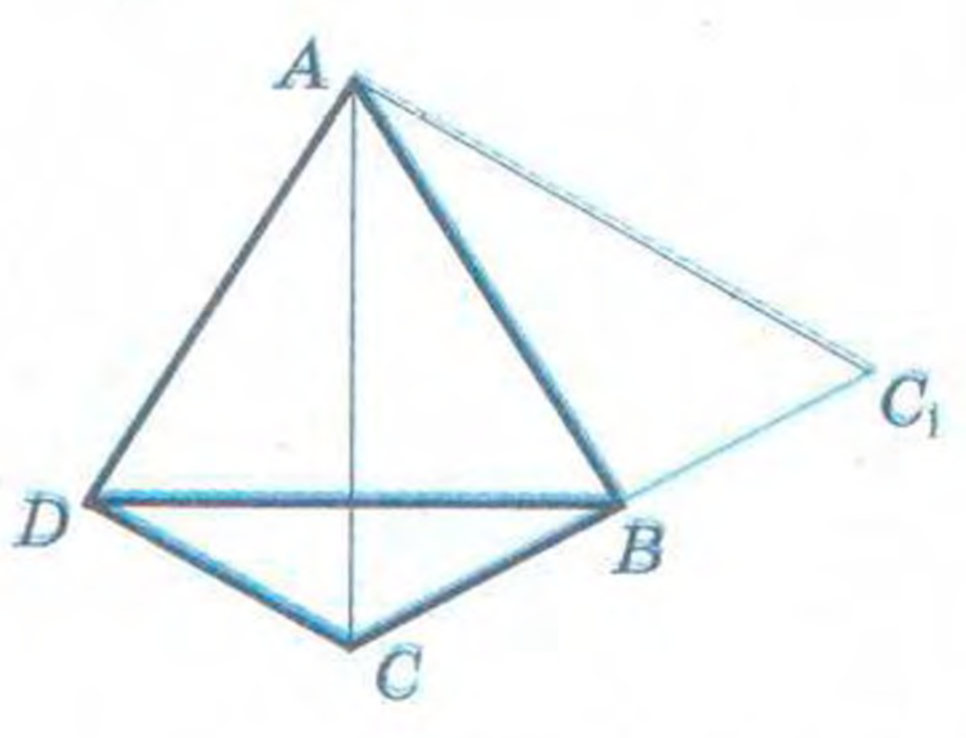


Рис. до задачі 23.34

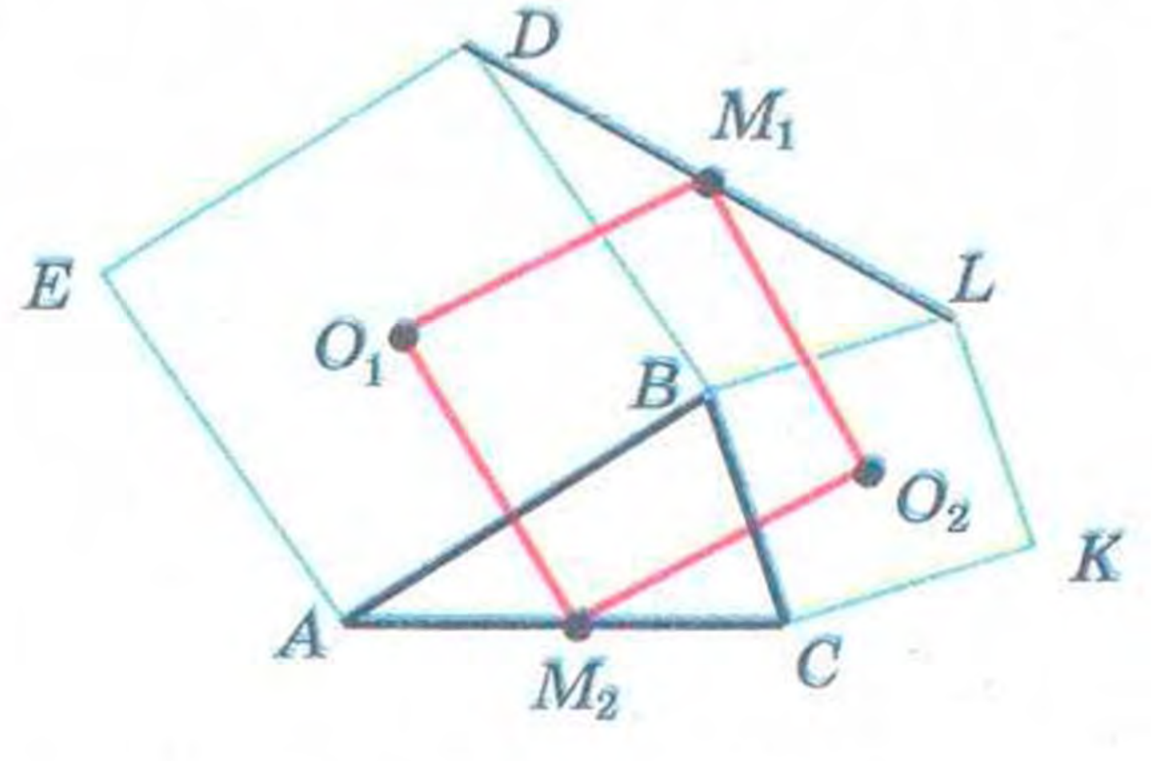


Рис. до задачі 23.35

24.20. 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **24.24.** $\frac{1}{3}$. **24.25.** 12 см. **24.26.** 28,8 см^2.

24.28. $\frac{S}{16}$. **24.29.** 1) $k = 2$, точка B або $k = -2$, точка перетину діагоналей трапеції $AMNC$. **24.34.** *Вказівка.* Нехай дане коло дотикається до прямої a в точці M. Точка M_1 — образ точки M при гомотетії з центром A. Оскільки образом прямої a є ця сама пряма, то точка M_1 належить прямій a. Покажіть, що образ даного кола і пряма a мають тільки одну спільну точку M_1.

24.36. $-\frac{1}{2}$. *Вказівка.* За означенням гомотетії $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$. **24.37.** (–3; 2). **24.38.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **24.39.** $x = 0$, $y = 8$. **24.40.** 20 см^2.

24.41. 112 см^2. **24.42.** 1 : 2. *Вказівка.* $\frac{S_{\Delta AMK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2}AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A$.

24.43. 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Вказівка.* Оберіть довільну точку M, яка належить даній прямій. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$. Точка M_1 — образ точки M при даній гомотетії. Скористайтеся тим, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 2. **24.44.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **24.45.** *Вказівка.* Доведіть, що коли спільна точка двох кіл є центром гомотетії, при якій образом одного кола є друге, то ці кола дотикаються. **24.47.** *Вказівка.* Пряма A_2B_2 є образом прямої A_1B_1 при гомотетії з центром у точці дотику і коефіцієнтом, рівним відношенню більшого радіуса до меншого. **24.49.** Коло, за винятком точки A, яке є образом даного кола при гомотетії з центром A і коефіцієнтом, рівним $\frac{1}{2}$.

24.51. *Вказівка.* Трикутник з вершинами в отриманих точках є образом трикутника з вершинами в серединах сторін даного трикутника при гомотетії з центром M і коефіцієнтом, рівним 2.

24.52. $\frac{25}{16}$. **24.55.** *Вказівка.* Нехай A_1 і B_1 — точки перетину відповідно прямих OA і OB з меншим колом. Із задачі 24.47 випливає, що $A_1B_1 \parallel AB$. Маємо $\angle B_1MB = \angle A_1B_1M = \angle MOB = \angle MA_1B_1 = \angle A_1MA = \angle AOM$. **24.56.** *Вказівка.* Побудуйте довільний трикутник, два кути якого дорівнюють двом даним кутам. Опишіть навколо нього коло. Шуканий трикутник є образом побудованого трикутника при гомотетії з центром у довільній точці і коефіцієнтом, рівним відношенню даного радіуса до радіуса побудованого кола. **24.58.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, подібний даному, і застосуйте гомотетію з центром у будь-якій з вершин і коефіцієнтом $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}$. **24.59.** *Вказівка.* Див. розв'язання прикладу 1 п. 24. **24.60.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник так, щоб його сторони були паралельними даним прямим, а дві вершини належали сторонам даного трикутника. Потім застосуйте гомотетію з центром у вершині даного трикутника. **24.61.** $\frac{2}{9}S$. **24.62.** *Вказівка.* Розгляньте гомотетію з центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом, рівним $\frac{1}{3}$. **24.63.** Пряма, яка є образом прямої l при гомотетії з центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом, рівним $\frac{1}{3}$, за винятком точки перетину прямих AB і l (якщо така точка існує). **24.64.** *Вказівка.* Побудуйте довільне коло, яке дотикається до сторін кута (див. рис.). Нехай M_1 — одна з точок перетину прямої BM з побудованим колом. Розгляньте гомотетію з центром у точці B і коефіцієнтом, рівним $\frac{BM}{BM_1}$. Задача має два розв'язки. **24.65.** *Вказівка.* На промені OA оберемо довільну точку A_1. Проведемо $A_1B_1 \perp OB$ і $A_1M_1 = A_1B_1$ так, щоб M_1 належала променю OM (див. рисунок). Застосуйте гомотетію з центром у точці O і коефіцієнтом $\frac{OM}{OM_1}$.

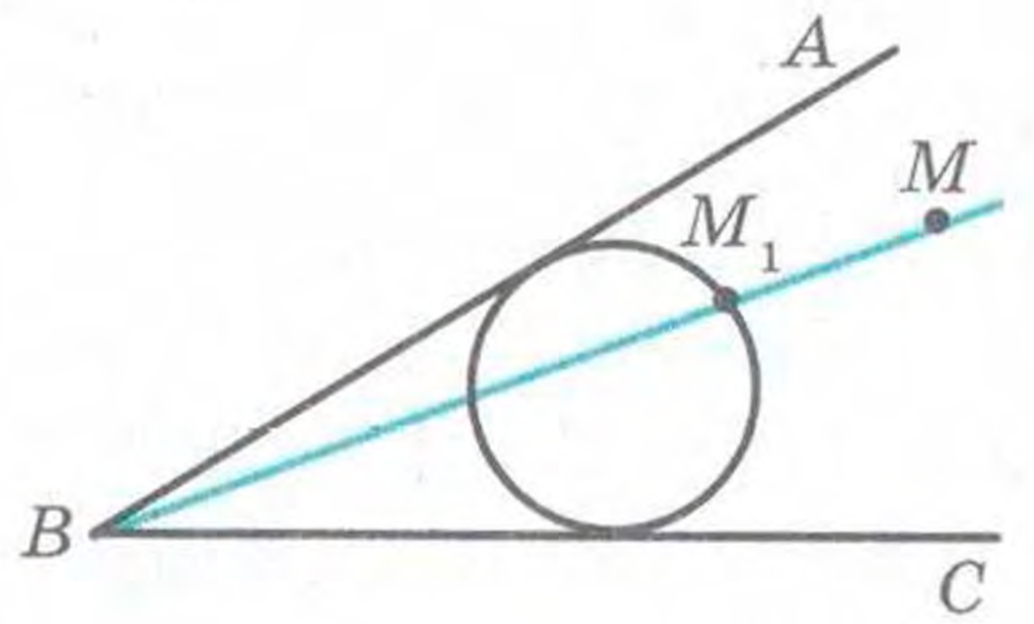


Рис. до задачі 24.64

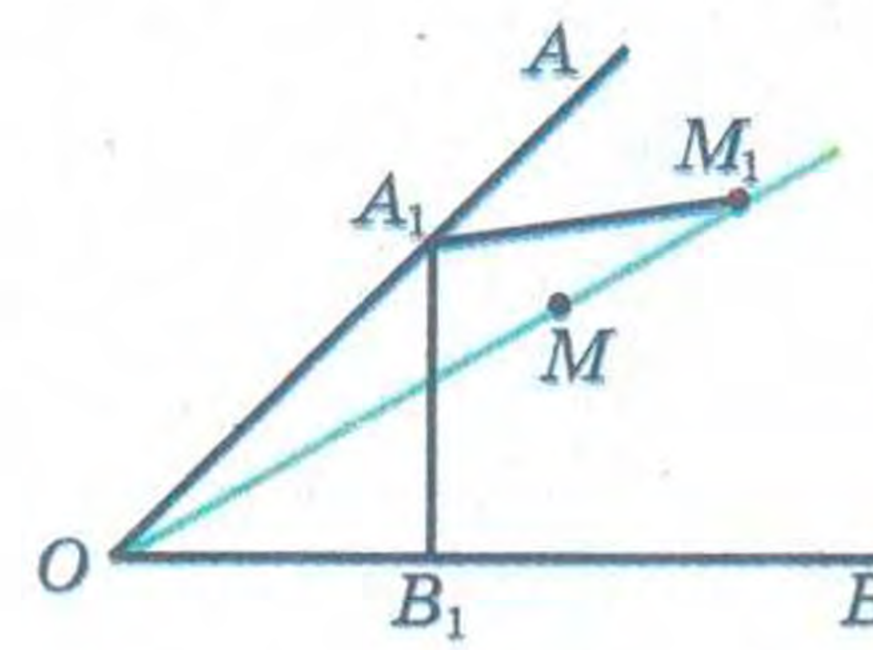


Рис. до задачі 24.65

24.66. Основа висоти трикутника, проведеної з вершини B. *Вказівка.* Нехай точки M_1 і M_2 — середини відрізків AM і MC відповідно. Маємо: $H_M^2(M_1) = A$, $H_M^2(M_2) = C$. Тоді при зазначеній гомотетії образами проведених перпендикулярів є висоти трикутників, проведені з вершин A і C. **24.67.** *Вказівка.* Нехай точки C_1 і B_1 — середини відрізків AB і AC відповідно. Тоді при гомотетії з центром A і коефіцієнтом $k = \frac{B_1C_1}{KL}$ образами проведених прямих будуть серединні перпендикуляри сторін AB і AC. **24.68.** *Вказівка.* Побудуйте образ даного кола при гомотетії з центром M і коефіцієнтом -2. **24.69.** *Вказівка.* На гіпотенузі AB у зовнішній бік побудуйте рівносторонній трикутник. Він є образом трикутника MNK при гомотетії з центром у точці C. **24.70.** *Вказівка.* Покажіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ і $C_1A_1 \parallel C_2A_2$. Далі скористайтеся результатом ключової задачі 24.46. **24.72.** *Вказівка.* Доведіть, що $AB \parallel A_2B_2$, $BC \parallel B_2C_2$, $AC \parallel A_2C_2$. **24.73.** *Вказівка.* Розглянемо трикутник ABC, який належить розглядуваній множині трикутників. Шуканим колом буде образ вписаного кола трикутника ABC при гомотетії з центром C і коефіцієнтом 2. **25.5.** Точки лежать на одній прямій. **25.14.** Площини можуть перетинатися або бути паралельними. **25.18.** Перетинаються або мимобіжні. **25.23.** $15\sqrt{2}$ см. **25.24.** $15\sqrt{3}$ см. **25.25.** 15 см. **25.26.** 20 см. **25.27.** $2\sqrt{21}$ см. **25.28.** $2\sqrt{12+3\sqrt{6}}$ см. **26.17.** 680 см², 840 см², 1360 см³. **26.18.** 350 см², 420 см³. **26.19.** $3d^2$, $\frac{\sqrt{2}}{4}d^3$. **26.24.** $48\sqrt{2}$ см². **26.25.** 36 см². **26.29.** $\frac{1}{2}d^3 \sin\alpha \sin\beta \cos^2\beta$. **26.30.** 2 $m^2 \operatorname{tg}\beta(\sin\alpha + \cos\alpha)$; $m^3 \sin\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\beta$. **26.31.** $8a^2 \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$; $2a^3 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$. **26.32.** $\frac{a^3}{6}$. **27.11.** ≈ 1,24 мм. **27.12.** ≈ 60 000 Н. **27.13.** 200π см²; 320π см³. **27.14.** 320π см²; 1024π см³. **27.15.** ≈ 3770 кг. **27.16.** 4,5 см. **27.17.** ≈ 550 кг. **27.20.** ≈ 3 кг. **27.21.** $\pi h^2\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}\pi h^3$. **27.22.** $2\pi R^2$; $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$.

ДОДАТОК 1

Зміст програми з ГЕОМЕТРІЇ (9 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11-2151 від 30.05.2008 р.)

Структура програми

Програма подана у формі таблиці, яка містить дві частини: зміст навчального матеріалу і вимоги до підготовки учнів.

У частині «Зміст навчального матеріалу», яка оформлена прямим шрифтом, включено зміст програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Текст, оформлений курсивом, містить навчальний матеріал, який вивчається у класах з поглибленим рівнем математики.

Програма передбачає можливість вивчення змісту курсу з різним степенем повноти. Додаткові питання і теми, узяті в квадратні дужки, можна не вивчати, що дозволяє вчителеві залежно від конкретних умов варіювати об'єм матеріалу, який вивчається, і відповідно ступінь поглиблення і розширення курсу.

9-й клас. Геометрія

(105 год. I семестр — 48 год, 3 год на тиждень,
II семестр — 57 год, 3 год на тиждень)

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
6	Тема 1. **ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ 8 КЛАСУ**	
16	Тема 2. **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ**	
	Синус, косинус, тангенс *і котангенс* як функції кута від 0° до 180°. Співвідношення між основними тригонометричними функціями: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Тотожності $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Теореми косинусів і синусів. *Властивість сторін і діагоналей паралелограма.* *Формула для знаходження довжини медіани через сторони трикутника.* *Застосування формули $a = 2R\sin\alpha$*	**Формулює** означення: синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута від 0° до 180°; теореми: синусів, косинусів, про сторони і діагоналі паралелограма. **Записує** співвідношення між тригонометричними функціями. **Доводить** теореми: синусів, косинусів, про сторони і діагоналі паралелограма; формули: для обчислення радіуса описаного кола трикутника, для обчислення площі трикутника і чотирикутника. **Володіє** алгоритмами розв'язування трикутників. **Застосовує** вивчені теореми для розв'язування задач.

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
	Розв'язування трикутників. [*Тригонометрична форма теореми Чеви. Формула Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного і описаного кіл трикутника.*] Формули для знаходження площі трикутника. Формула для знаходження площі чотирикутника через його діагоналі та кут між ними.	
8	Тема 3. **ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ**	
	Правильні многокутники та їх властивості. Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників. Побудова правильних многокутників. Довжина кола. Довжина дуги кола. Площа круга та його частин.	**Формулює** означення: правильного многокутника, кругового сектора, кругового сегмента; теореми: про відношення довжини кола до його діаметра, про довжину кола, про площу круга і його частин. **Доводить** формули для обчислення радіусів вписаного і описаного кіл правильного многокутника. **Будує** правильний шестикутник. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
18	Тема 4. **ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ**	
	Прямокутна система координат на площині. Формула відстані між точками із заданими координатами. *Поділ відрізка в заданому відношенні.* Координати середини відрізка. Рівняння фігури. Загальне рівняння прямої. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Формула відстані від точки до прямої.* Рівняння кола. *Взаємне розміщення прямої і кола. Метод координат.* [*Коло Аполлонія. Формула Лейбніца.*]	**Описує** прямокутну систему координат. **Формулює** означення рівняння фігури, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. **Записує** формули: відстані між двома точками, координат середини відрізка, координат точки поділу відрізка в даному відношенні, відстані від точки до прямої; рівняння кола, загальне рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки. **Доводить** формули: відстані між двома точками, координат середини відрізка; умову паралельності двох прямих. **Виводить:** загальне рівняння прямої, рівняння кола. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
19	**Тема 5. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ**	
	Скалярні й векторні величини. Поняття вектора. Модуль і напрям вектора. Рівні вектори. Протилежні вектори. Координати вектора. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори. *Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами.* Скалярний добуток векторів і його властивості. *Застосування векторів до розв'язування задач і доведення теорем.*	**Описує** поняття вектора. **Формулює** означення понять: модуль вектора, колінеарні вектори, рівні вектори, протилежні вектори, координати вектора, сума і різниця двох векторів, добуток вектора і числа, скалярний добуток двох векторів; властивості дій над векторами; теорему про розкладання вектора за двома неколінеарними векторами. **Доводить** формули для обчислення: координат вектора, який є результатом дій над векторами, скалярного добутку двох векторів, заданих координатами. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
20	**Тема 6. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ**	
	Поняття про перетворення фігури. Рух (переміщення) фігури і його властивості. Рівність фігур. [*Композиція рухів.*] Паралельне перенесення. Симетрії відносно точки та прямої. Поворот. *Застосування рухів фігури для розв'язування задач.* Гомотетія та її властивості. Перетворення подібності та його властивості. Площі подібних фігур. *Застосування перетворень подібності та гомотетії для розв'язування задач.* [*Інверсія. Застосування інверсії для розв'язування задач.*]	**Описує** поняття перетворення. **Формулює** означення понять: рух, паралельне перенесення, осьова і центральна симетрії, поворот, гомотетія, перетворення подібності, рівні фігури; властивості: руху, гомотетії, перетворення подібності, площ подібних фігур. **Доводить**, що паралельне перенесення, симетрії відносно прямої й точки, поворот є рухами. **Задає** паралельне перенесення за допомогою координат. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
8	**Тема 7. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ З СТЕРЕОМЕТРІЇ**	
	Взаємне розташування прямих у просторі. Взаємне розташування площин. Взаємне розташування прямої та площини. Перпендикуляр до площини.	**Описує** взаємне розміщення в просторі двох прямих; прямої та площини; двох площин. **Пояснює**, що таке: пряма призма, піраміда, циліндр,

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
	Пряма призма. Піраміда. Площа поверхні та об'єм призми і піраміди. Циліндр. Конус. Куля. Площі поверхонь і об'єми циліндра, конуса і кулі. Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь і об'ємів, у тому числі прикладного характеру.	конус, куля та їх елементи; поверхня і об'єм многогранника і тіла обертання. **Зображує і знаходить** на рисунках многогранники і тіла обертання та їх елементи. **Записує і пояснює** формули для обчислення площ поверхонь і об'ємів зазначених у програмі геометричних тіл. **Застосовує** вивчені означення і властивості до розв'язання задач, у т.ч. прикладного змісту.
10	Тема 8. **ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ**	

ДОДАТОК 2

Орієнтовне календарне планування з геометрії (9 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	Тема 1. Повторення і систематизація навчального матеріалу з курсу геометрії 8 класу (6 год)	
1	Повторення й систематизація навчального матеріалу	5
2	Контрольна робота № 1	1
	Тема 2. Розв'язування трикутників (16 год)	
3	Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°	2
4	Теорема косинусів	3
5	Теорема синусів	3
6	Розв'язування трикутників	3
7	Формули для знаходження площі трикутника	4
8	Контрольна робота № 2	1
	Тема 3. Правильні многокутники (8 год)	
9	Правильні многокутники	4
10	Довжина кола. Площа круга	3
11	Контрольна робота № 3	1

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	Тема 4. Декартові координати на площині (18 год)	
12	Відстань між двома точками із заданими координатами. Поділ відрізка в заданому відношенні	3
13	Рівняння фігури. Рівняння кола	3
14	Контрольна робота № 4	1
15	Загальне рівняння прямої	3
16	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки	4
17	Використання декартових координат для розв'язування геометричних задач	3
18	Контрольна робота № 5	1
	Тема 5. Вектори на площині (19 год)	
19	Поняття вектора	3
20	Координати вектора	2
21	Додавання і віднімання векторів	3
22	Контрольна робота № 6	1
23	Множення вектора на число. Застосування векторів до розв'язування задач	5
24	Скалярний добуток векторів	4
25	Контрольна робота № 7	1
	Тема 6. Геометричні перетворення (20 год)	
26	Перетворення (відображення) фігур	2
27	Рух. Паралельне перенесення	2
28	Осьова симетрія	3
29	Центральна симетрія	3
30	Контрольна робота № 8	1
31	Поворот	4
32	Гомотетія. Подібність фігур	4
33	Контрольна робота № 9	1
	Тема 7. Початкові відомості з стереометрії (8 год)	
34	Прямі й площини у просторі	3
35	Пряма призма. Піраміда	2
36	Циліндр. Конус. Куля	2
37	Контрольна робота № 10	1
	Тема 8. Повторення і систематизація навчального матеріалу (15 год)	
38	Повторення навчального матеріалу	14
39	Контрольна робота № 11	1

ДОДАТОК 3

Таблиця значень тригонометричних функцій

Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс	Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,985	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,982	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,287	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,306	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,335	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,946	0,344	65	0,906	0,423	2,145
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,934	0,384	67	0,921	0,391	2,356
22	0,375	0,927	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,921	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,914	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,906	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,510	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,011
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,530	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,675	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,727	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,993	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,995	0,105	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,933	89	1,000	0,017	57,290
44	0,695	0,719	0,966	90	1,000	0,000	
45	0,707	0,707	1,000				

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

*Підручник для 9 класу
з поглибленим вивченням математики*

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 21.07.2009. Формат 60×90/16.
Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 17,00.
Тираж 5000 прим. Замовлення № 391

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 758-83-93, 719-17-26, факс: (057) 719-17-26

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»,
Тел. (057) 758-15-80

ВЕКТОРИ І ДІЇ НАД НИМИ

Модуль вектора

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, де $(a_1;\, a_2)$ — координати вектора $\vec{a}$

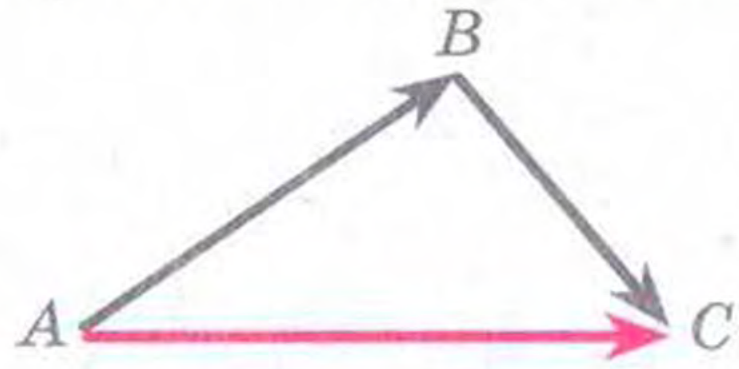
Рівність векторів

Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$, то $\vec{a} = \vec{b}$

$\vec{a} = \vec{b}$, якщо $a_1 = b_1$ і $a_2 = b_2$, де $(a_1;\, a_2)$ і $(b_1;\, b_2)$ — координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно

Додавання векторів

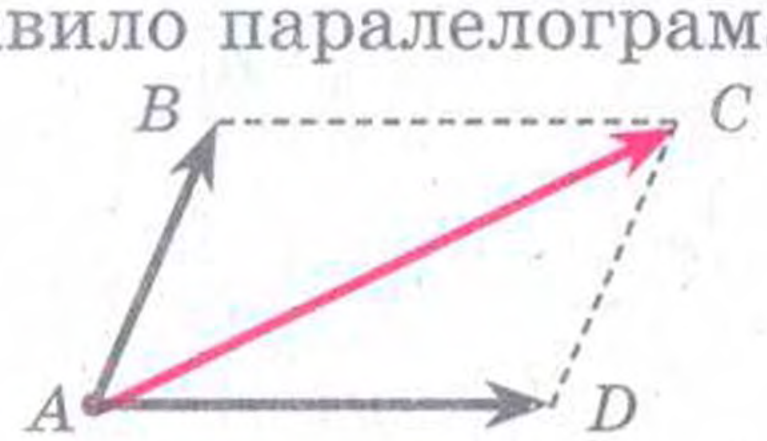
Правило трикутника:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

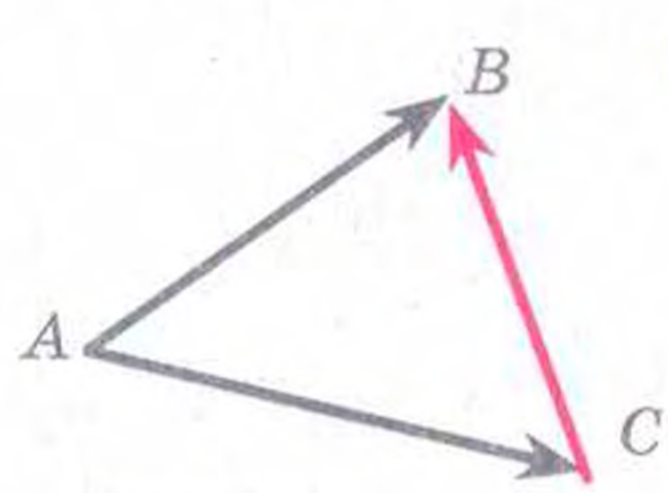
$\vec{a}\,(a_1;\, a_2) + \vec{b}\,(b_1;\, b_2) = \vec{c}\,(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2)$

Правило паралелограма:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Віднімання векторів



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

$\vec{a}\,(a_1;\, a_2) - \vec{b}\,(b_1;\, b_2) = \vec{c}\,(a_1 - b_1;\, a_2 - b_2)$

Множення вектора на число

Якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, то $\left|\vec{b}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$,

$\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $k > 0$,

$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $k < 0$

$k\vec{a}\,(a_1;\, a_2) = \vec{b}\,(ka_1;\, ka_2)$

Скалярний добуток векторів

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos \angle BAC$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
A	a	а
B	b	бе
C	c	це
D	d	де
E	e	е
F	f	еф
G	g	ге
H	h	аш
I	i	і
J	j	йот
K	k	ка
L	l	ель
M	m	ем
N	n	ен
O	o	о
P	p	пе
Q	q	ку
R	r	ер
S	s	ес
T	t	те
U	u	у
V	v	ве
W	w	дубль-ве
X	x	ікс
Y	y	ігрек
Z	z	зет

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	епсілон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	ета
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	ксі
Ο	ο	омікрон
Π	π	пі
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сігма
Τ	τ	тау
Υ	υ	іпсілон
Φ	φ	фі
Χ	χ	хі
Ψ	ψ	псі
Ω	ω	омега

Геометрія 9 клас

Навчально-методичний комплект

Підручник

Книга для вчителя

Збірник задач і контрольних робіт

ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ КЛАСІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

9 789664 740606

61052 Харків, вул. Восьмого Березня, 31
Тел.: **(057) 719-46-80, 719-17-26**
факс: **(057) 758-83-93**
e-mail: **contact@gymnasia.com.ua**